

Integração direta do campo eletrostático de um anel de cargas através de métodos numéricos

CAIKE CREPALDI*

Universidade de São Paulo

caike.crepaldi@usp.br

7 de Fevereiro de 2019

Resumo

Neste trabalho, calculamos numericamente o valor do campo elétrico e potencial eletrostático gerados por uma configuração de cargas de um anel com densidade de carga linear λ e comparamos os resultados numéricos obtidos com soluções analíticas para pontos em eixos de simetria.

1 Introdução

Temos que o Campo Elétrico pode ser derivado da lei de Coulomb escrita da seguinte forma [1]:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{z^2} d^3r' \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') \vec{z}}{z^3} d^3r' \quad (1)$$

Nela, temos o uso da notação vetorial tão frequente nos cursos de Eletromagnetismo em toda a sua glória (veja a figura 1). Os vetores \vec{r} e \vec{r}' são os vetores posição de um ponto qualquer do espaço, P , e de uma carga q , respectivamente. Já o vetor \vec{z} é o vetor separação entre a carga e o ponto P . Note que $\rho(\vec{r}')$ é a densidade de cargas.

Percebemos então que temos uma integral calculada com relação a configuração de cargas, sendo dependente da geometria descrita por elas. O cálculo analítico dessa integral nem sempre é simples, e por isso costumamos calcular analiticamente apenas em pontos onde a geometria do sistema simplifica as contas, como é o caso de eixos de simetria. Para outros pontos no espaço devemos recorrer a métodos numéricos.

Podemos ainda reescrever essa equação com respeito ao potencial eletrostático ao invés do campo obtendo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{z} d^3r' \quad (2)$$

*NUSP: 8540585

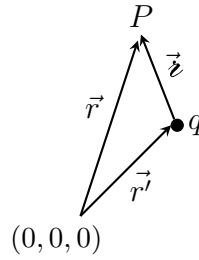


Figura 1: Relação entre os vetores posição, \vec{r} e \vec{r}' , e o separação, \vec{z} . O vetor \vec{r} aponta para um ponto P arbitrário no espaço (onde o campo será calculado) enquanto que o vetor \vec{r}' aponta para o elemento de carga q .

Agora que as principais equações foram introduzidas vamos definir a configuração de cargas que estudaremos nesse trabalho e então definir o campo elétrico e potencial eletrostático gerados por essa configuração para um ponto qualquer P no espaço. A nossa configuração de cargas segue a geometria de um anel de raio R , de centro na origem, e densidade linear de cargas uniforme λ , como pode ser visto na figura 2.

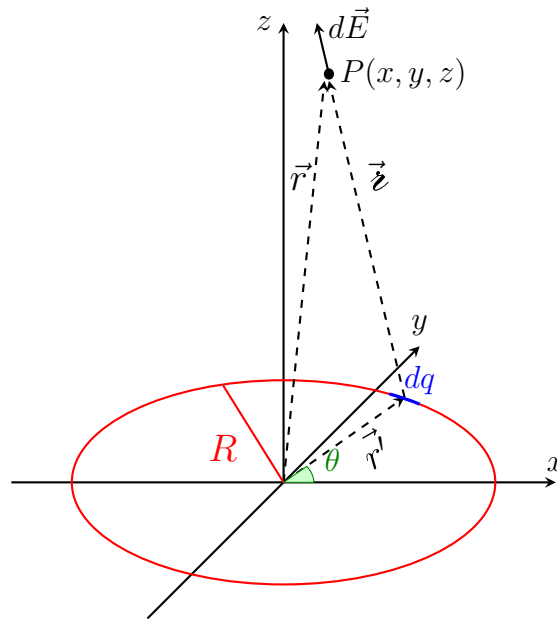


Figura 2: Esquematização do anel de cargas de raio R e densidade linear de carga λ . Observe que o anel pertence ao plano xy . O campo gerado pelo anel será calculado para pontos P_i pertencentes ao espaço 3D.

Portanto, o nosso elemento de carga infinitesimal pode ser definido como:

$$dq = \lambda R d\theta \quad (3)$$

E os nossos vetores posição ficam:

$$\vec{r}' = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (4)$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \quad (5)$$

Lembrando que $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$, o vetor separação pode ser escrito como:

$$\vec{z} = (x - R \cos \theta) \hat{i} + (y - R \sin \theta) \hat{j} + z \hat{k} \quad (6)$$

Logo, a equação do campo elétrico definida para um ponto qualquer no espaço representado pelo vetor posição \vec{r} fica:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{z} d\theta}{z^3} \\ &= \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{[(x - R \cos \theta) \hat{i} + (y - R \sin \theta) \hat{j} + z \hat{k}] d\theta}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (7)$$

Separando \vec{E} em suas componentes nas coordenadas cartesianas, isolando R no numerador e denominador da integral, e definindo as variáveis adimensionais $X = x/R$, $Y = y/R$, e $Z = z/R$, temos:

$$\left(\frac{2\epsilon_0 R}{\lambda}\right) \vec{E}_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(X - \cos \theta) d\theta}{[(X - \cos \theta)^2 + (Y - \sin \theta)^2 + Z^2]^{3/2}} \hat{i} \quad (8)$$

$$\left(\frac{2\epsilon_0 R}{\lambda}\right) \vec{E}_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Y - \sin \theta) d\theta}{[(X - \cos \theta)^2 + (Y - \sin \theta)^2 + Z^2]^{3/2}} \hat{j} \quad (9)$$

$$\left(\frac{2\epsilon_0 R}{\lambda}\right) \vec{E}_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(Z) d\theta}{[(X - \cos \theta)^2 + (Y - \sin \theta)^2 + Z^2]^{3/2}} \hat{k} \quad (10)$$

Analogamente, o potencial eletrostático fica:

$$\left(\frac{4\pi\epsilon_0 R}{\lambda}\right) V = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(X - \cos \theta)^2 + (Y - \sin \theta)^2 + Z^2}} \quad (11)$$

As equações 8, 9, 10, e 11, serão integradas numericamente e o seus resultados serão apresentados em forma de gráficos mais adiante.

Note que iremos trabalhar com $\left(\frac{2\epsilon_0 R}{\lambda}\right) \vec{E}$ ao invés de somente \vec{E} , de modo que os resultados apresentados nesse trabalho, além de adimensionais, sejam independentes da escolha de valores para R e λ . Trabalharemos da mesma maneira com o potencial.

2 Métodos

Neste trabalho usamos o software MATLAB para calcular o campo elétrico e potencial eletrostático através da integração numérica direta e para criar os gráficos

e figuras utilizados. O código da rotina que gera os valores do campo elétrico pode ser visto no apêndice A.

A integração numérica das equações 8, 9, 10, e 11 pode ser feita utilizando a função **integrate**. Essa função usa o método da quadratura adaptativa global para resolver numericamente integrais unidimensionais.

Para plotar o campo elétrico é só utilizar a função **quiver3** do MATLAB. Essa função do MATLAB permite gerar gráficos vetoriais como o da figura 3.

Para visualizar o potencial eletrostático, podemos usar um gráfico de cores. Esse tipo de figura pode ser gerado no MATLAB pela função **imagesc**. Nela, quanto mais clara a cor maior o valor do potencial naquele ponto. As linhas de campo também podem ser geradas pelo MATLAB usando como input os vetores do campo elétrico na função **streamslice**. A combinação dessas duas funções gera a imagem da figura 6.

Todas essas funções fazem parte da biblioteca padrão do MATLAB.

3 Resultados

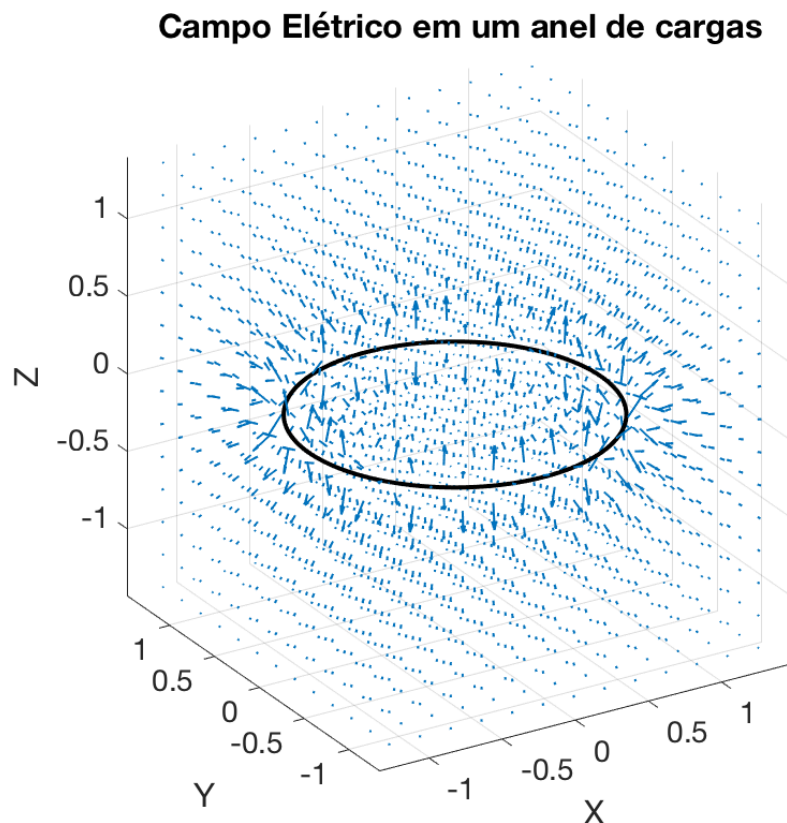


Figura 3: Campo elétrico de um anel de cargas. As coordenadas X , Y e Z são normalizadas pelo raio R , ou seja, $X = x/R$, $Y = y/R$, e $Z = z/R$.

Na figura 3 temos o campo 3D gerado por nossa rotina numérica. Cortes podem ser feitos em planos específicos para melhor visualizar o campo em um espaço 2D. Esses cortes podem ser vistos nos gráficos da figura 4.

O corte no plano XY (veja figura 5a) mostra o campo no plano do anel de cargas, enquanto que o corte no plano radial (veja figura 5b), que pode ser o plano XZ ou YZ, mostra o campo perpendicular ao plano do anel de cargas. Nas figuras, em vermelho temos a intersecção do plano com o anel de cargas.

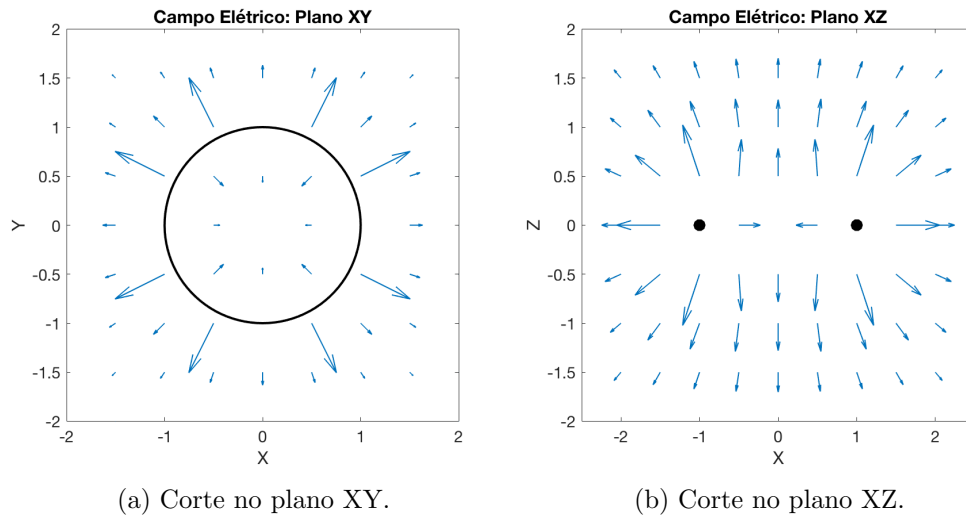


Figura 4: Cortes do campo elétrico em planos diferentes. As coordenadas X , Y e Z são normalizadas pelo raio R , ou seja, $X = x/R$, $Y = y/R$, e $Z = z/R$.

Podemos observar claramente que o módulo do campo cai rapidamente enquanto nos afastamos do anel. Isso é facilmente notado pela queda rápida no tamanho das “flechas” no gráfico vetorial.

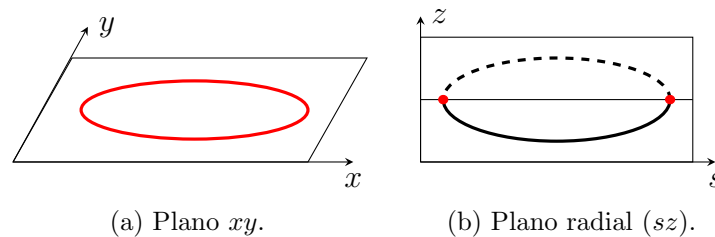


Figura 5: Esquematização dos cortes no anel de cargas.

Na figura 6 temos o resultado da integração direta do potencial eletrostático, com as linhas de campo do campo elétrico sobrepostas. Vemos que assim como no campo elétrico, o valor do potencial cai rapidamente conforme nos afastamos do anel.

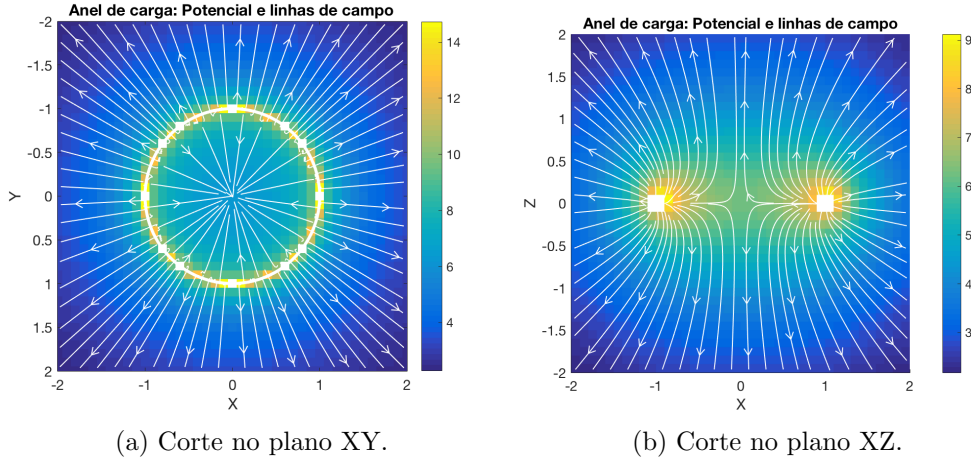


Figura 6: Cortes do potencial em planos diferentes e com as linhas de campo do campo elétrico sobrepostas. As coordenadas X , Y e Z são normalizadas pelo raio R , ou seja, $X = x/R$, $Y = y/R$, e $Z = z/R$.

4 Discussões

Vamos comparar os resultados que vem da integração direta com o esperado para casos específicos onde podemos trabalhar mais com a equação analítica (7).

- (i) $P \in \{(x, y, z) : z = 0\}$

Para um ponto P pertencente ao eixo z , a solução analítica fica:

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(z) d\theta \hat{k}}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \quad (12)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R} \frac{a}{[1 + a^2]^{3/2}} \hat{k} \quad (13)$$

Onde $a = z/R$. O gráfico da equação 13 plotado junto ao resultado obtido utilizando a integração numérica pode ser observado na figura 7a.

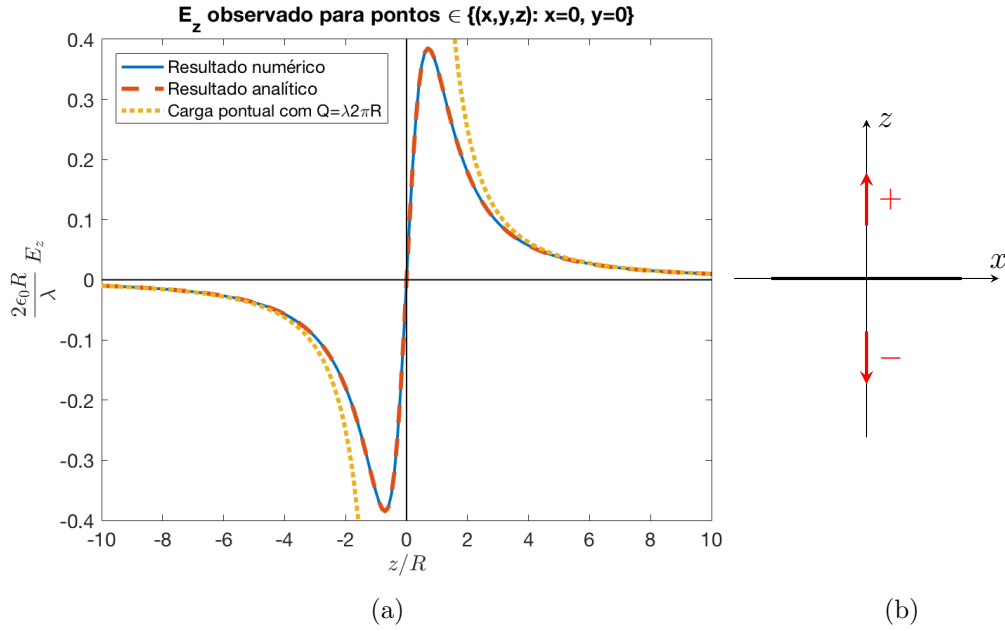


Figura 7: **(a)** Comparação da solução analítica (eq. 13) e de um corte em $x = 0$ e $y = 0$ na solução numérica. **(b)** Inversão da direção de \vec{E} para pontos pertencentes ao eixo z .

Agora, vamos supor que o ponto P esteja muito longe do anel. Nesse caso usamos $z \rightarrow \infty$ na equação 13. Também usamos a relação $\lambda = Q/(2\pi R)$.

Logo, temos que o campo nessa situação fica:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \vec{E} = \frac{QR}{2\pi R 2\epsilon_0} \frac{z}{z^3} \hat{k} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{k} \quad (14)$$

Observamos que o campo elétrico muito longe do anel é equivalente ao de uma carga pontual com carga total Q . No gráfico da figura 7a isso pode ser observado pelo campo E_z tender ao campo de uma carga pontual para $z \gg R$ (neste caso $z \geq 5R$ parece ser suficiente). A queda do erro referente a aproximação do campo do anel para o de uma carga unitária pode ser visto em detalhes na figura 10a.

(ii) $P \in \{(x, y, z) : x = 0, y = 0\}$

Por conta da simetria radial, podemos escolher um ponto no eixo x (ou seja $y=0$) para fazer os cálculos e o resultado valerá para o módulo do campo elétrico de qualquer ponto no plano cuja distância até a origem seja x .

$$E = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(x - R \cos \theta) d\theta}{[(x - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (15)$$

$$\vec{E} = E \hat{s} \quad (16)$$

$$E = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(x - R \cos \theta) d\theta}{[x^2 - 2xR \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \quad (17)$$

Isolando o R na integral e efetuando a substituição de variáveis $a = x/R$, temos como resultado:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \frac{(a - \cos \theta) d\theta}{[1 + a^2 - 2a \cos \theta]^{3/2}} \quad (18)$$

Logo,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^{2\pi} \frac{(a - \cos \theta) d\theta}{[1 + a^2 - 2a \cos \theta]^{3/2}} \hat{s} \quad (19)$$

A equação 19 pode ser resolvida numericamente (portando podendo ser considerada uma solução semi-analítica) e então comparada com o campo integrado em todo o espaço (através das equações 8, 9 e 10). O gráfico dessa comparação pode ser observado na figura 8a.

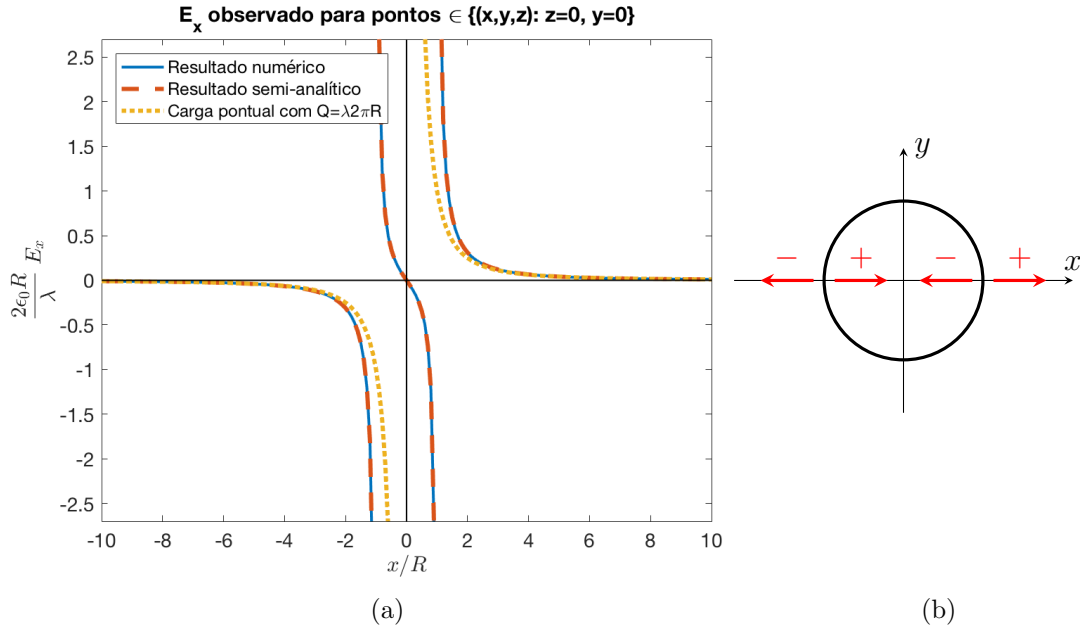


Figura 8: **(a)** Comparação da solução semi-analítica (eq. 19) e de um corte em $z = 0$ e $y = 0$ na solução numérica. **(b)** Inversão da direção de \vec{E} para pontos pertencentes ao eixo x .

Tanto a inversão da direção no campo quanto ele se anular no centro do anel é o esperado por uma simples analogia com um fio de cargas de densidade linear de carga uniforme λ , como visto na figura 9.

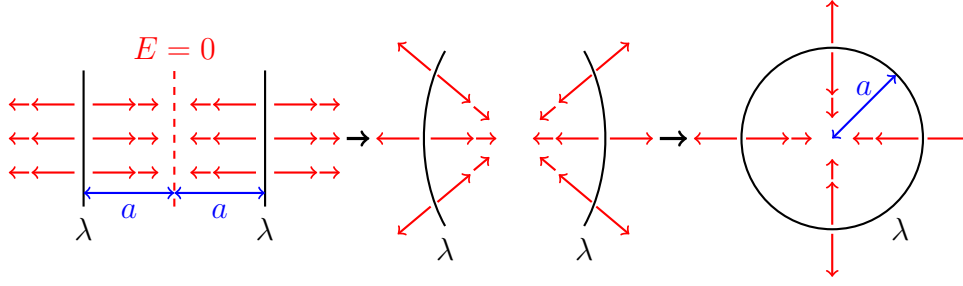


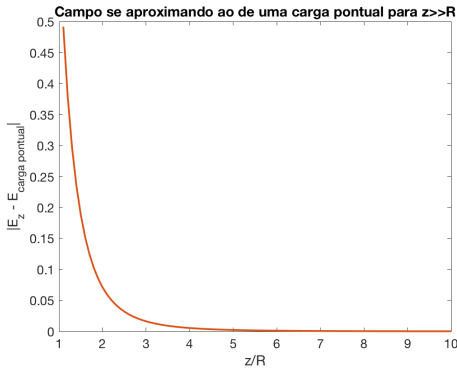
Figura 9: Construção de um anel de cargas através de 2 fios carregados idênticos com densidade de carga linear uniforme λ separados por $2a$ de distância. Os vetores em vermelho representam o campo elétrico gerado.

Novamente, vamos supor que o ponto P esteja muito longe do anel. Nesse caso usamos $s \rightarrow \infty$ na equação 19. Disso temos que $a \rightarrow \infty$ e que a contribuição de $\cos \theta$ pode ser ignorada. Também usamos a relação $\lambda = Q/(2\pi R)$.

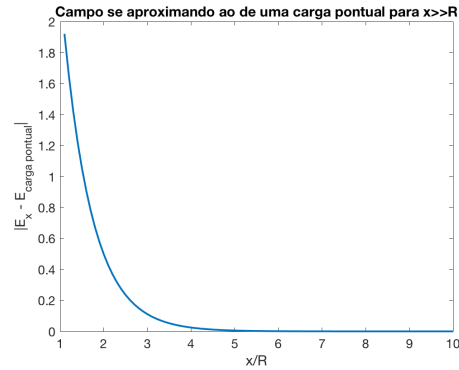
Logo, temos que o campo nessa situação fica:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \vec{E} = \frac{Q}{2\pi R 4\pi \epsilon_0 R} \frac{a}{a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{s} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 s^2} \hat{s} \quad (20)$$

Mais uma vez, observamos que o campo elétrico muito longe do anel é equivalente ao de uma carga pontual com carga total Q . No gráfico da figura 8a isso pode ser observado pelo campo E_x tender ao campo de uma carga pontual para $x \gg R$ (novamente, tomar $x \geq 5R$ parece ser suficiente). A queda do erro referente a aproximação do campo do anel para o de uma carga unitária pode ser visto em detalhes na figura 10b.



(a) Erro referente ao gráfico 7a.



(b) Erro referente ao gráfico 8a.

Figura 10: Queda do erro (em valor absoluto) da aproximação do campo elétrico do anel para o de uma carga pontual conforme nos afastamos do anel ($z > R$ e $x > R$).

5 Conclusões

A integração direta de campos elétricos é um método interessante para a obtenção do valor do campo em todo o espaço. A solução numérica se mostrou uma excelente aproximação que condiz com os resultados analíticos obtidos para eixos de simetria.

No caso de um anel de cargas, a magnitude do campo elétrico cai rapidamente conforme nos afastamos das bordas do anel. Para o campo no plano XY, observamos a inversão de direção, o que pode ser explicado pela construção da geometria do anel. Essa inversão de direção do campo também ocorre no plano XZ, porém isso já era esperado pela solução analítica amplamente conhecida para um ponto pertencente ao eixo de simetria z.

Referências

- [1] Griffiths, David J.: *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, cap. 3, 4^a edição, 2014.

Apêndice A: O código

```
1 % define as constantes
  step = .5; % espacamento entre os pontos no grid 3D
3 Raio = 1;

5 interval = -2:step:2;

7 [X, Y, Z] = meshgrid(interval, interval, interval); % define o grid dos
  pontos no espaco 3D

9 % cria as matrizes das componentes x, y, z do campo eletrico
  Ex=zeros(size(X));
11 Ey=zeros(size(X));
  Ez=zeros(size(X));

13 for qelem=1:numel(X) % para cada elemento de espaco
15
17     x = X(qelem); % x atual
17     y = Y(qelem); % y atual
19     z = Z(qelem); % z atual

19     if (x^2+y^2==Raio^2&&z==0) % nao calcular para pontos pertencentes
21         ao anel de cargas
21         Ex(qelem) = NaN;
23         Ey(qelem) = NaN;
23         Ez(qelem) = NaN;
25         continue

25     end

27     % modulo do vetor separacao
29     dist = @(T) sqrt((x-(Raio .* cos(T))).^2+(y-(Raio .* sin(T))).^2+z
31     .^2);

31     %funcoes a serem integradas
33     funx = @(T) (x-(Raio .* cos(T)))/((dist(T)).^3);
33     funy = @(T) (y-(Raio .* sin(T)))/((dist(T)).^3);
35     funz = @(T) (z)/((dist(T)).^3);

35     % calcula as componentes do campo pelas integrais
37     Ex(qelem) = integral(funx,0,2*pi);
37     Ey(qelem) = integral(funy,0,2*pi);
39     Ez(qelem) = integral(funz,0,2*pi);

41 end
```

Código 1: Algoritmo simplificado para a integração numérica das equações do campo elétrico.

A resolução da equação do potencial eletrostático é análoga.

Sabemos pela equação do campo elétrico que quando a distância entre o ponto e o anel tende a zero, o campo estoura para o infinito. Portanto, nos cortes observaremos que os pontos em vermelho terão um campo elétrico que tende para o infinito. Observe que nestes casos (pontos pertencentes ao anel) a nossa rotina não faz a integral e atribui um valor NaN (*Not a Number*) ao campo neste ponto.