

O modelo de Lorenz

E a transição para o caos via intermitência

Caike Crepaldi¹ Taymara R. Dias¹

¹Instituto de Física,
Universidade de São Paulo

PRGF5202 - Caos em Sistemas Dissipativos,
07 de maio de 2018

Sumário

- 1 O Modelo de Lorenz
- 2 Encontrando as Estruturas Intermitentes: A Transformada Wavelet
- 3 Estruturas Intermitentes em Física Experimental: A Turbulência em Plasmas
- 4 Referências

Sumário

- 1 O Modelo de Lorenz
- 2 Encontrando as Estruturas Intermitentes: A Transformada Wavelet
- 3 Estruturas Intermitentes em Física Experimental: A Turbulência em Plasmas
- 4 Referências

Um pouco de história

Dentro os modelos fenomenológicos que apresentam características caóticas (ou seja, imprevisíveis) não podemos esquecer do sistema extremamente complicado que está por trás do clima e do tempo.



Com o intuito de simplificar o conjunto complicado de equações que modelam a atmosfera da Terra, com base nas equações de Navier-Stokes, Edward Norton Lorenz (1963) acabou dando sua enorme contribuição no campo do estudo de sistemas caóticos.

A situação específica que ele considerou foi o problema de Rayleigh-Bénard, que consiste em um fluido em um recipiente cujas superfícies superior e inferior estão a temperaturas diferentes.

Um pouco de história

Num sistema como esse vemos que conforme a diferença de temperatura entre as duas superfícies aumenta, o fluido vai de um estado estacionário, a um estado de fluxo constante (convecção), até por fim atingir um fluxo caótico.

Considerando o poder computacional restrito acessível na época, Lorenz resolveu simplificar as equações de Navier-Stokes do problema de Rayleigh-Bénard.

Ele simplificou tanto o problema que o reduziu a apenas 3 equações (1). Essas equações ficaram então conhecidas como as equações de Lorenz (ou o modelo de Lorenz).

Introdução ao Modelo

O modelo tem 3 parâmetros de controle (σ , r , e b) e 3 variáveis (x , y , e z). Para estudar intermitência, utilizaremos $\sigma = 10$ e $b = 8/3$, o que é uma escolha bem comum na qual alguns autores atribuem a um sistema com água fria. O valor de r representa a diferença de temperatura entre as duas superfícies.

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1a)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y \quad (1b)$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (1c)$$

Intermitência

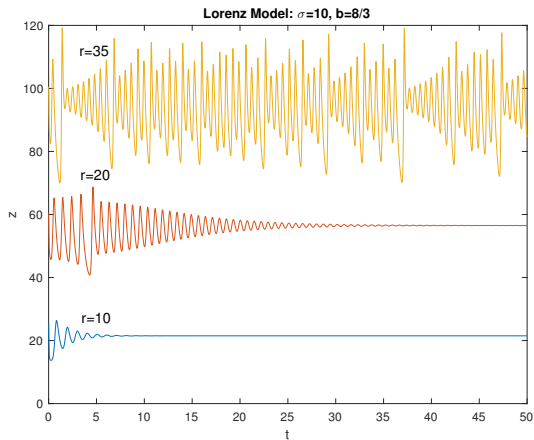


Figura 1: Transição para o caos.

Intermitência

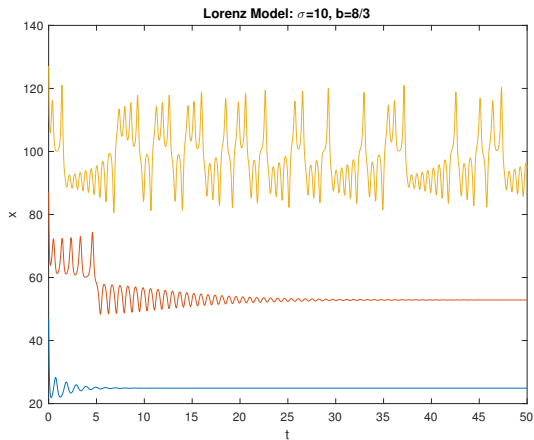


Figura 2: Transição para o caos.

Intermitência

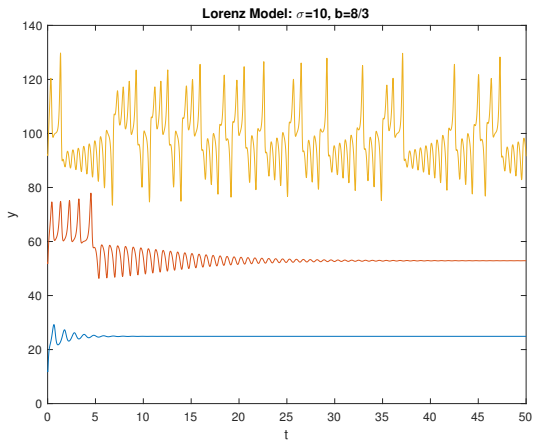


Figura 3: Transição para o caos.

Intermitência

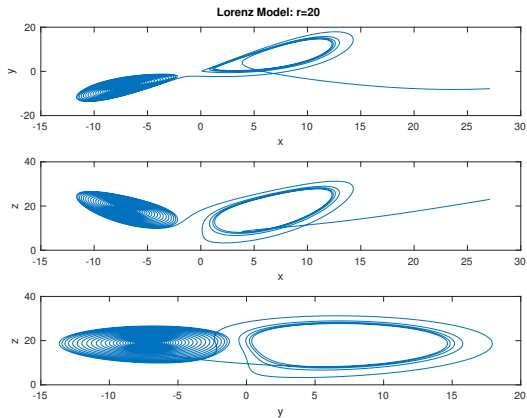


Figura 4: Caminhando para um ponto fixo.

Intermitência

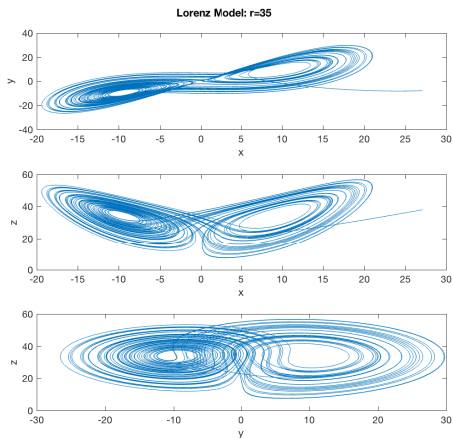


Figura 5: Caminhando para um atrator.

Intermitência

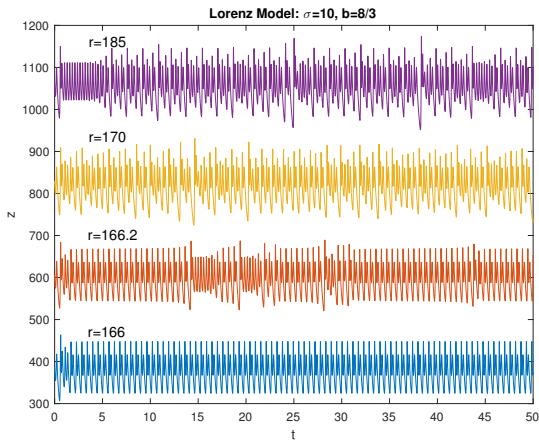


Figura 6: Surgimento da intermitência.

Intermitência

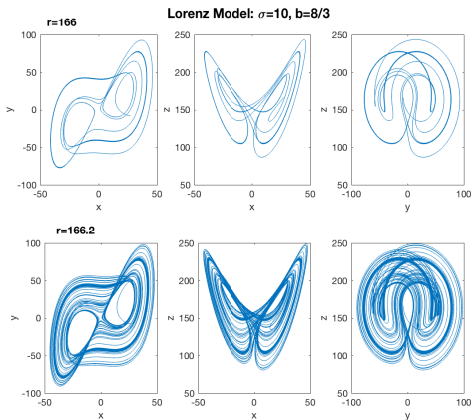


Figura 7: Caminhando para atratores com orbitas periódicas e caóticos.

Intermitência

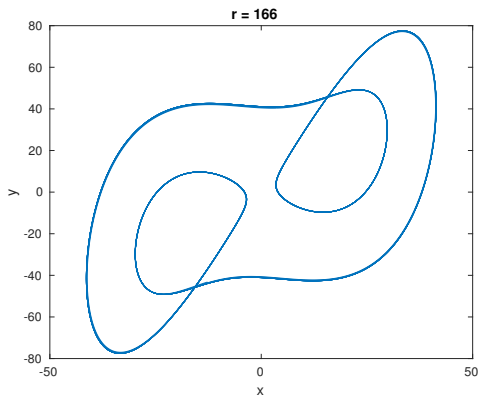


Figura 8: Atrator de órbita periódica.

Intermitência

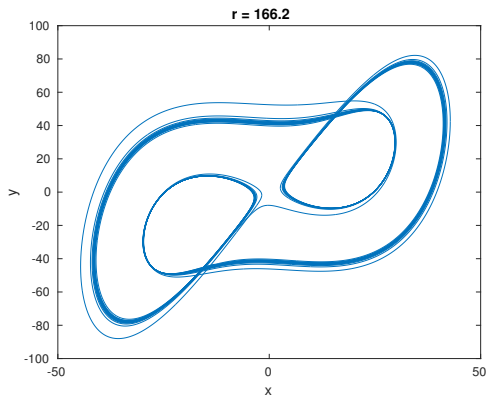


Figura 9: Atrator de órbita caótica.

Bifurcação

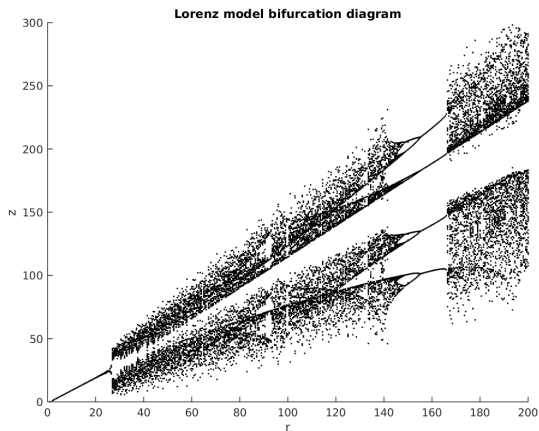


Figura 10: Diagrama de Bifurcação. Modelo de Lorenz com $\sigma = 10$ e $b = 8/3$.

Bifurcação

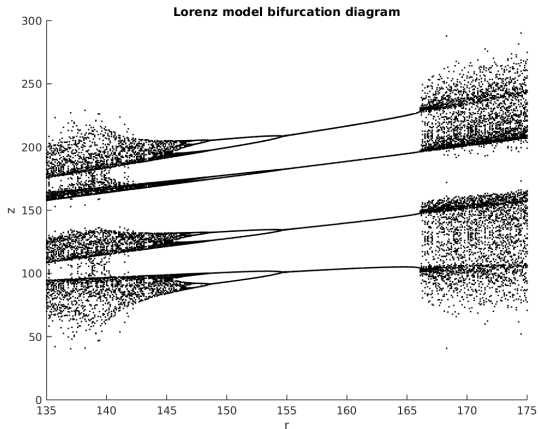


Figura 11: Janela periódica ao redor de $r = 155$.

Sumário

- 1 O Modelo de Lorenz
- 2 Encontrando as Estruturas Intermitentes: A Transformada Wavelet**
- 3 Estruturas Intermitentes em Física Experimental: A Turbulência em Plasmas
- 4 Referências

Transformada Wavelet

A transformada *wavelet* (ondaleta, em pt-br) é um método de análise de séries temporais que permite a localização de estruturas intermitentes.

Podemos considerar a Transformada de Wavelet como uma Transformada de Fourier Janelada com o tamanho da janela variável. Como eventos de baixa frequência precisam de uma maior janela no domínio do tempo para serem observados e eventos de alta frequência precisam de uma janela menor para uma maior resolução temporal, uma janela de tamanho variável permite decompor o sinal tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.

Transformada Wavelet

A Transformada de Wavelet contínua $W_n(s)$ de uma série temporal x_n é definida como uma convolução de x_n com uma versão escalonada e transladada da função wavelet $\Psi_0(\eta)$,

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \Psi^* \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right] \quad (2)$$

onde,

- Ψ^* é o complexo conjugado da função wavelet normalizada;
- δt é o passo da série temporal x_n ;
- s é a escala, um fator proporcional ao período T e que depende da função wavelet escolhida.

A Função Morlet

Uma das funções wavelets utilizadas é a Morlet. Essa função pode consistir em uma onda plana modulada por uma gaussiana

$$\Psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2} \quad (3)$$

onde,

- ω_0 é a frequência adimensional;
- η é um parâmetro adimensional de tempo.

Para essa wavelet, a relação entre a escala s e o período T é

$$T = \left(\frac{4\pi}{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}} \right) s \quad (4)$$

A Função Morlet

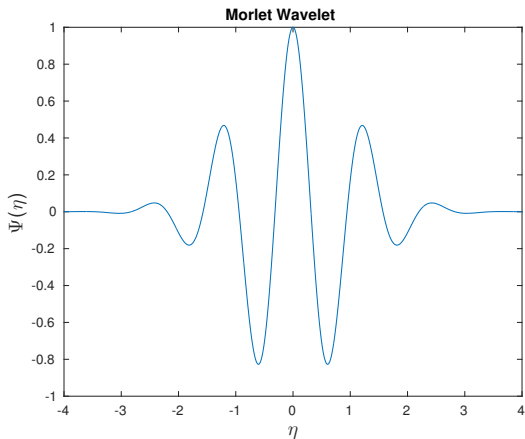


Figura 12: Wavelet Morlet.

A Função Morlet

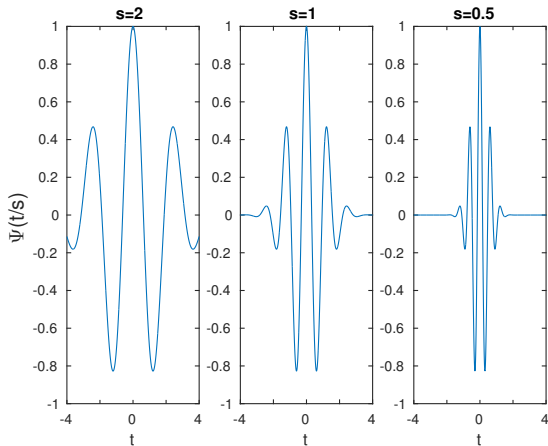


Figura 13: A função Morlet para diferentes escalas.

Método de Wavelet

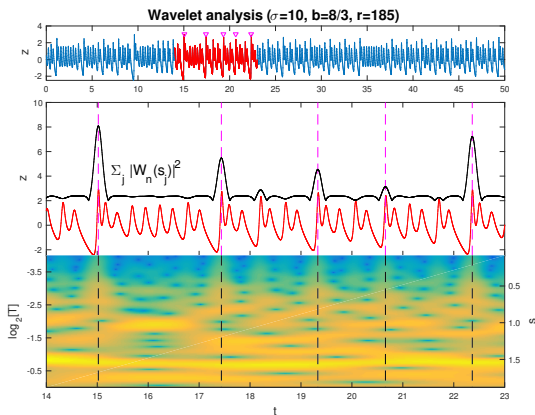


Figura 14: O método de Wavelet.

Método de Wavelet

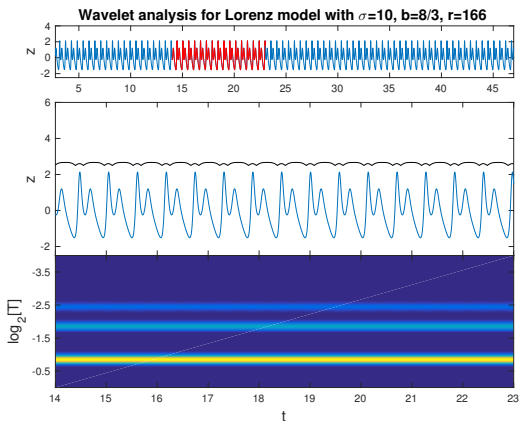


Figura 15: O método de Wavelet.

Método de Wavelet

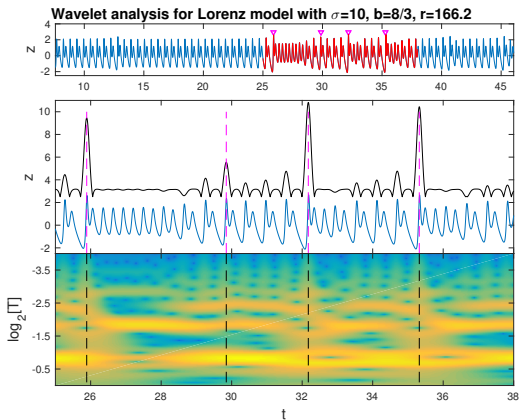


Figura 16: O método de Wavelet.

Sumário

- 1 O Modelo de Lorenz
- 2 Encontrando as Estruturas Intermitentes: A Transformada Wavelet
- 3 Estruturas Intermitentes em Física Experimental: A Turbulência em Plasmas
- 4 Referências

O plasma no Tokamak

A fusão termonuclear controlada tem sido idealizada por meio do estudo de plasmas quentes em reatores de confinamento magnético, e.g. tokamaks, que tem por característica sua geometria toroidal.

Já o plasma é formado por íons e elétrons dissociados em um estado de quaseneutralidade, onde as interações eletrostáticas de longo alcance geram movimentos coletivos das partículas carregadas, como ondas. Essas ondas, associadas com gradientes presentes no plasma, acabam transportando partículas para fora deste através de processos turbulentos.

O plasma no Tokamak

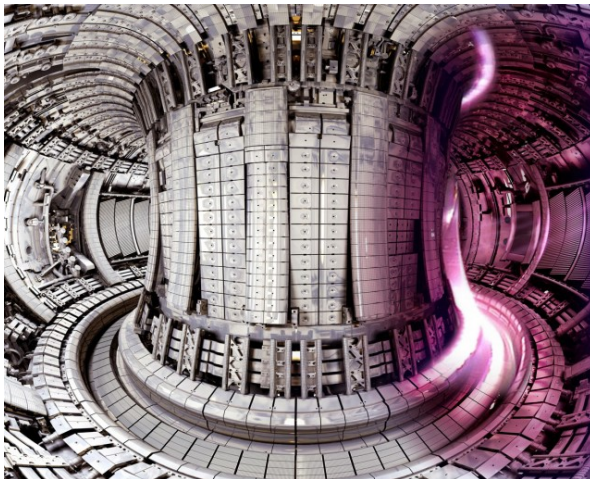


Figura 17: Joint European Torus.

O plasma no Tokamak

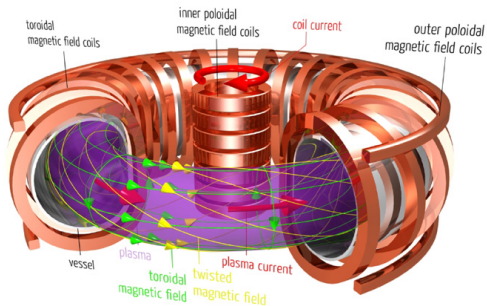


Figura 18: Esquema de um Tokamak.

O plasma no Tokamak

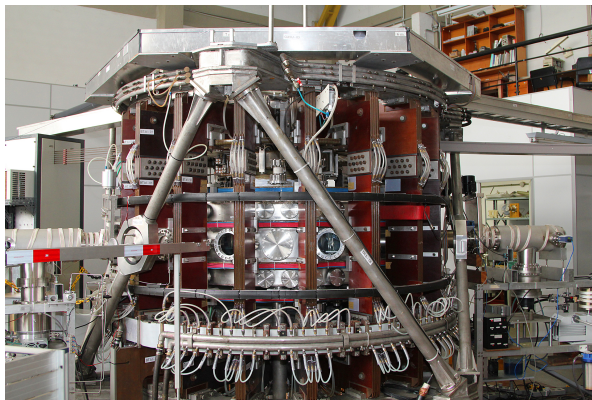


Figura 19: TCABR.

Bursts

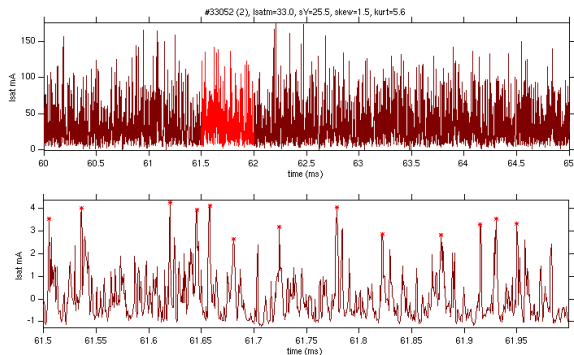


Figura 20: Corrente de Saturação de íons na borda do TCABR .

Bursts

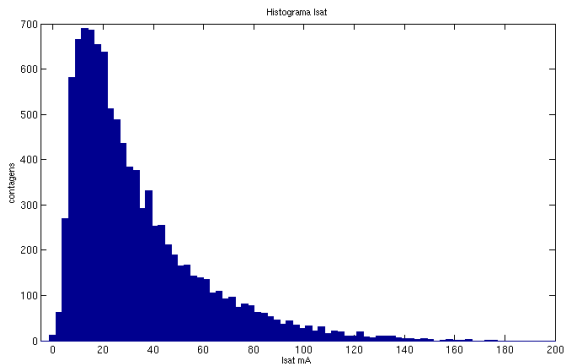


Figura 21: Histograma da corrente de saturação.

Bursts

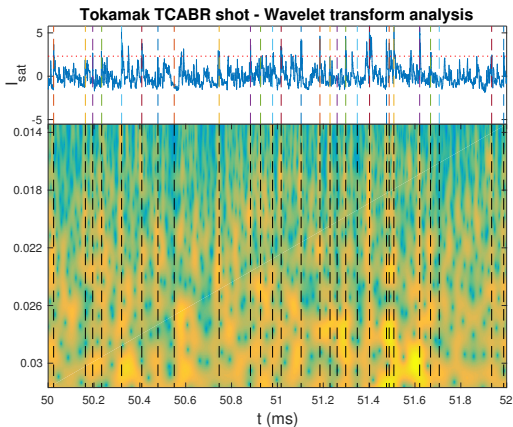







Figura 22: Detecção dos bursts por wavelet.

Sumário

- 1 O Modelo de Lorenz
- 2 Encontrando as Estruturas Intermitentes: A Transformada Wavelet
- 3 Estruturas Intermitentes em Física Experimental: A Turbulência em Plasmas
- 4 Referências

Referências

-  Gustavo Lima, Análise espectral por Wavelet da turbulência no Tokamak TCABR, 2005
-  C. Torrence & G. P. Compo, A practical guide to wavelet analysis, Bull. Am. Meteor. Soc., 79(1), 61–78, 1998
-  P. Manneville & Y. Pomeau, Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 1, Issue 2, June 1980, Pages 219-226
-  Radu Balescu, Aspects of Anomalous Transport in Plasmas, 2005
-  Nicholas J. Giordano, Computational Physics, 2ed., Pearson, 2005