

# Física Experimental IV

[www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex](http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex)

[www.fap.if.usp.br/~hbarbosa](http://www.fap.if.usp.br/~hbarbosa)

## Aula 4 – Computador Óptico Óptica de Fourier

Profa. Eloisa Szanto  
[eloisa@dfn.if.usp.br](mailto:eloisa@dfn.if.usp.br)

Ramal: 7111

Pelletron

Prof. Henrique Barbosa  
[hbarbosa@if.usp.br](mailto:hbarbosa@if.usp.br)

Ramal: 6647

Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin  
[nelson.carlin@dfn.if.usp.br](mailto:nelson.carlin@dfn.if.usp.br)

Ramal: 6820

Pelletron

Prof. Paulo Artaxo  
[artaxo@if.usp.br](mailto:artaxo@if.usp.br)

Ramal: 7016

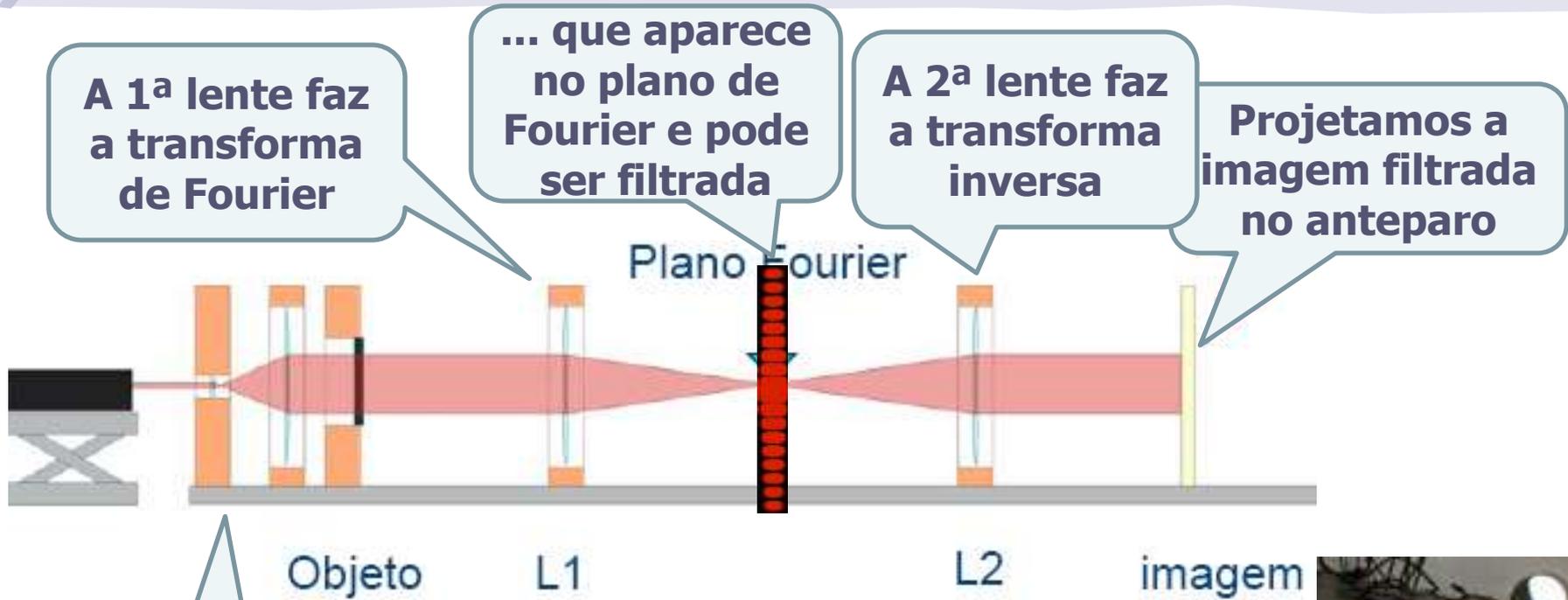
Basílio, sala 101

# Computador ótico

- **Computador ótico** é um dispositivo que permite a manipulação de imagem de maneira controlada sem a necessidade de efetuar cálculos complicados.
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório e vamos, nas próximas aulas, discutir como fazê-lo em detalhe.



# Como funciona?



o laser ilumina o objeto

**COMPUTADOR ÓTICO**



# Programação da Exp. 2

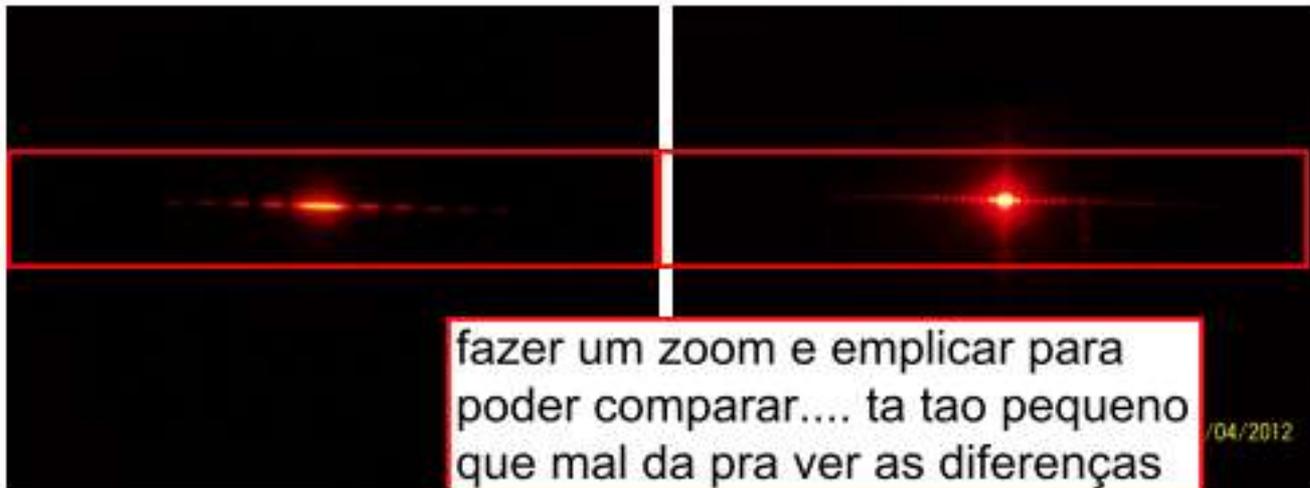
- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente
- Aula 2: laser
  - Associação de lentes e aumento do diâmetro do laser
- Aula 3: difração
  - Figuras de difração e espectrofotômetro
- Aula 4: transformada de fourier
  - Estudo no plano de fourier
- Aula 5: computador ótico
  - Filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 6: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador

# Parte 1 – Para a síntese

Usando o laser e o slide das figuras:

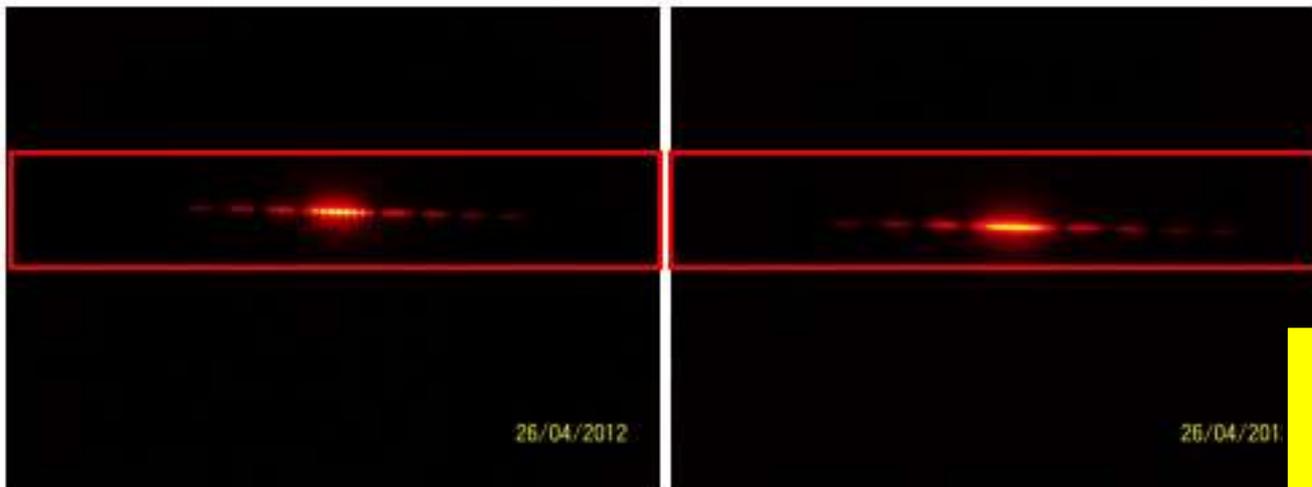
- Fotografe figuras de difração para os seguintes objetos:
  - fendas simples (pelo menos duas fendas)
  - fenda dupla (pelo menos duas fendas)
  - para os objetos diferentes da linha superior, escolha apenas um dos tamanhos
- Discuta os resultados obtidos.
  - Para as fendas simples e duplas tente relacionar as figuras observadas com as dimensões dos objetos.
  - Tente identificar a forma geométrica dos objetos na linha superior do slide de fendas a partir das figuras de difração observadas. Discuta.

# Difração Qualitativa



(a) fenda simples 3

(b) fenda simples 5

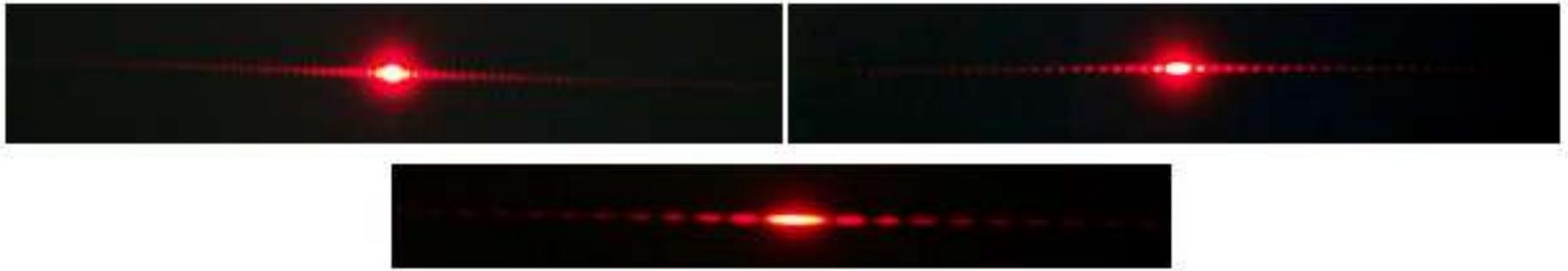


(c) fenda dupla menor 1

(d) fenda dupla menor 2

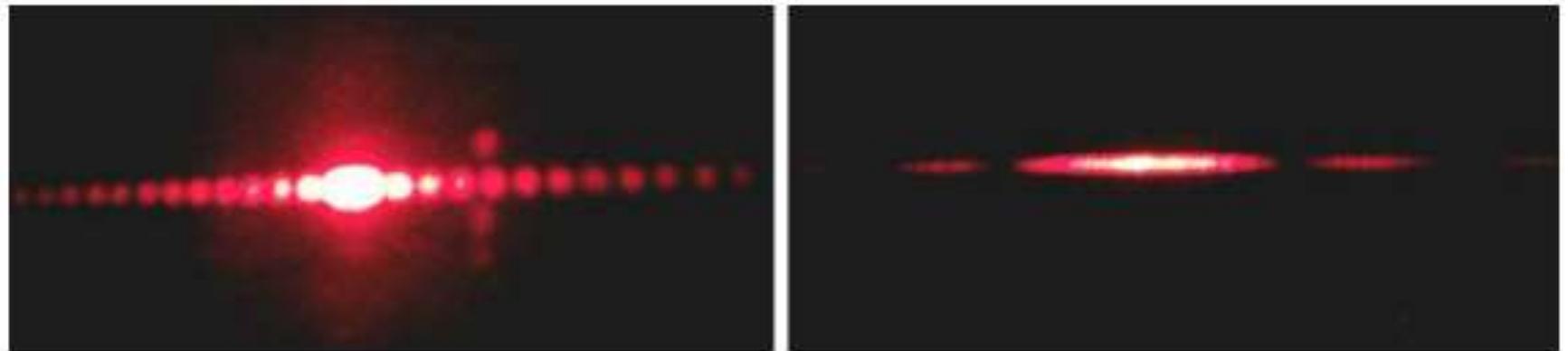
Quanto menor a fenda,  
mais espalhada a difração.

# Interpretação invertida...



**Figura 4:** Fotos das imagens de difração para fenda simples pequena, média e grande, respectivamente.

Quanto maior a fenda, mais espalhada a difração !?!



**Figura 5:** figura de difração para duas fendas simples distintas, a primeira com abertura menor que a segunda.

# Fenda Simples: **Intensidade**

- A intensidade para o caso da fenda simples também apresenta mínimos:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

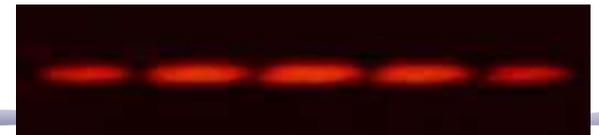
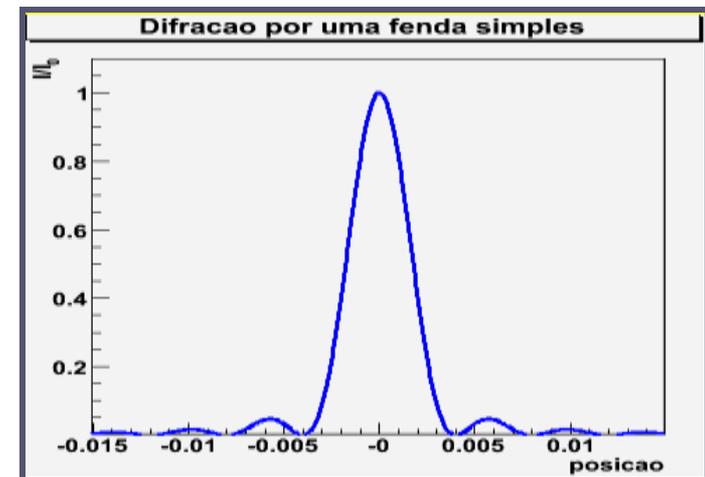
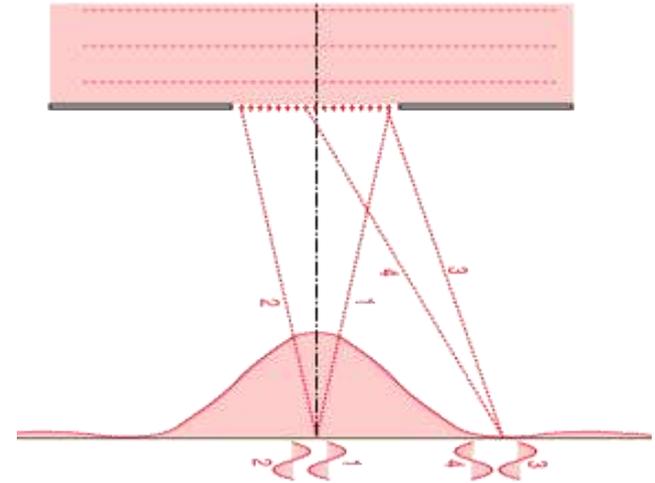
- Que ocorrem quando:  
 $\sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = \pm m\pi, m = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Ou seja:

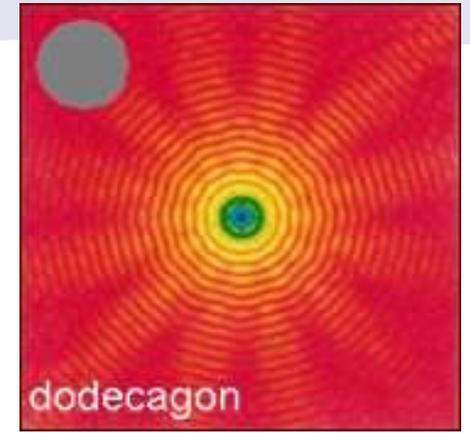
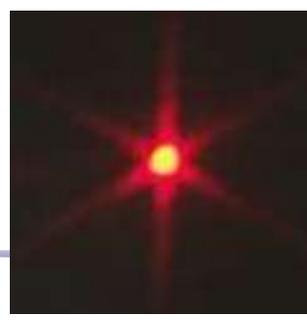
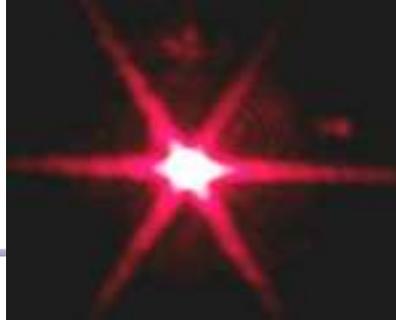
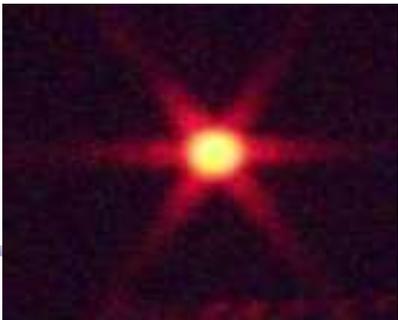
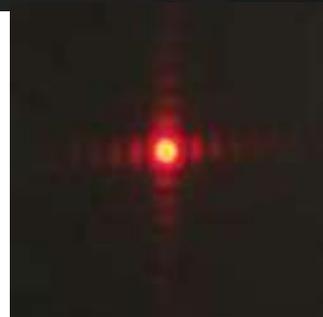
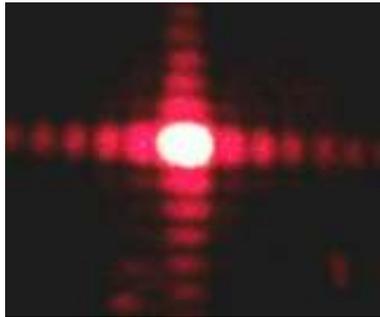
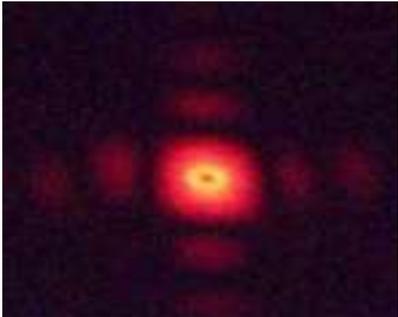
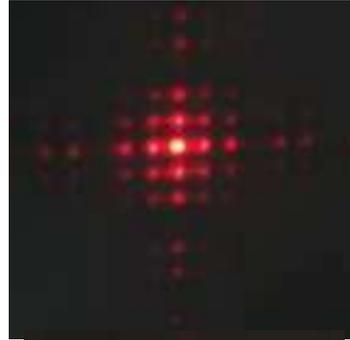
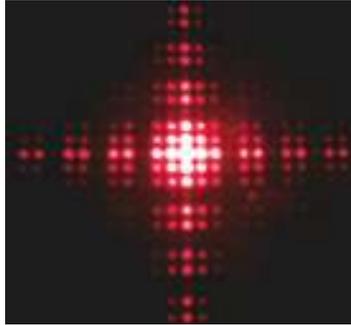
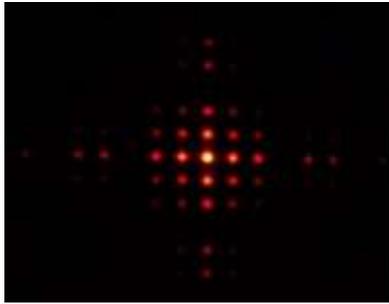
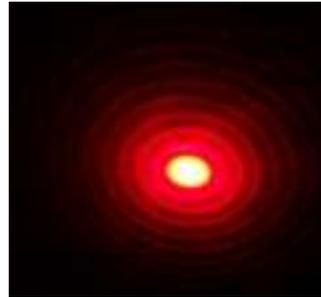
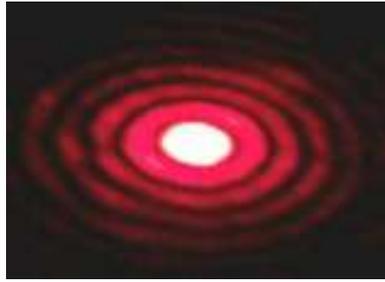
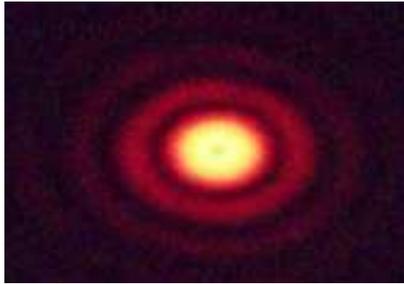
$$d \sin \theta = \pm m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots$$

- Para  $m=0$  temos um máximo pois:

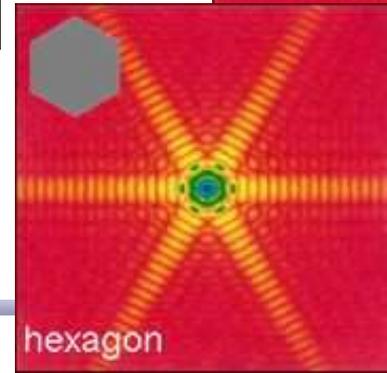
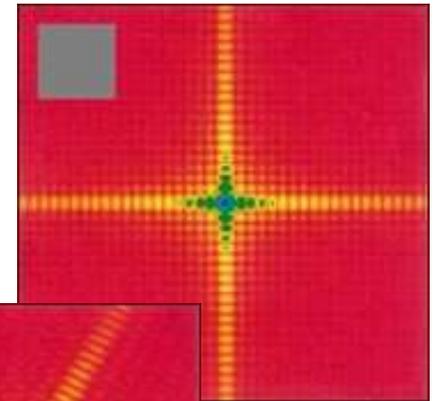
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



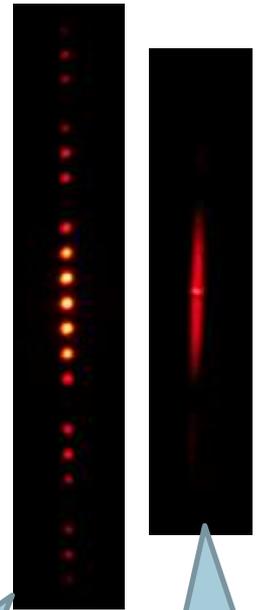
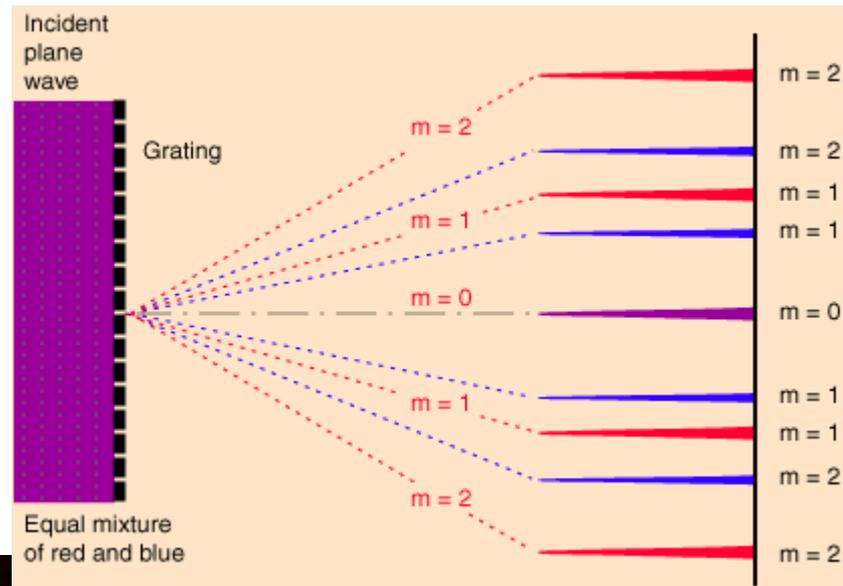
# Outras figuras



Rede de difração

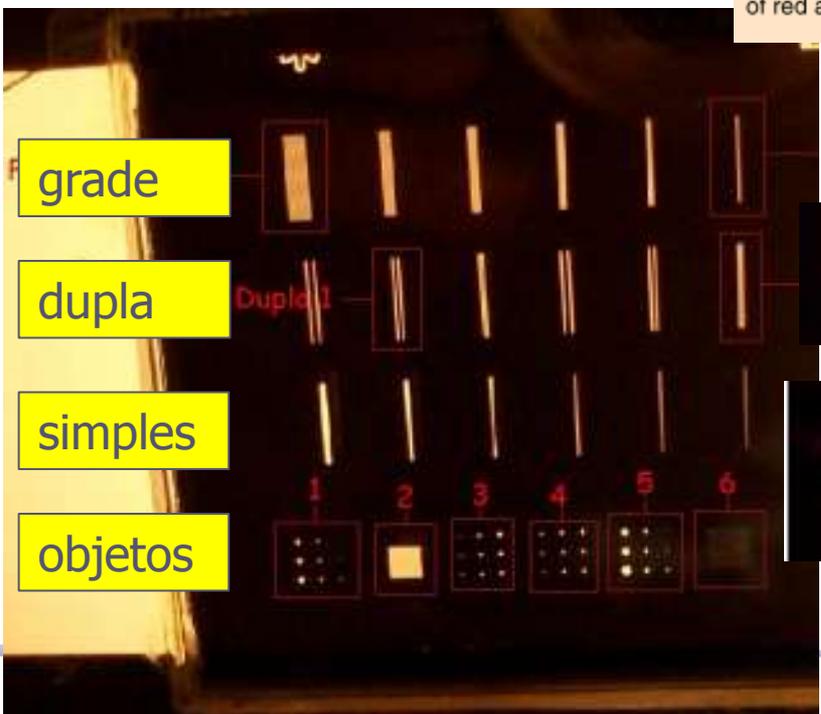


# Confusão entre Fenda e Grade



grade

fenda



# Parte 2 – Para a síntese

- Estudar a difração e interferência da Fenda simples:
  - Medir as intensidades da figura de difração da fenda simples com o espectrofotômetro.
    - Com  $\text{ganho}=1$  dá pra medir todos os picos, mas os secundários ficam muito pequenos. Com  $\text{ganho}=10$  satura o máximo central mas os outros ficam mais visíveis.
    - Qual é melhor usar? Dá para juntar as duas medidas ??
  - Da distância entre os mínimos nesse espectro obtenha a largura da fenda e compare com o valor nominal.
  - Usando esta largura de fenda e normalizando pelo máximo, sobreponha a curva esperada à experimental

# Largura da fenda a partir dos mínimos

A partir de um gráfico de  $\sin(\theta) \times m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) e utilizando a EQ. 1, pôde-se determinar a largura da fenda.

$$m\lambda = \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{d} = m\alpha \quad (1)$$

Assim, pela FIG. 6, e utilizando um valor de

$\lambda = 623.8nm$  foi obtido um valor de fenda  $d = 0.03968(33)mm$ , um valor compatível com o nominal por  $0.157\sigma$ .

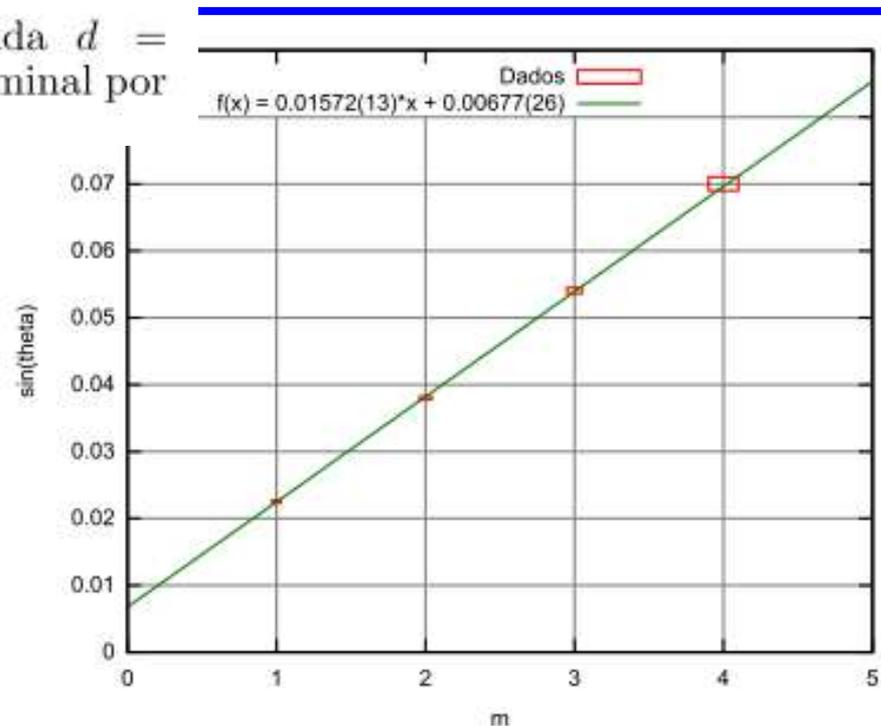
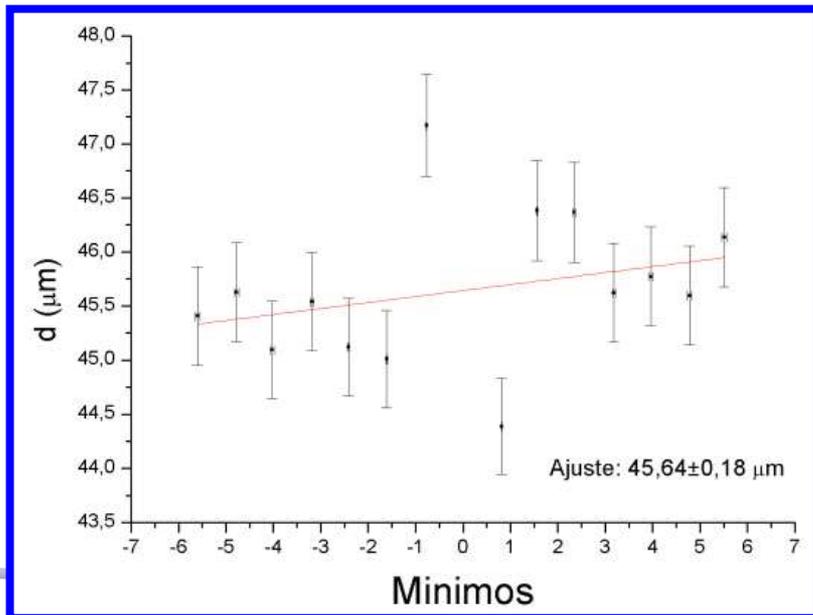
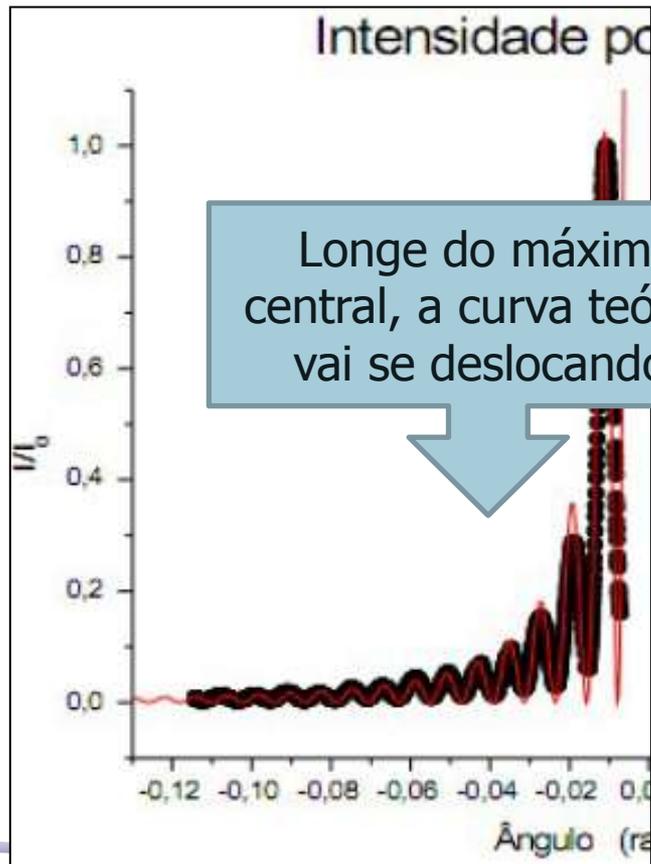


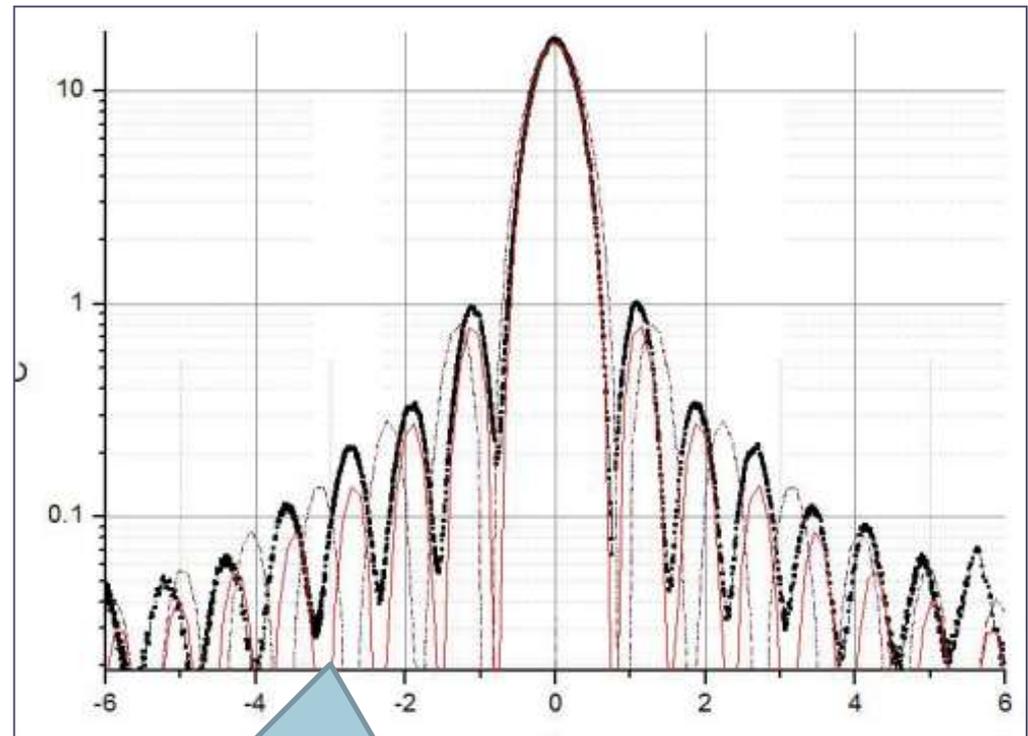
FIG. 6.— Gráfico de  $\sin(\theta)$  para cada  $m$ .

# Este Ajuste Está Bom ?

Pelo gráfico 1, observa-se que o ajuste não representa muito bem a função logo após o primeiro mínimo a partir do centro. Já a função teórica ficou igualmente ruim, pois mesmo no pico central, o lado direito da função não concorda com os pontos experimentais.



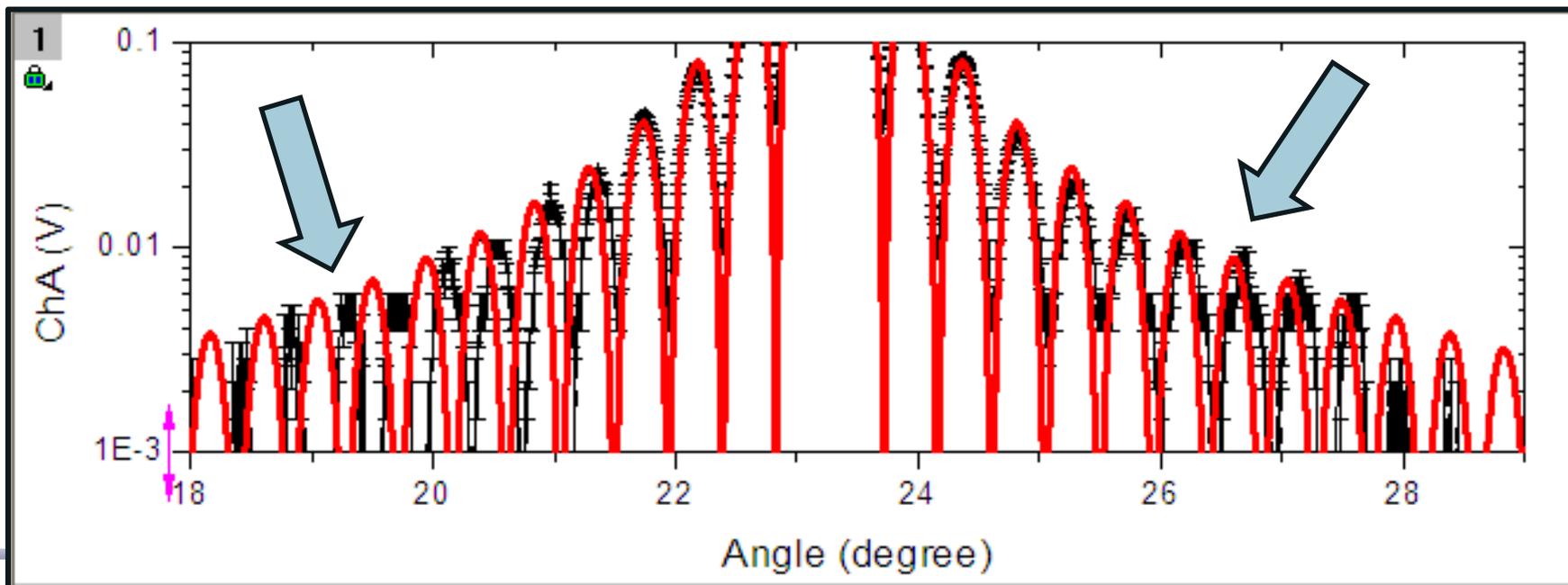
Longe do máximo central, a curva teórica vai se deslocando.



Os máximos parecem ser bem ajustados, mas a curva teórica se anula nos mínimos, o que não acontece com os dados!

# Alinhamento

- Há o problema de alinhar o slide com o laser. Se o ângulo não for  $90^\circ$ , a figura de difração vai ficar mais apertada de uma lado e mais solta do outro lado.



# Um grupo fez a correção

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{d\pi}{\lambda} \sin \theta \quad \boxed{\text{ok}} \quad (1)$$

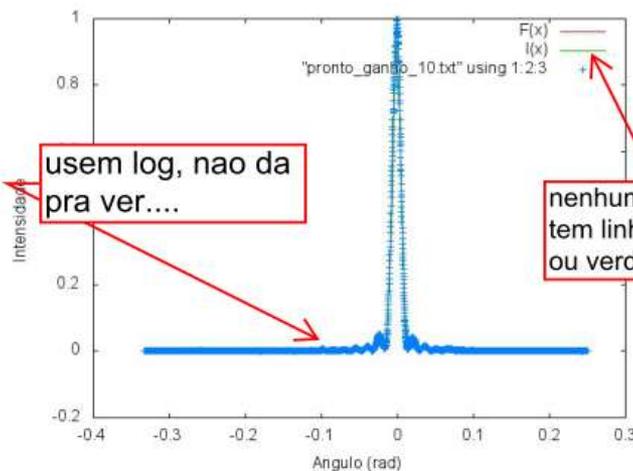
em que  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe de luz incidente,  $d$  a largura da fenda, e  $\theta$  o ângulo de leitura, em radianos. O ajuste de (1) à série de dados foi feito, na Figura 3.a, e mostrou  $\chi_{red}^2 = 6,00(3) \cdot 10^{-3}$ , portanto é incompatível. Ora, visualmente, ampliando os gráficos obtidos, é possível ver que eles não são simétricos em relação ao máximo central; de fato, os picos à direita do centro são mais baixos do que à esquerda. **nao da pra ver isso dos graficos...**

Isso se deve ao fato de que a fenda não estava totalmente alinhada com direção de incidência da luz em **razão de um defeito do equipamento**; levando em consideração que a luz incide com um ângulo  $\varphi$  sobre o plano da fenda, obtemos a seguinte relação:

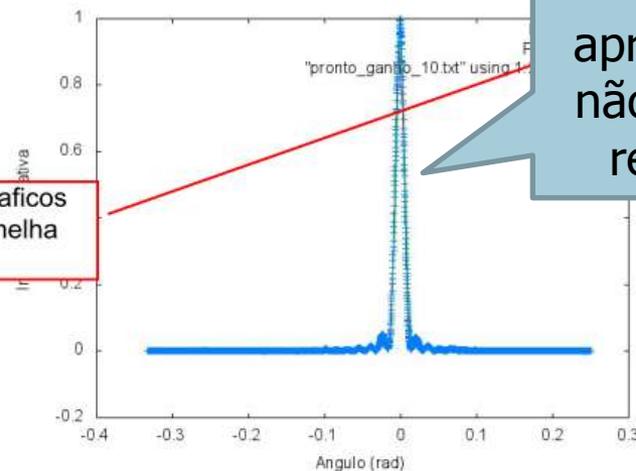
**defeito do alinhamento de vocês... o suporte devia ser alinhado e fixado pelo parafuso em baixo do prato.**

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{d\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \varphi) \quad (2)$$

Prosseguimos então com o ajuste de (2), na Figura 3.b, e obtivemos  $\chi_{red}^2 = 0,96(3)$ , portanto o ajuste é compatível. Também obtivemos o ângulo  $\varphi$ , que em graus vale **3,400(12)°**.



(a) sem correção

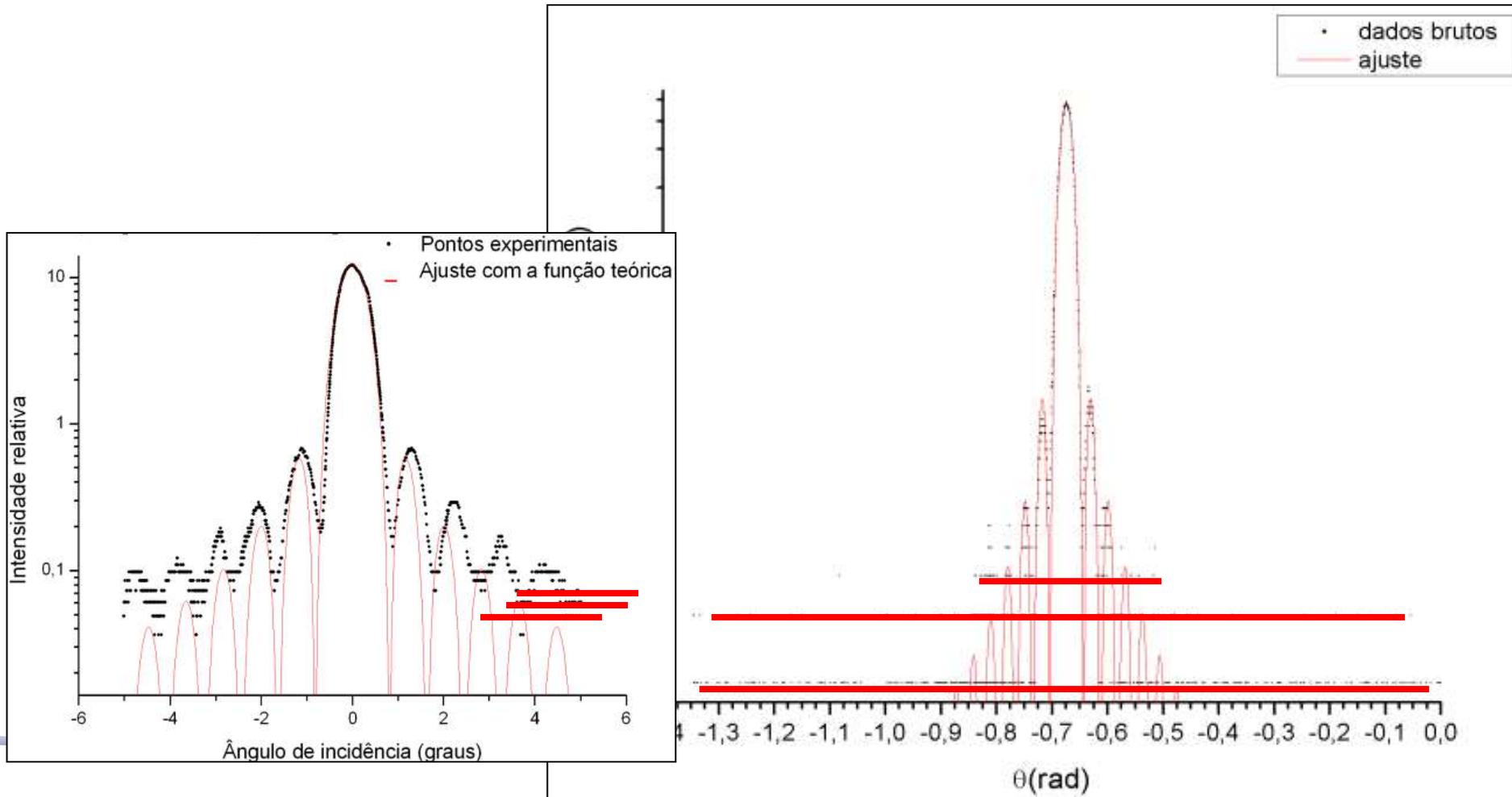


(b) com correção

Mas a apresentação não mostra o resultado!

# Outro problema

- Resolução do DataStudio: era preciso combinar 1x, 10x e 100x



# Largura da Fenda

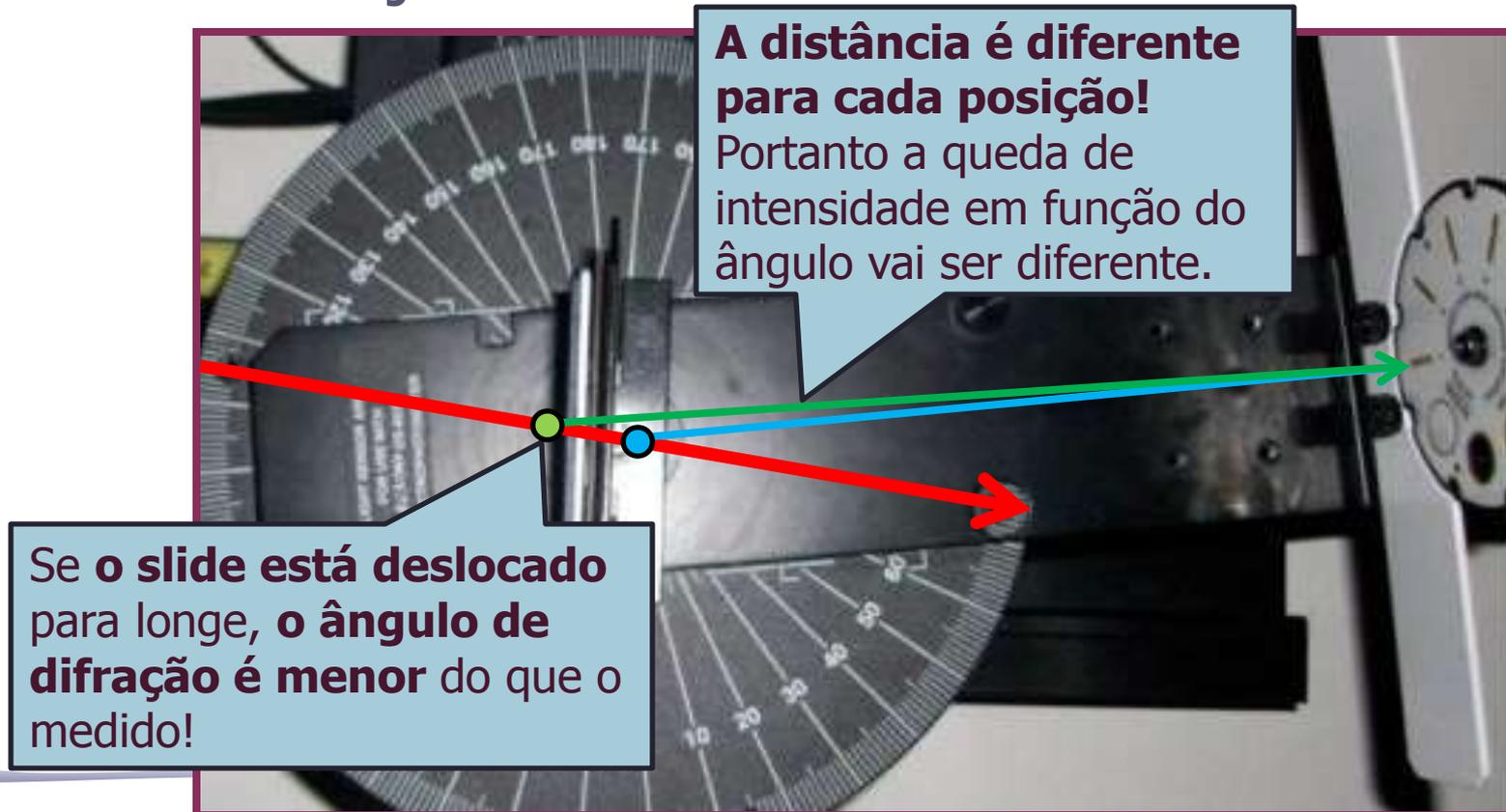
	$\lambda$ (nm)	Largura fenda ( $\mu\text{m}$ )	Correção
<b>H02</b>	<b>623.8</b>	<b>39.68 (33)</b>	<b>Largura da fenda</b>
<b>H03</b>	<b>633</b>	<b>43.00 (4)</b>	<b>Inclinação do slide</b>
H04	632.8	47.160 (28)	apenas ajuste
H05	?	42 (3)	apenas ajuste
H06	632.8	47.7 (12)	apenas ajuste
H07	?	45.64 (18)	apenas ajuste
H08	?	?	?
H09	628	43.98 (5)	apenas ajuste

# Parte 3 – Extra (semana que vem)

- Faça o ajuste não linear da função teórica aos dados experimentais do espectro da fenda simples
- Como se compara o ajuste e a função teórica?
  - Descreva as discrepâncias se houver
    - Os máximos são bem representados? E os mínimos?? Porque???
  - Como você pode explicar essas diferenças?
- Que parâmetros não foram levados em conta e que podem explicar as diferenças?
  - Encontre uma função teórica mais apropriada, justifique, refaça o cálculo e compare novamente.

# A posição do slide

- Um dos problemas é que o slide não está colocado bem no centro do prato. Neste caso, o ângulo medido não corresponde ao ângulo da difração!



# A posição do slide

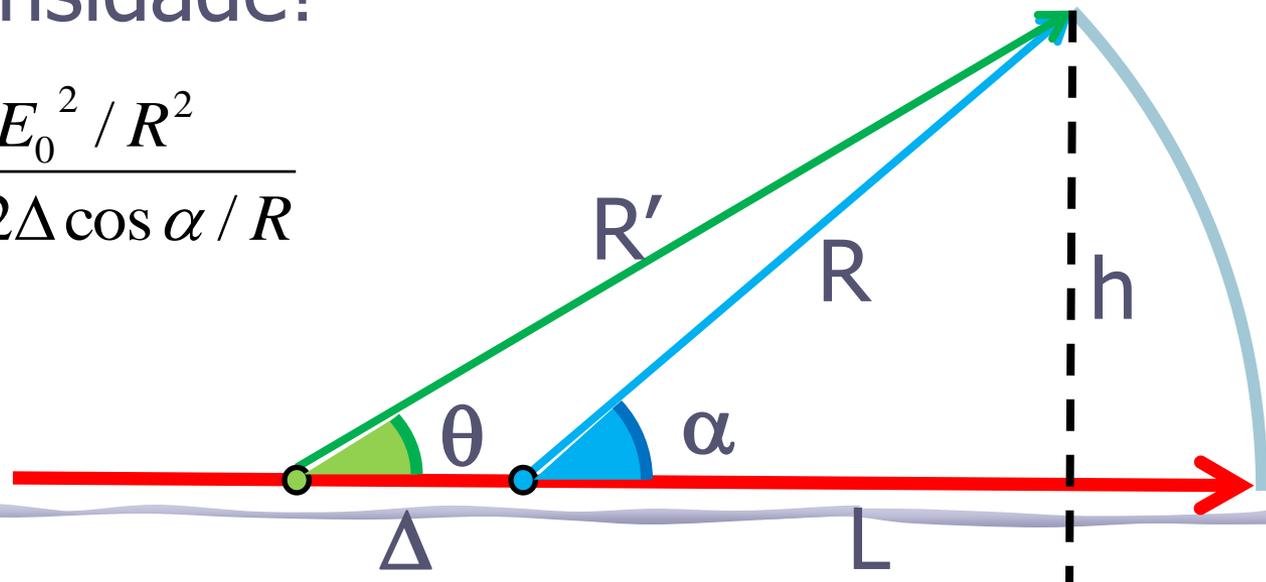
- A difração é dada por:  $I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ ,  $\beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$

- Mas o ângulo medido não é o da difração!

$$\begin{cases} R \sin \alpha = h \\ R \cos \alpha = L + \Delta \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha + \Delta}$$

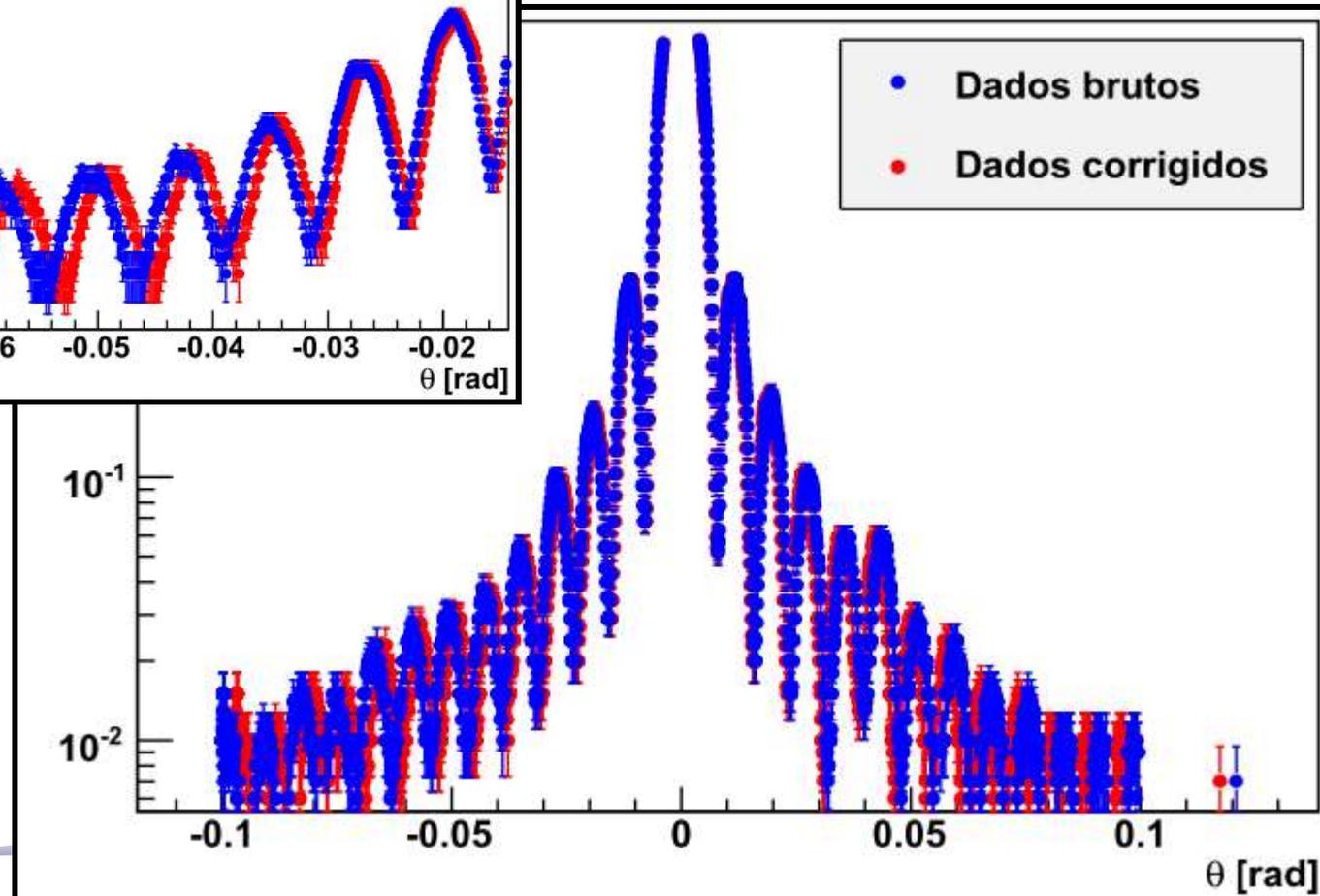
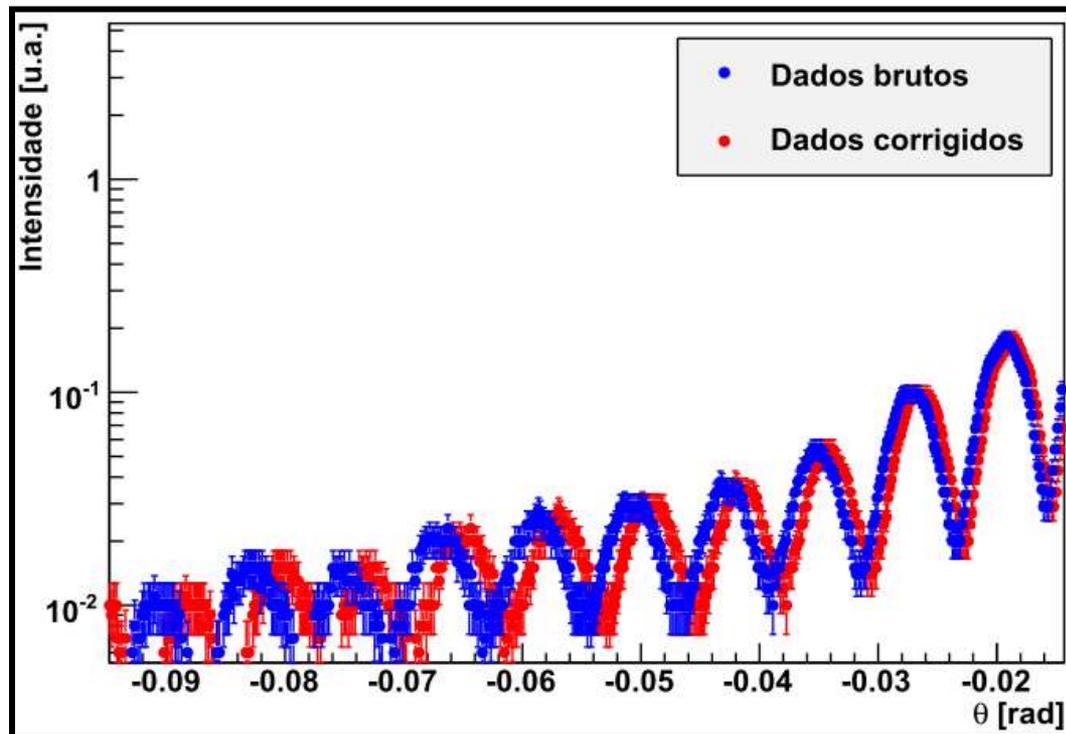
- E nem a intensidade!

$$I_{med} = \frac{E_0^2}{R'^2} \approx \frac{E_0^2 / R^2}{1 + 2\Delta \cos \alpha / R}$$



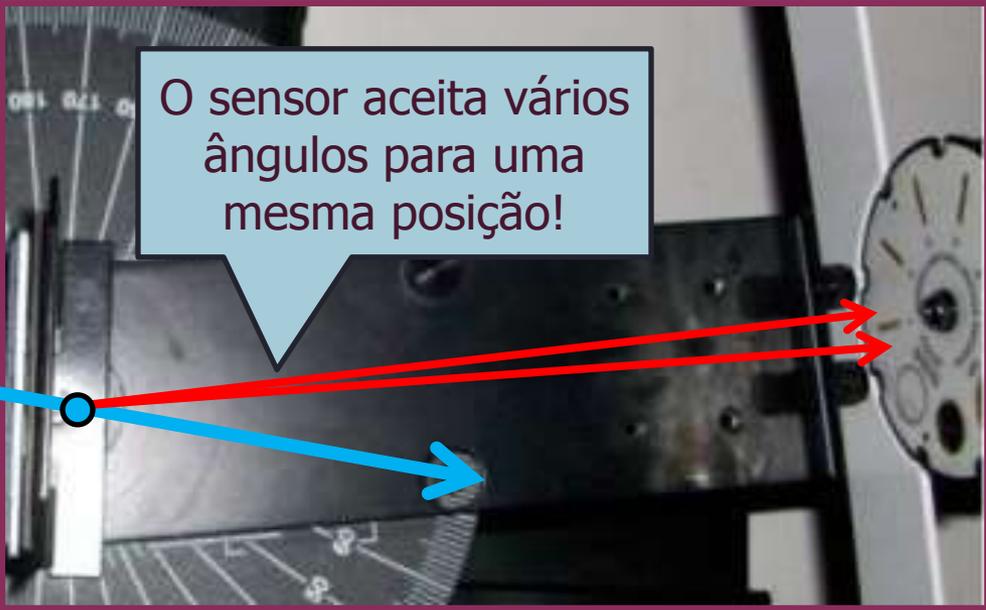
# Corrigindo a Posição do Slide

A correção é pequena e mais importante para grandes ângulos.



# Abertura do Sensor de Luz

- Um outro problema é que o sensor de luz tem uma abertura angular finita. Usamos a fenda mais estreita mas ainda assim estamos integrando sobre uma pequena abertura.



O sensor aceita vários ângulos para uma mesma posição!

A close-up photograph of a light sensor assembly. A blue dot is placed on a vertical white strip on the left. Two red arrows originate from this dot and point towards a circular sensor component on the right. A blue arrow also originates from the dot and points downwards and to the right. The background shows a metal plate with a ruler scale.

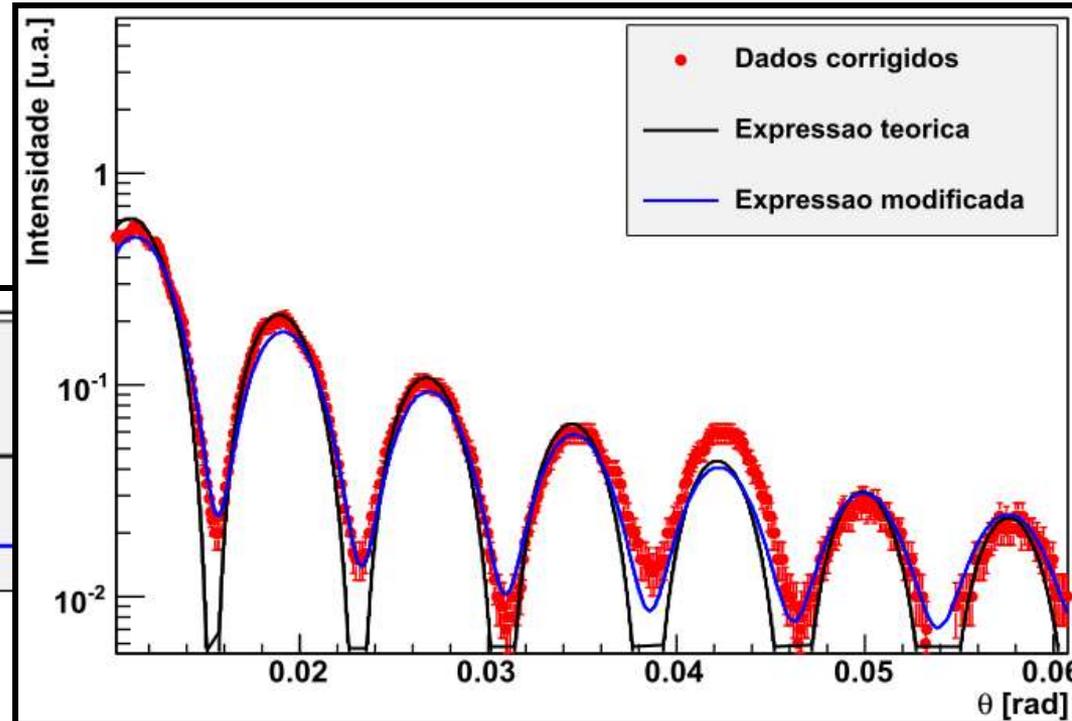
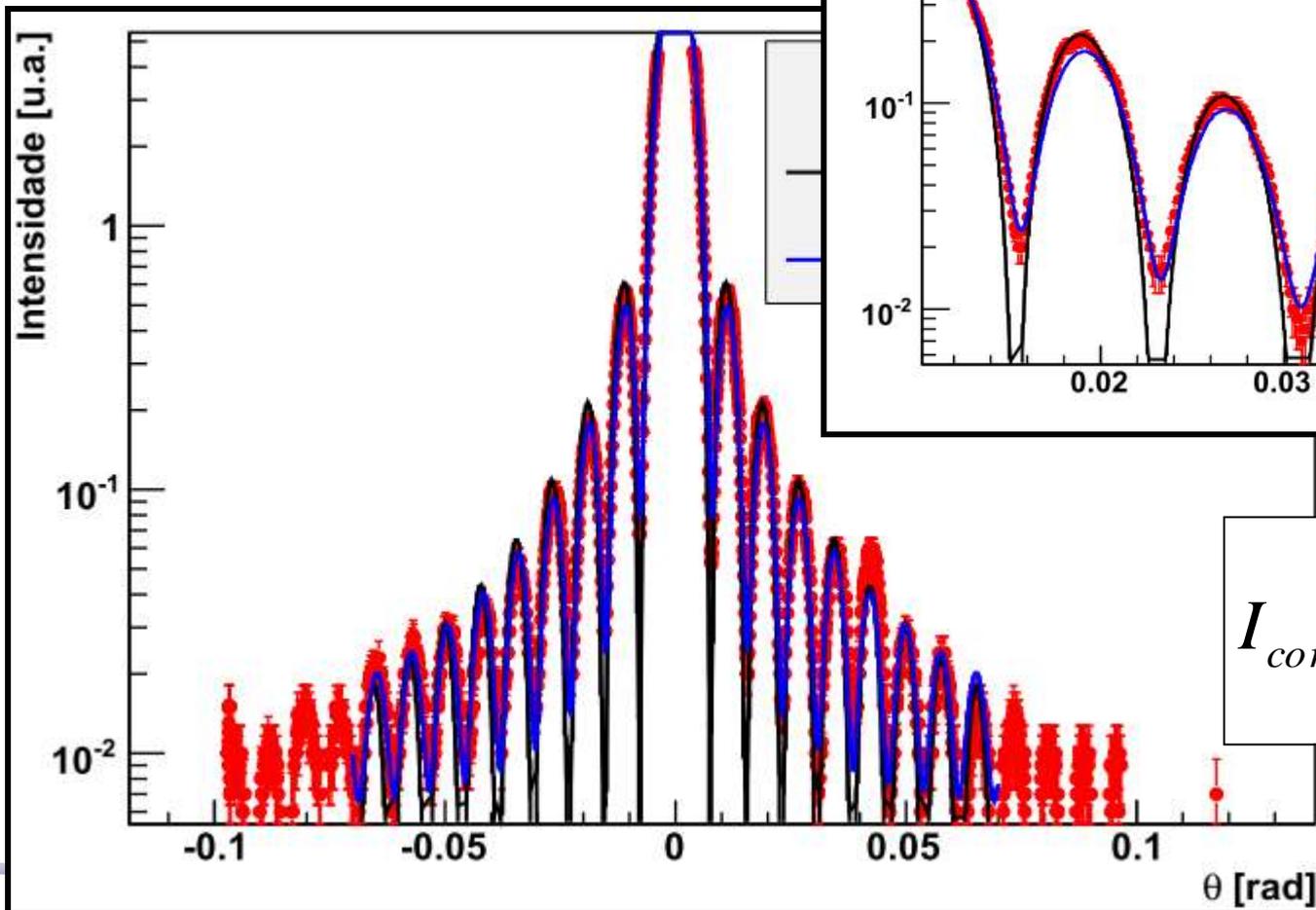


Mesmo a fenda estreita tem uma abertura diferente de zero!

A close-up photograph of a circular sensor component. The component is white with several gold-colored pins and black screws. A blue callout box with a white border is overlaid on the image, containing the text. The component is mounted on a black frame.

# Corrigindo a Abertura do Sensor

Como o sensor tem uma abertura não pontual, a intensidade nunca é zero.



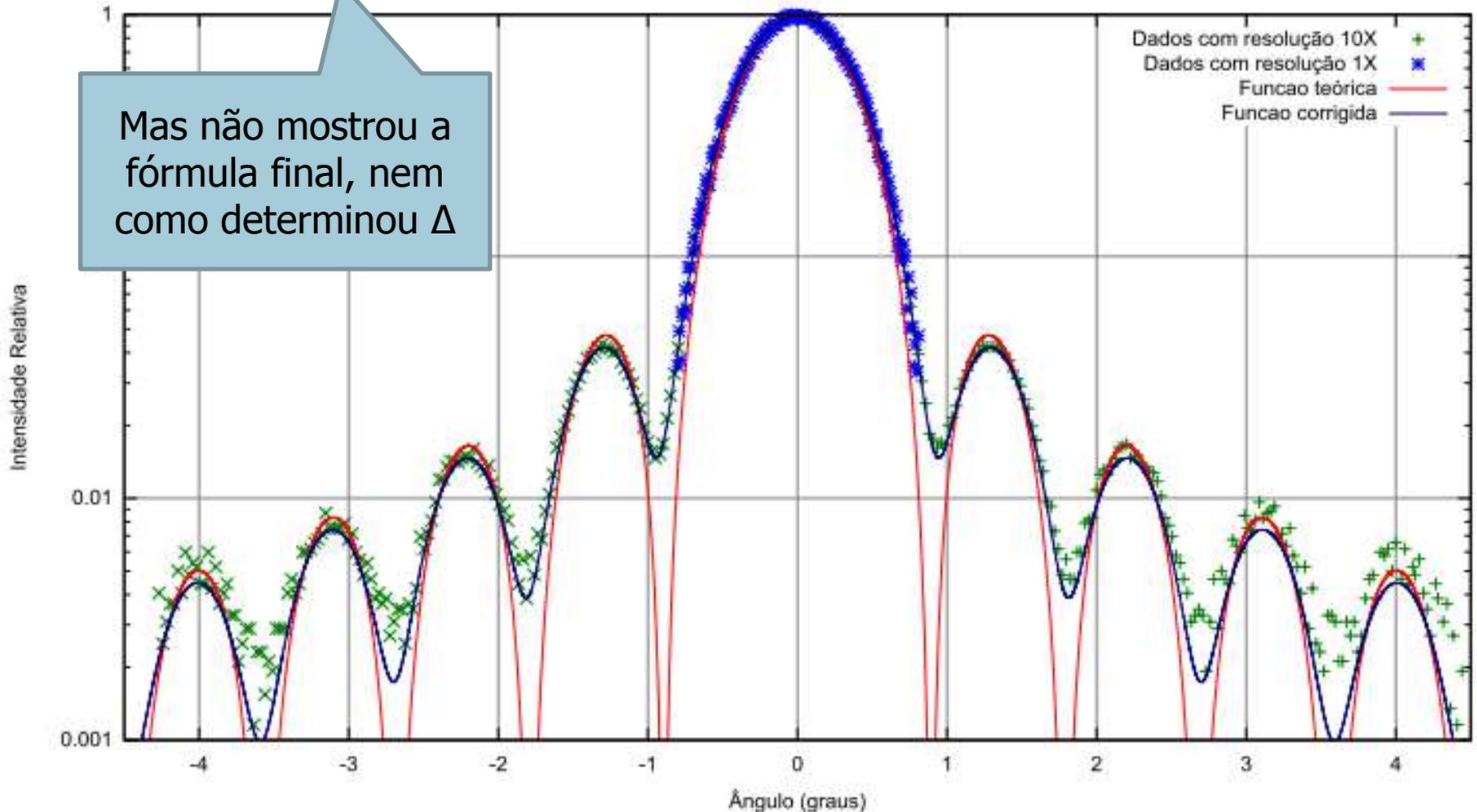
$$I_{corr}(\theta) = \int_{\theta-\Delta}^{\theta+\Delta} I(\theta') d\theta'$$

# Um dos grupos fez....

Síntese 03 – Experiência 02

$$I_{\text{corrigida}}(\theta) = \int_{\theta-\Delta}^{\theta+\Delta} I(\theta) d\theta$$

Intensidade de Incidência X ângulo



# Programação da Exp. 2

- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente
- Aula 2: laser
  - Associação de lentes e aumento do diâmetro do laser
- Aula 3: difração
  - Figuras de difração e espectrofotômetro
- Aula 4: transformada de fourier
  - Estudo no plano de fourier
- Aula 5: computador ótico
  - Filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 6: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador



# Computador Óptico

Essência: Transformada de Fourier 2D

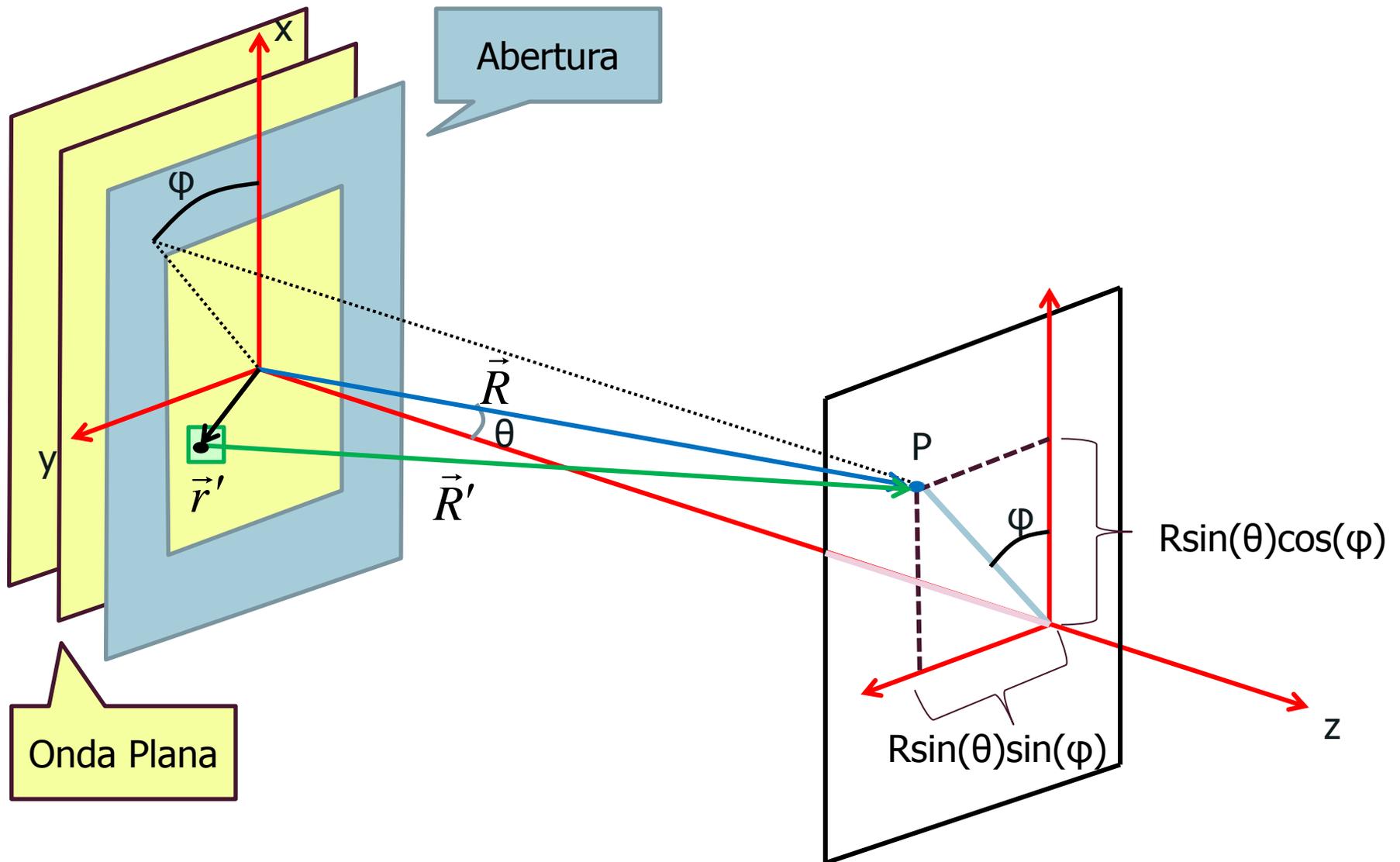
# Computador Ótico



# Construção ...

- Primeiramente precisamos iluminar o objeto de forma uniforme
  - Qualquer luz esta ok?
- Precisamos ser capazes de, experimentalmente, obter a transformada de Fourier deste objeto
- Precisamos criar filtros que atuem de forma diferente em cada componente da T.F.
- Precisamos reconstruir a imagem a partir das componentes já filtradas

# Generalizando a difração



# Generalizando a difração

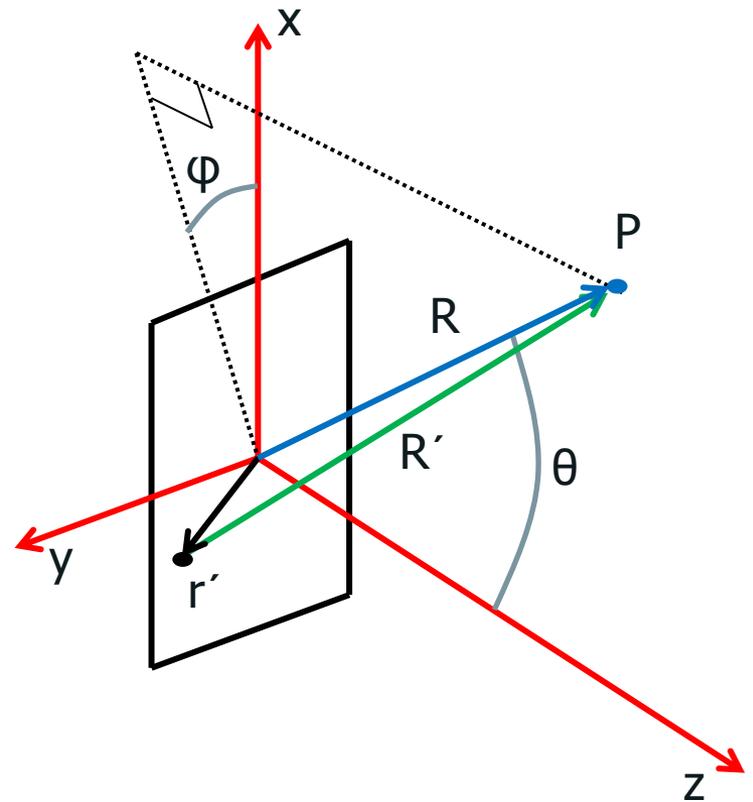
- Campo elétrico incidente no objeto

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$

- Por simplicidade:

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

- Qual o campo elétrico no ponto R?



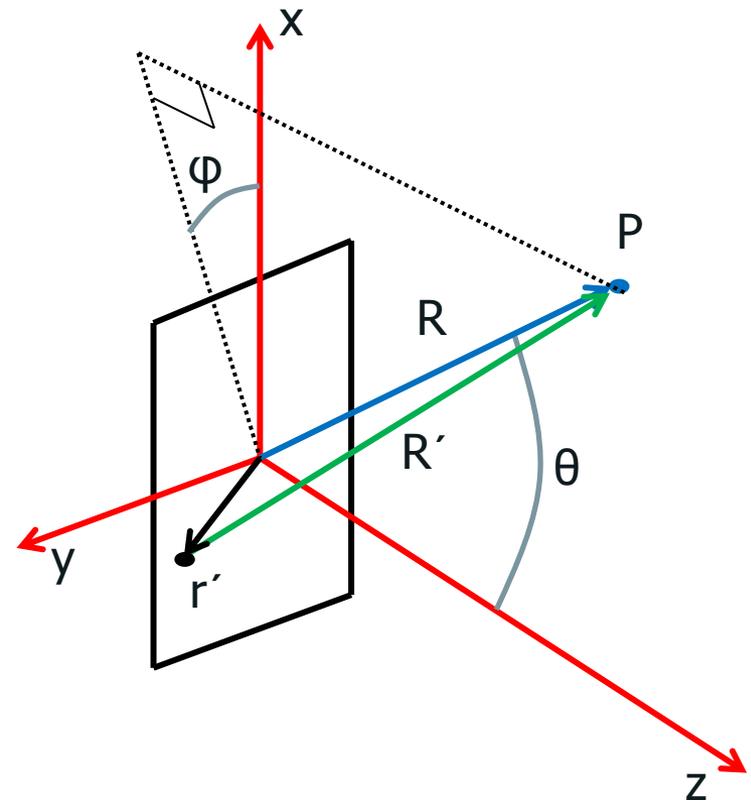
# Generalizando a difração

- Na posição  $R$ , o campo devido ao ponto em  $r'$  vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'}$$

- E o campo total fica:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int_{abertura} \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k} \cdot \vec{R}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

- Para grandes distâncias, i.e. limite de Fraunhofer, temos:

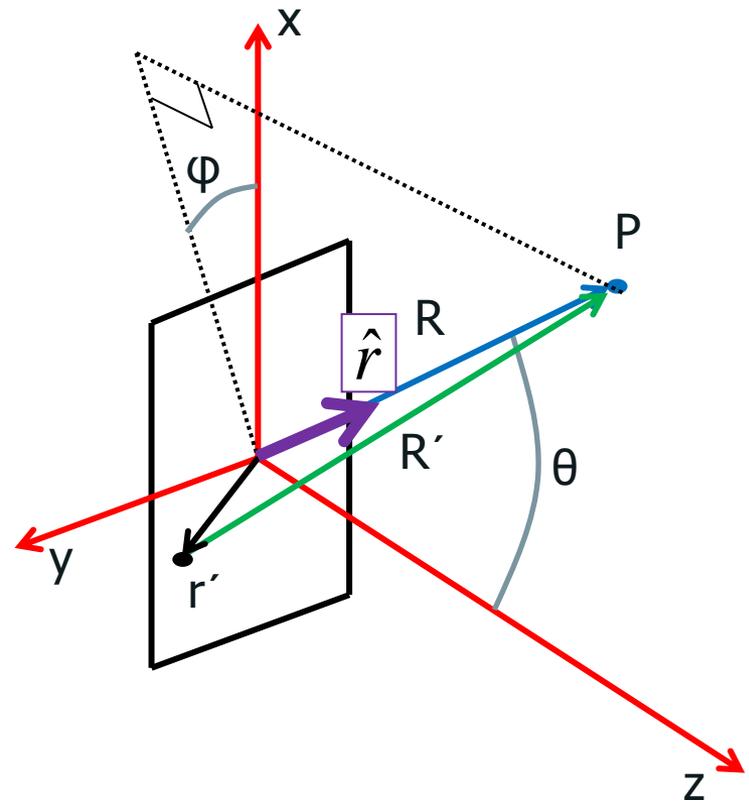
$$\vec{k} \approx k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}' = R\hat{r} - \vec{r}'$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{jkR - \vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



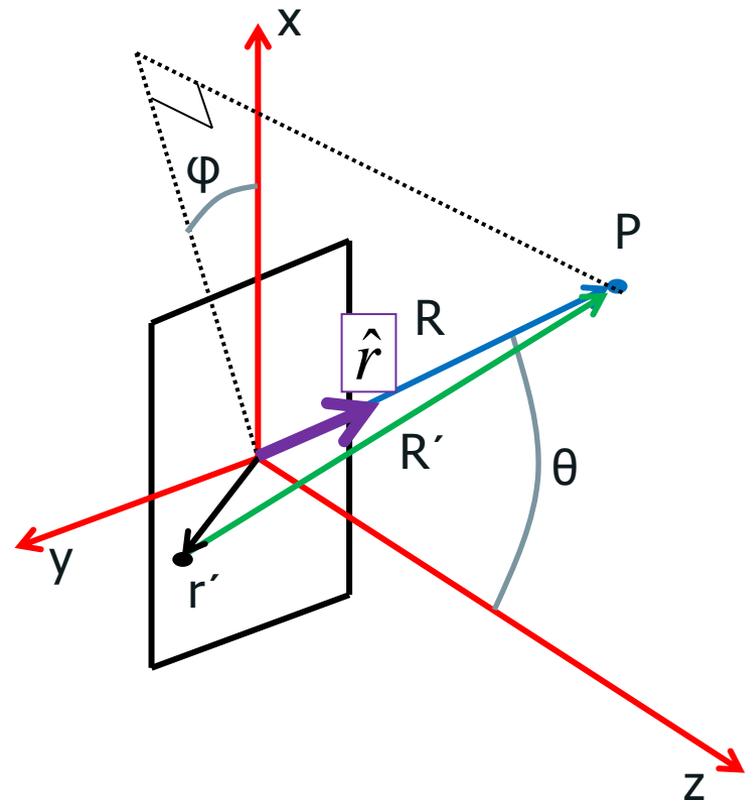
# Generalizando a difração

- Ainda para grandes distâncias, temos:

$$R' \approx R$$

- Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$



# Generalizando a difração

- Quem é  $\vec{k} \cdot \vec{r}'$  ?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

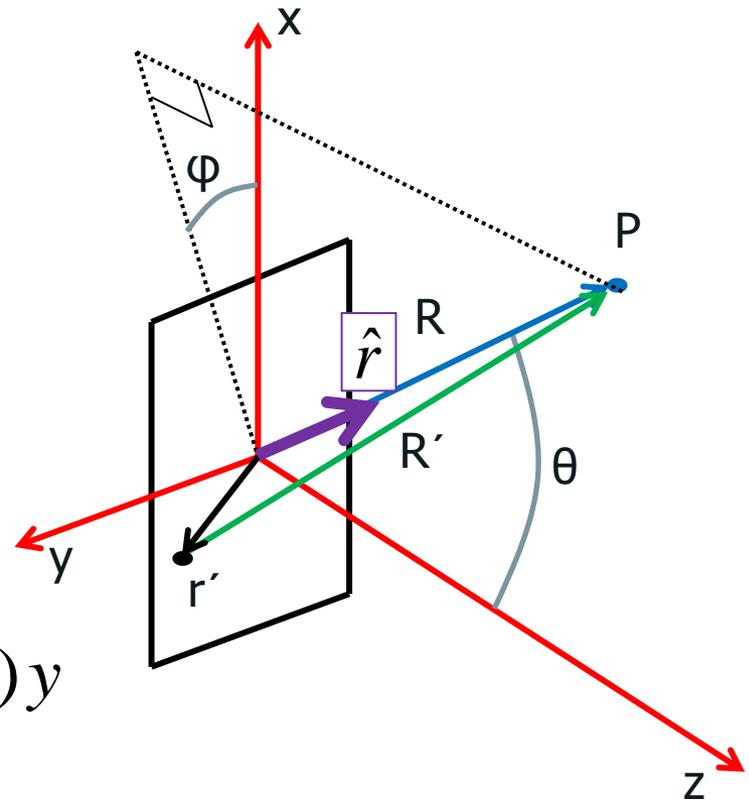
$$\vec{k} = k\hat{r} = (k \sin \theta \cos \varphi)\hat{x} + (k \sin \theta \sin \varphi)\hat{y} + (k \cos \theta)\hat{z}$$

- Assim:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = (k \sin \theta \cos \varphi)x + (k \sin \theta \sin \varphi)y$$

- Podemos ainda definir:

$$\begin{cases} k_x = (k \sin \theta \cos \varphi) \\ k_y = (k \sin \theta \sin \varphi) \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = k_x x + k_y y$$



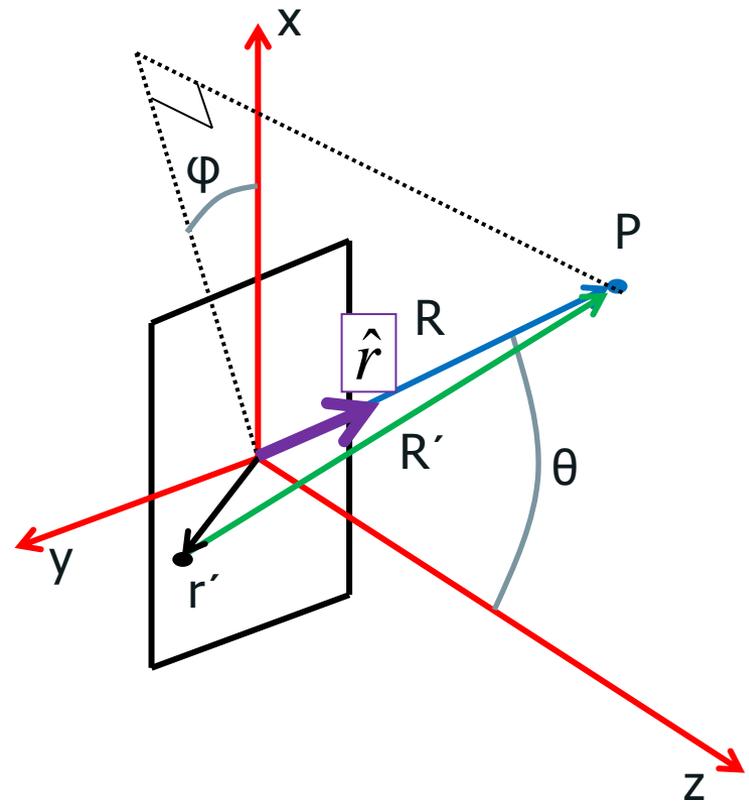
# Generalizando a difração

- A expressão para o campo era assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}'} dx dy$$

- E agora pode ser escrita como:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$



# Séries de Fourier

- A transformada de fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dx dy$$

- Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

# Difração e transformada de Fourier

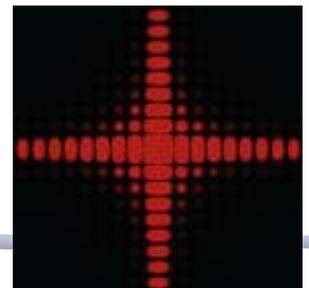
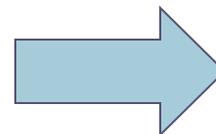
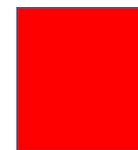
- A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

- A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada frequência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_x, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$



# Generalizando ainda mais

- Para uma onda plana incidente:
  - $E_0(x,y)$  é constante.
- Uma onda qualquer pode ser decomposta numa soma de ondas planas.
  - Então já consideramos todos os casos?
- Não! E se a abertura **não** for uma fenda? E se houver uma **lente** ou um **objeto opaco** que modifiquem **a amplitude** ou **a fase** de  $E(x,y)$  em cada ponto?

# Generalizando ainda mais

- Se houver uma lente, o que interessa é o campo transformado por ela, ou seja:

$$E_0(x, y) \xRightarrow{\text{LENTE}} \varepsilon(x, y)$$

A função da abertura é o campo incidente transformado pelo objeto/fenda/lente/etc onde ocorre a difração.

- A distribuição de campo elétrico na figura de difração de Fraunhofer é a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico na abertura.

$$\hat{E}(k_x, k_y) = \iint \varepsilon(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy$$

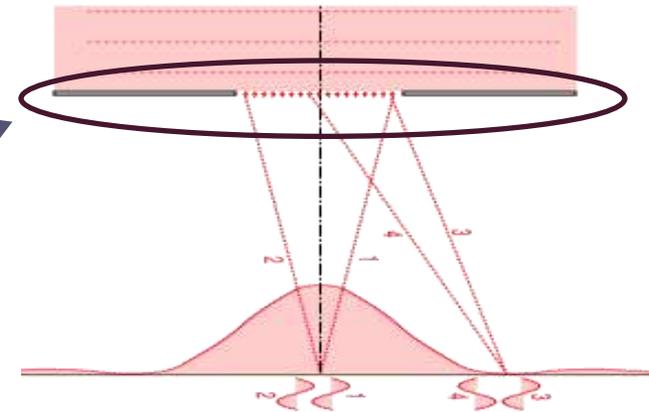
$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint E(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

# Exemplo: Fenda Simples

- Na fenda simples, temos apenas 1D

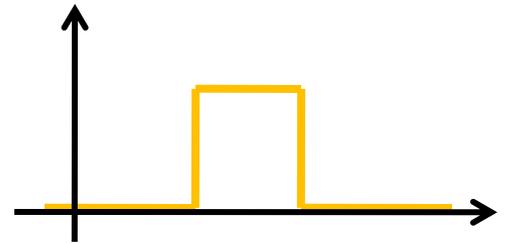
$$\hat{E}(k_x) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx$$

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int E(k) e^{jk_x x} dk$$



- A função da abertura é a onda quadrada!

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, & \text{se } |x| < \frac{d}{2} \\ 0, & \text{se } |x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$



# Exemplo: Fenda Simples

- Vamos fazer a integral da onda quadrada:

$$\hat{E}(k) = \int \varepsilon(x) e^{-jk_x x} dx = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_x x} dx = E_0 \left[ \frac{e^{-jk_x x}}{-jk_x} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

- Lembrando da notação complexa para o seno:

$$\hat{E}(k) = \frac{E_0}{k_x} \frac{(e^{+jk_x d/2} - e^{-jk_x d/2})}{j} = 2 \frac{E_0}{k_x} \sin(k_x d / 2)$$

- Multiplicando e dividindo por  $d$ , temos:

$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin(k_x d / 2)}{k_x d / 2}$$

# Exemplo: Fenda Simples

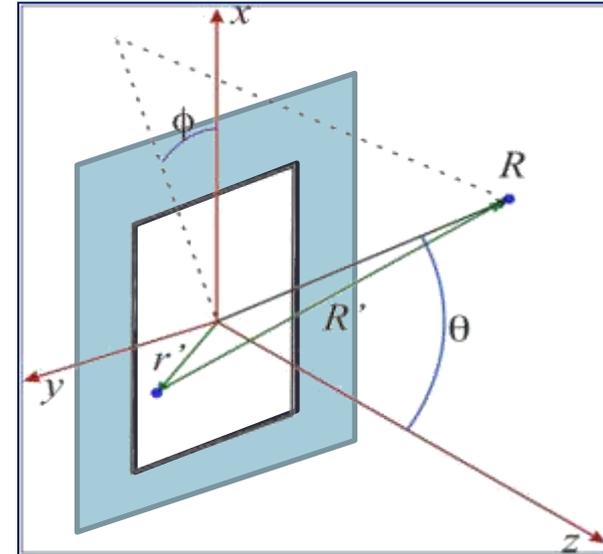
- O  $k_x$  é a projeção do vetor de onda em x:

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

- Como só temos 1 dimensão:

$$k_x = k \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)$$

- E o campo elétrico fica dado por:



$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad \beta = \frac{k_x d}{2} = \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$$

A intensidade depende da largura da fenda

$$\Rightarrow I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Exatamente o que tínhamos antes!

# Exemplo: T.F.

- Será que a posição e a intensidade dos máximos são o que esperamos?

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

- Para os máximos SECUNDÁRIOS,  $\sin(\beta) = \pm 1$

$$\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \pm(2m+1) \frac{\pi}{2}, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = \pm(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

- E as posições são:

$$\Rightarrow \sin \theta_{\max} = \pm \frac{\lambda}{2d}, \pm 3 \frac{\lambda}{2d}, \pm 5 \frac{\lambda}{2d}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

# Exemplo: T.F.

- A intensidade é:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- Portanto os máximos SECUNDÁRIOS ficam:

$$I(\theta_{\max}) = \frac{I_0}{\beta^2} = \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{4I_0}{\pi^2} = 1 \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{9} \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{25} \frac{4I_0}{\pi^2}, \dots$$

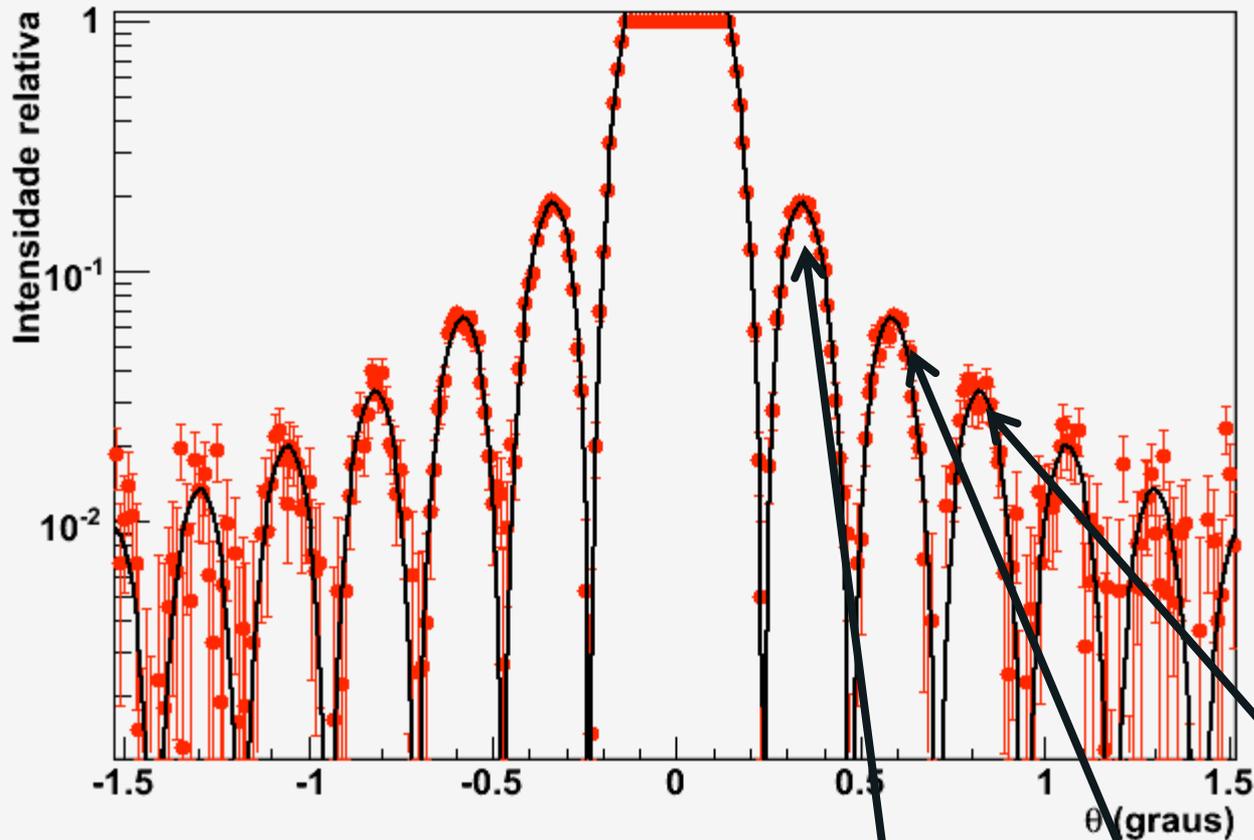
- Assim, o campo elétrico é:

$$|\hat{E}| = \sqrt{I} \Rightarrow \frac{|\hat{E}|}{\sqrt{\frac{4I_0}{\pi^2}}} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

# Exemplo: T.F.

Difracao de uma fenda simples



$$V(t) = V_0 \left[ \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

# Tarefas 1 – Para relatório

Com os dados da semana passada, do espectro de difração da fenda simples:

- Obtenha a razão entre as intensidades de cada máximo secundário e aquela do primeiro máximo secundário
  - Determine as posições e amplitudes
  - Compare com a previsão teórica.

The background is a complex digital environment. It features a central perspective view of a long, narrow corridor formed by glowing blue and purple lines that recede into the distance. The walls and floor of this corridor are composed of intricate patterns of light, resembling data paths or circuitry. On either side of the central path, there are vertical columns of glowing text and symbols, some appearing as if they are floating or scrolling. The overall color palette is dominated by deep blues, purples, and bright whites, creating a high-tech, ethereal atmosphere. The text 'Computador Óptico' and 'Plano de Fourier' is overlaid in a bold, yellow font on this background.

# Computador Óptico

## Plano de Fourier

# Difração x Computador ótico

- A condição de Fraunhofer estará satisfeita se o anteparo estiver a uma distância muito grande em comparação às dimensões da abertura. No caso das fendas utilizadas no experimento anterior esse é o caso:
  - A nossa bancada é suficientemente longa se comparado às dimensões das fendas utilizadas ( $\mu\text{m}$ )
- Mas no caso de objetos maiores, não é possível observar a figura de difração de Fraunhofer, pois o comprimento de onda é pequeno e a bancada é curta.

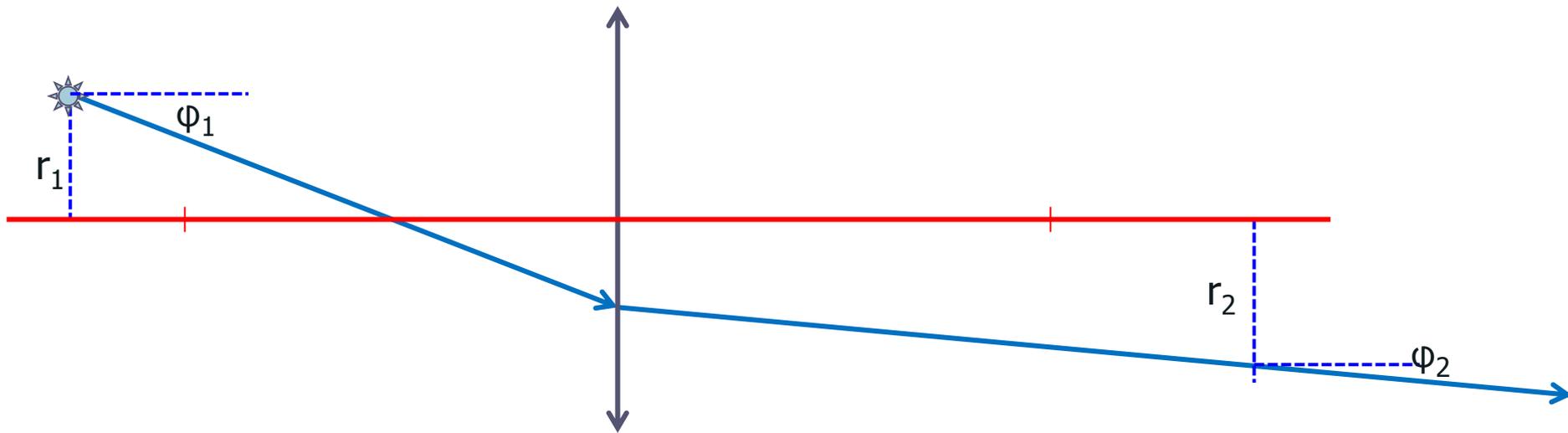
# Computador ótico

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico?
- Sabemos que quando a imagem do objeto passar pela lente, do outro lado vai sair um  $E(k_x, k_y)$  que é a transformada de Fourier do  $\varepsilon(x, y)$ .
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de  $E_0$  em cada ponto  $(x, y)$ .
  - Vejam detalhes no site da Rice University, Physics 332, Fourier optics, seção C.

O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal.

# Lente simples

- Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo:



- Vamos lembrar como tratamos as lentes...

# T.F. e o método matricial

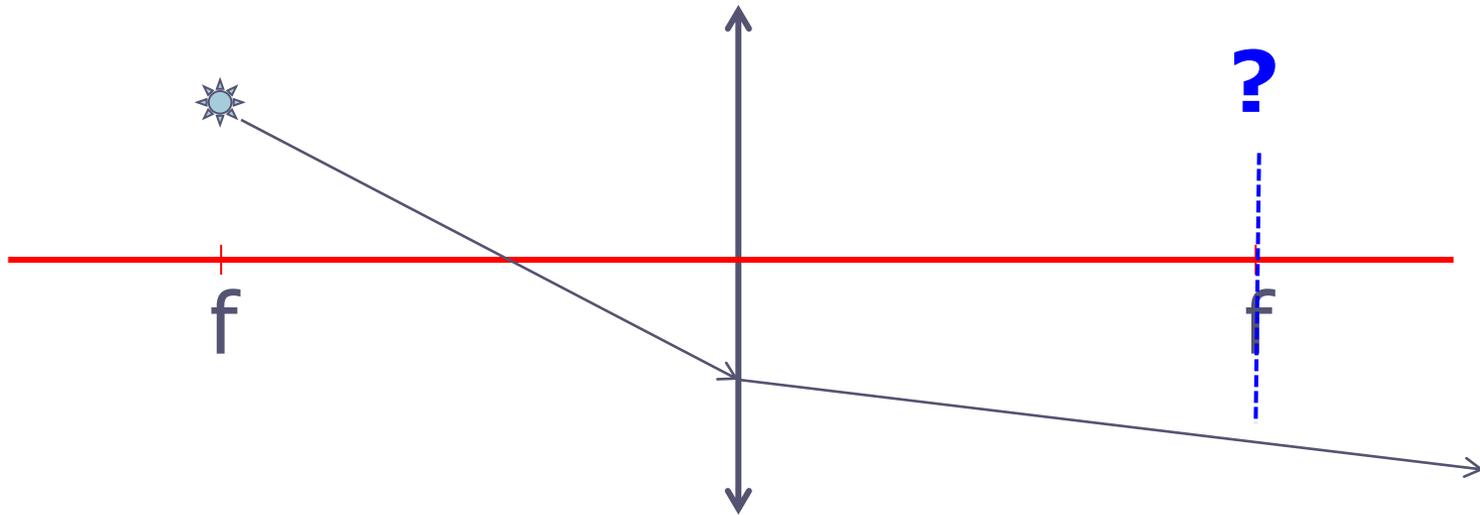
- Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = Ar_1 + B\phi_1 \\ \phi_2 = Cr_1 + D\phi_1 \end{cases}$$

- Se  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ângulo passam pelo mesmo ponto  $\mathbf{r}_2$
- Se  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ponto de origem emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico.

# Lente simples

- Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal...



- O que acontece?

# Calculando...

- A matriz de transformação é:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & f \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$


$$r_2 = f\phi_1$$

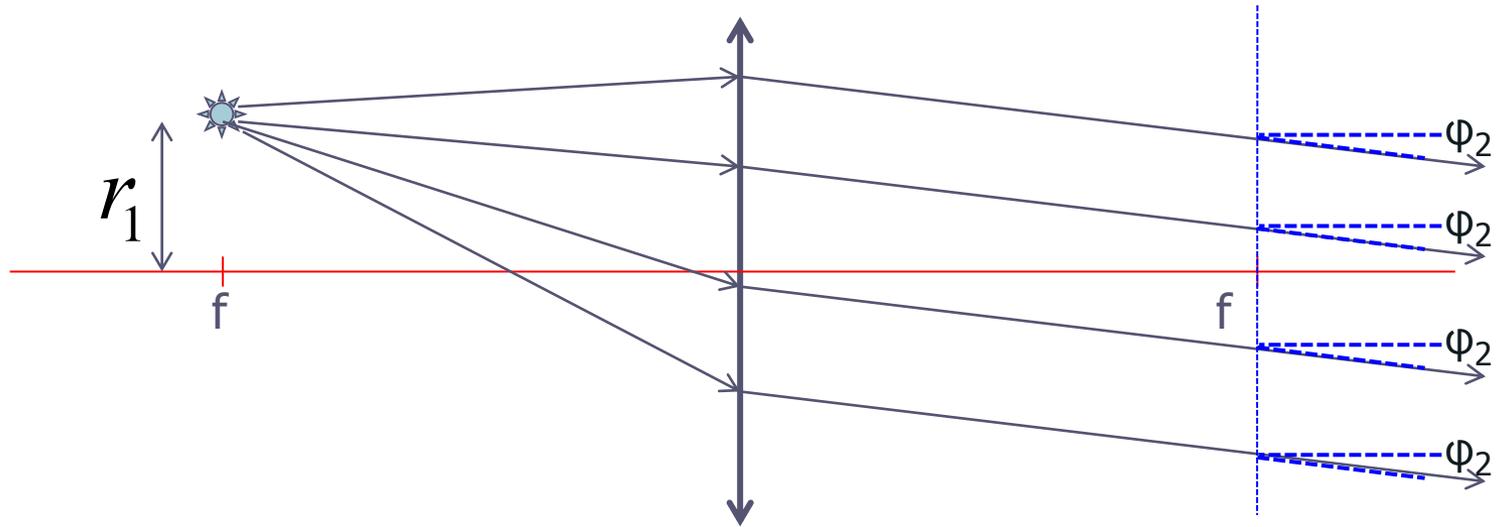
$$\phi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$

O Ângulo no qual o raio de luz emerge depende apenas da posição da fonte, ou seja, os raios emergem paralelos → onda plana

# Lente simples

- Fonte pontual no plano focal.
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo  
→ saída é uma **onda plana**

$$r_2 = f\phi_1$$
$$\phi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$



- O que está acontecendo? Porque um fonte pontual se transforma em uma onda plana??

# Uma T.F. importante

- Um fonte pontual é uma função delta:

$$f(r) = \delta(r - b)$$

- Cuja transformada de fourier é:

$$FT\{\delta(r - b)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r - b) e^{-2\pi i r k} dr = e^{-2\pi i b k}$$

- Conseqüentemente, a transformada de Fourier de uma onda plana será uma função delta!

# Onda plana

- Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema)

$$E = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\sin\phi} \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\phi} = e^{2\pi i\mu r}, \quad \mu = \frac{\phi}{\lambda}$$

- A transformada de fourier é:

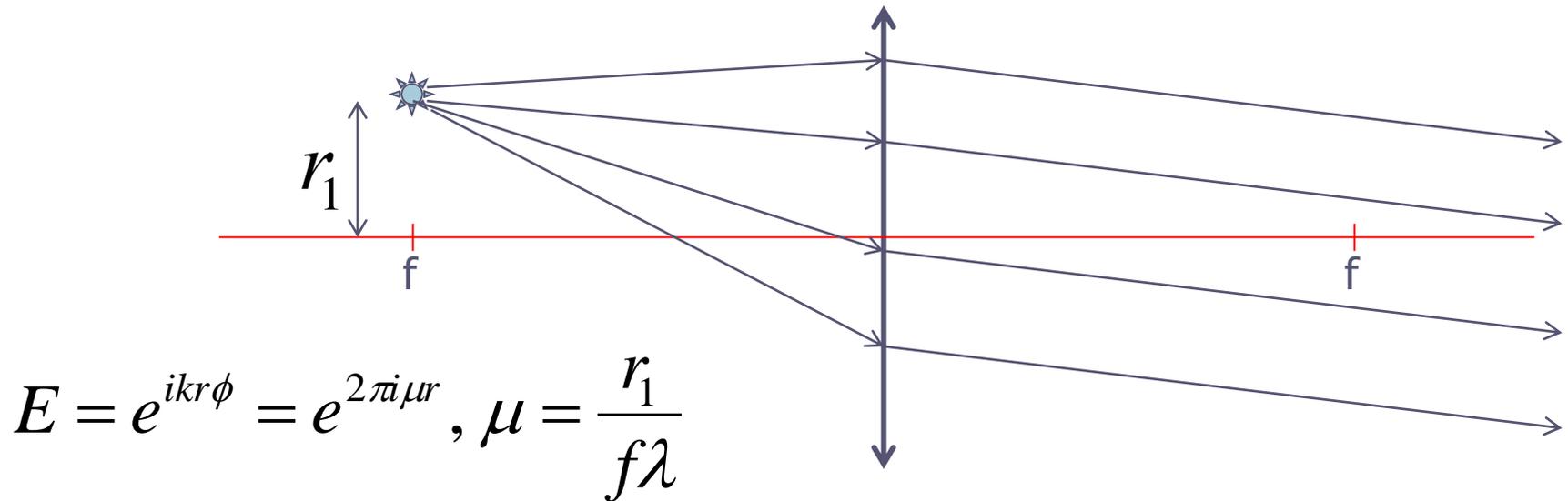
$$FT\{e^{2\pi i\mu r}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\mu r} e^{-2\pi ikr} dr = \delta(\mu - k)$$

tem dimensão de freq: é a frequência espacial

a transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta

# Lente simples

- Fonte pontual no plano focal: a lente está fazendo a transformada de fourier!



NOTA: colocamos todas as distâncias= $f$ , por isso aparece a transformada de fourier exata. Se um deles fosse diferente, apareceria uma **fase**. Como estamos medindo apenas a amplitude, não vemos isso no lab!

# O reverso de aplica

- Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam no plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\phi_1$$

- Como  $\mu$  é uma frequência espacial, tem dimensão de  $\mathbf{1}/[\mathbf{L}]$ , de tal forma que  $\mathbf{1}/\mu$  tem dimens'ao de  $[\mathbf{L}]$  e podemos escrever:

$$\lambda\mu = \phi_1 \Rightarrow \frac{\lambda}{d} = \phi_1 \Rightarrow d\phi_1 = \lambda$$

# Finalmente...

- A equação de primeira ordem de um objeto difrator é

$$d \sin \theta = m \lambda$$

Lembrar da equação:

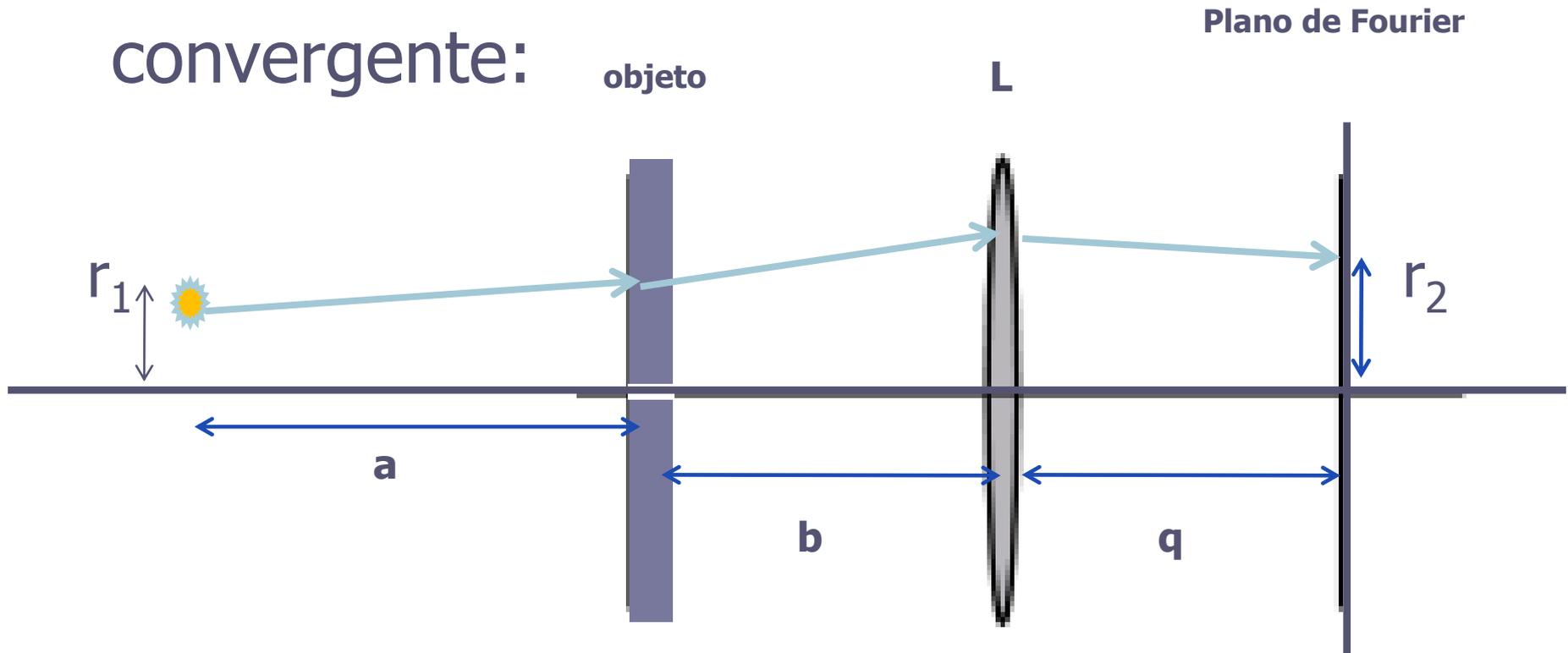
$$d \sin \theta = m \lambda$$

onde **d** é uma dimensão característica do objeto difrator

- Como o padrão de difração corresponde à transformada de Fourier (no campo elétrico), a lente funciona como um elemento que permite obter essa TF.

# Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer vamos calcular onde se situa TF obtida com uma lente convergente:

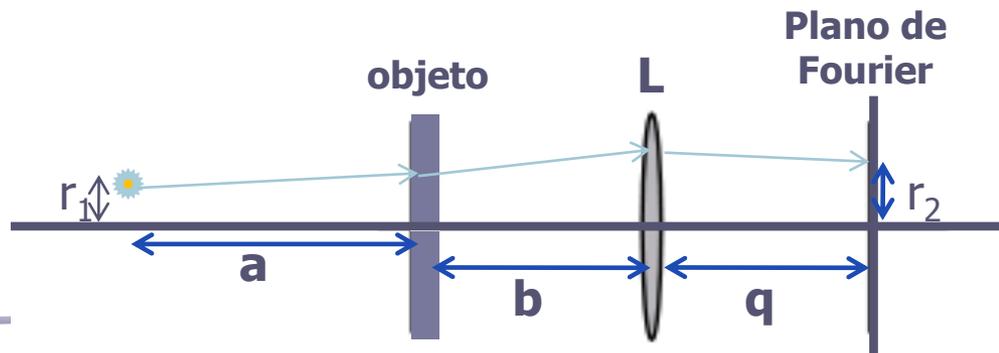


# Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer
- A matriz de transformação é (deduzam):

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right)r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$



# Generalizando...

- $r_2$  deve ser independente de  $\varphi_1$

$$a + b - (a + b)\frac{q}{f} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a + b}$$

- Se a fonte está no infinito, ou seja, o objeto está iluminado por uma onda plana:

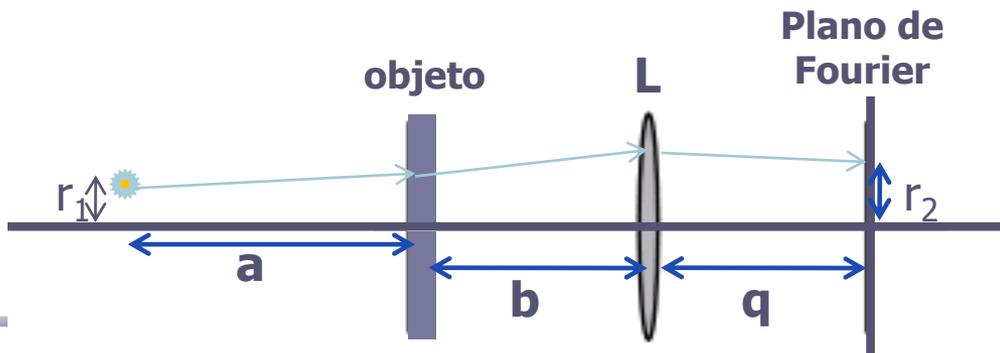
$$a \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a + b} \Rightarrow q = f$$

# Posição do plano de fourier

- A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte (**a**) quanto do objeto em relação a lente(**b**).

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Caso a fonte esteja no infinito, o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e INDEPENDENTE da posição do objeto.



$$q = f$$

# “Tamanho” da transformada

- Se a fonte está no eixo óptico, a posição de convergência dos raios é:

$$r_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left( b + q - \frac{bq}{f} \right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Substituindo a expressão para a distância focal, temos:

$$r_2 = \left( \frac{qa}{a+b} \right) \frac{m\lambda}{d}$$

- Se o objeto está na distância focal, **b=f**, e:

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

# Objetivos da semana

- Estudar o plano de fourier de uma lente
- Posição do plano

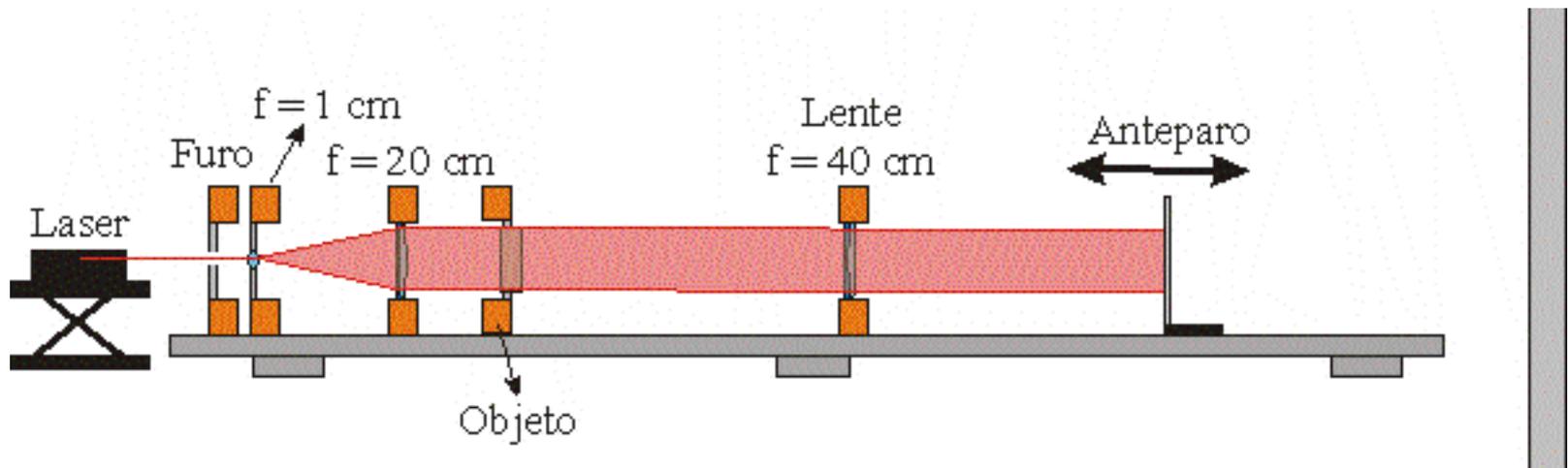
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Tamanho da T.F.
  - Objeto no foco

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

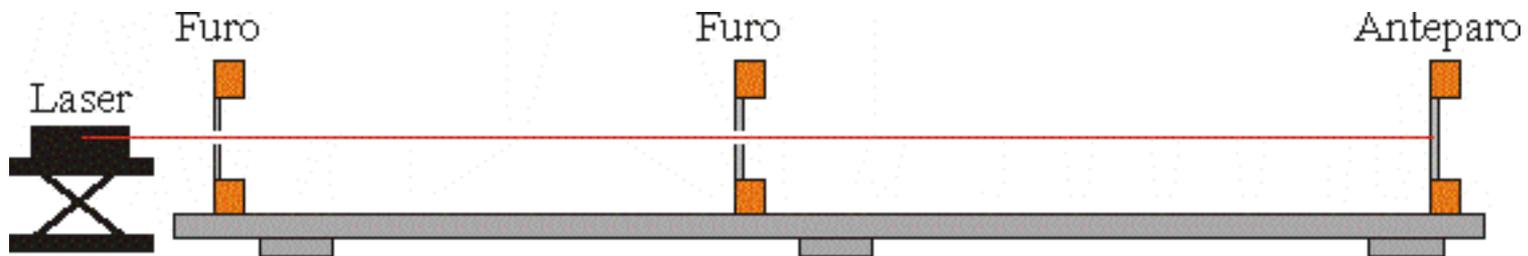
# Arranjo experimental

- Laser e orifícios para alinhamento
- Lentes (para mudar o diâmetro do laser) e fazer a transformada
- Objeto (grades quadriculadas) e anteparos



# Montagem

- Alinhamento do sistema óptico:
  - Montar, no trilho, dois orifícios e um anteparo rebaixado no centro.
  - Alinhar o laser, fazendo o feixe passar por todos os furos e atingir o centro do anteparo.
  - **NÃO MOVIMENTAR MAIS O SISTEMA ÓPTICO!!!!!!**

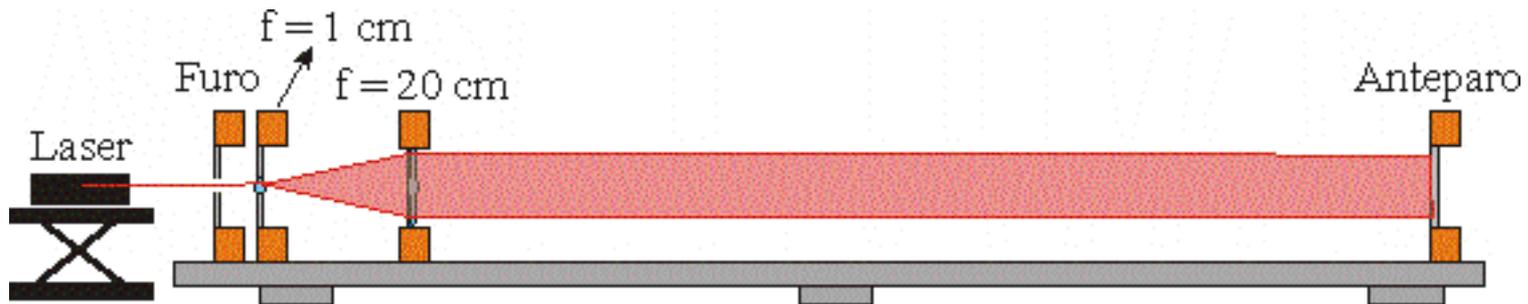




07/05/2012

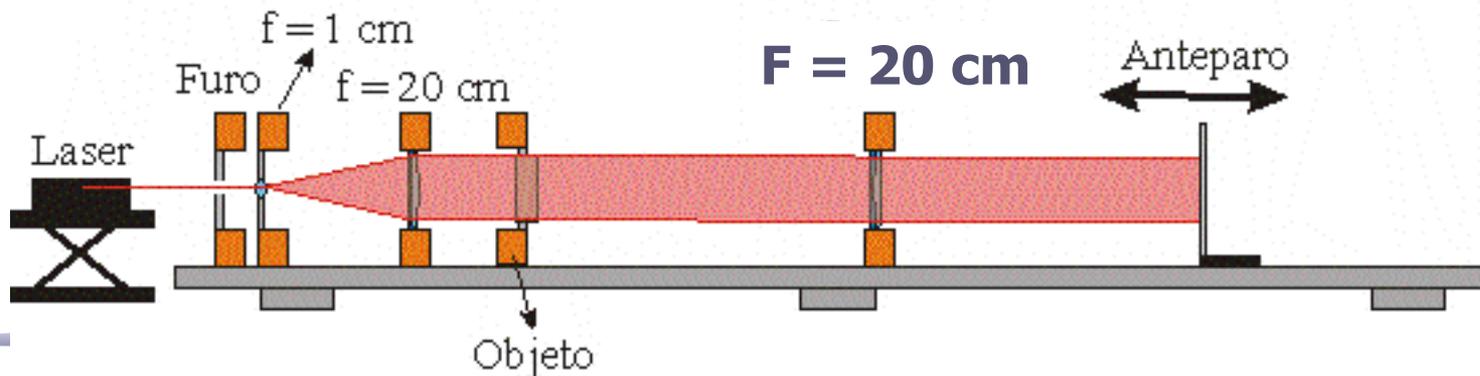
# Montagem

- Alargar o laser para poder incidir na imagem
  - Usar a lente de  $f = 1 \text{ cm}$  e  $f = 5 \text{ cm}$
  - Aumento do laser =  $5/1 = 5$  vezes
  - Lembre da experiência de lentes para saber como determinar a distância entre as lentes.
    - A primeira pode ser bem próxima ao furo.



# Montagem

- Montar o computador óptico
  - Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.
  - Colocar uma lente de  $f = 20$  cm com a face plana para o objeto
  - Posicionar o objeto à distância apropriada da lente.
  - Posicionar o anteparo de modo a determinar o plano de Fourier



Plano de fourier

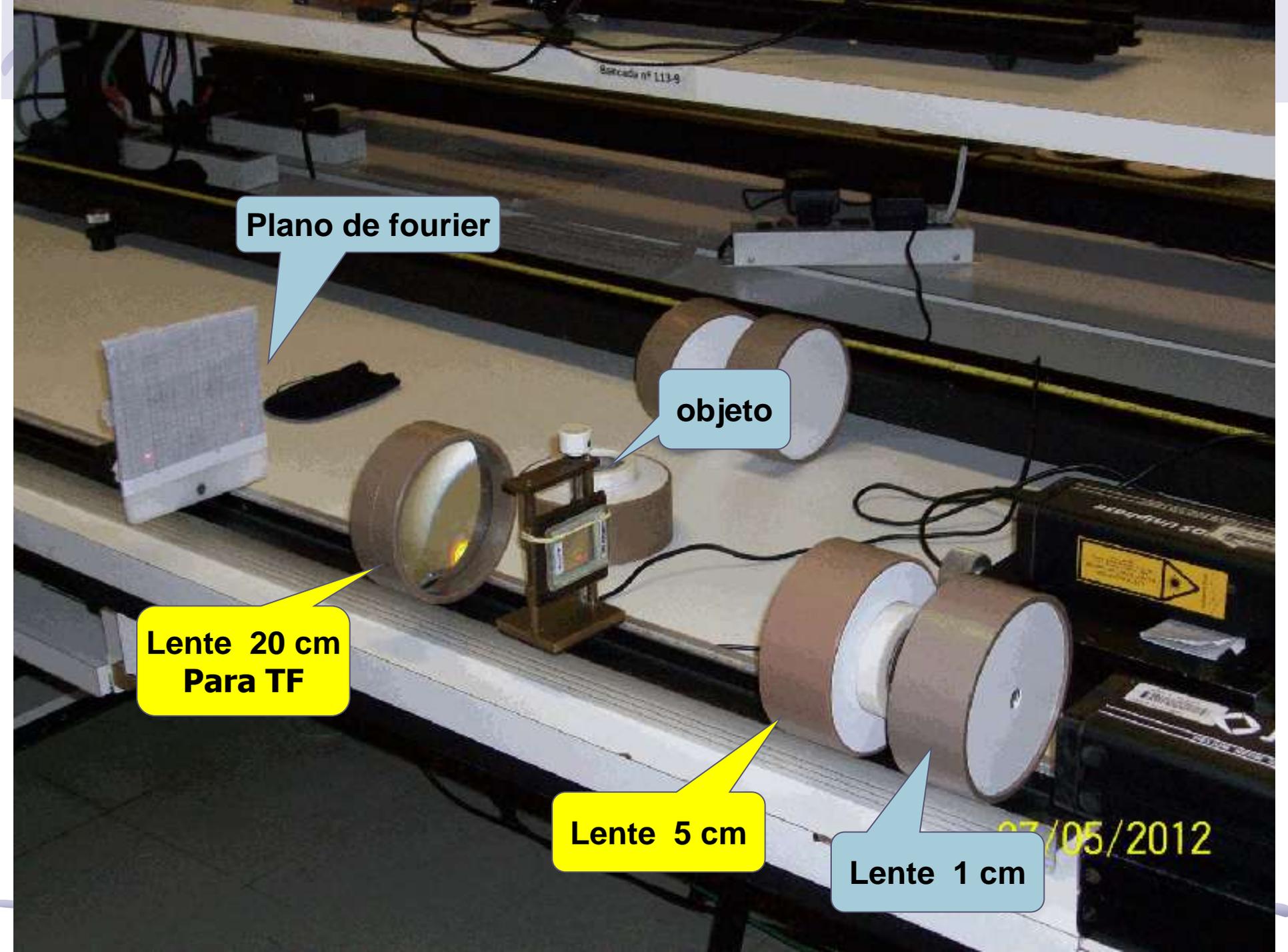
objeto

Lente 20 cm  
Para TF

Lente 5 cm

Lente 1 cm

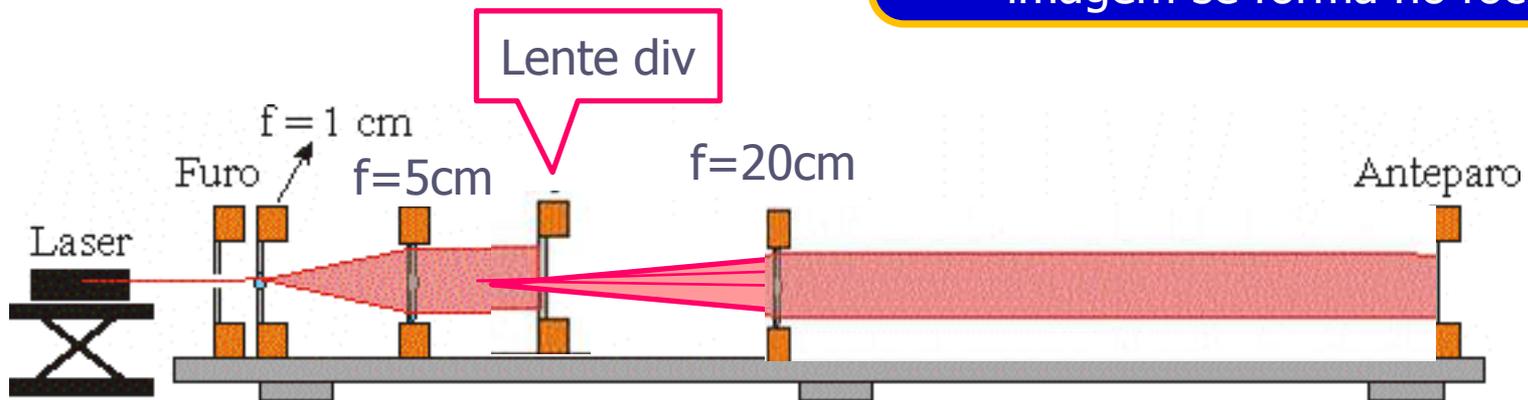
07/05/2012



# Montagem

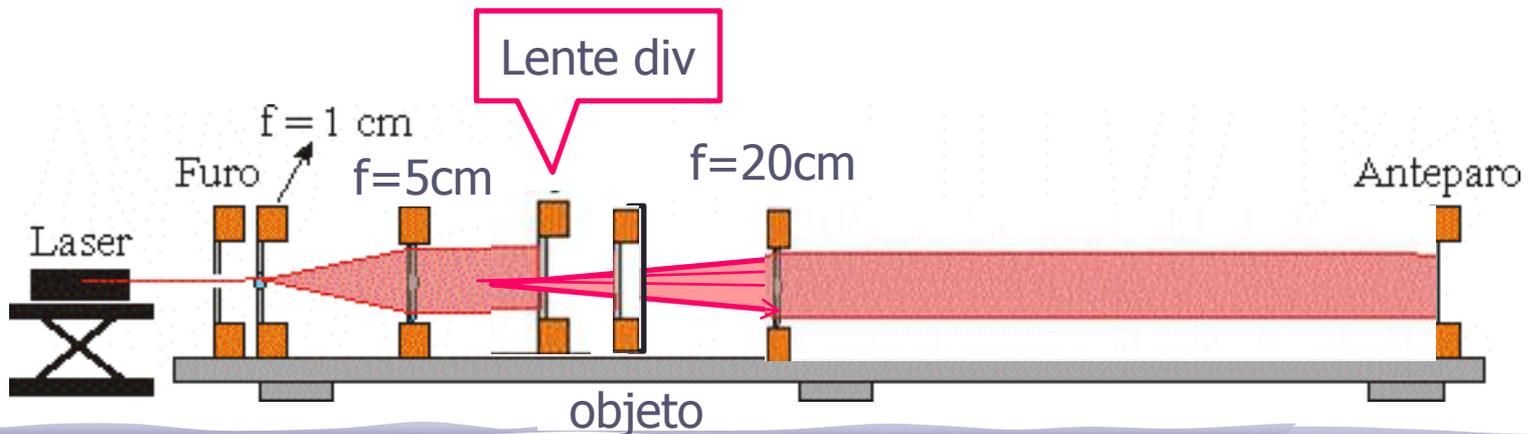
- Fonte pontual a uma distância FINITA:
  - ajustar a posição da lente de 5 cm em relação à de 1 cm (divergência da saída)
  - usar uma lente divergente (muito mais fácil)

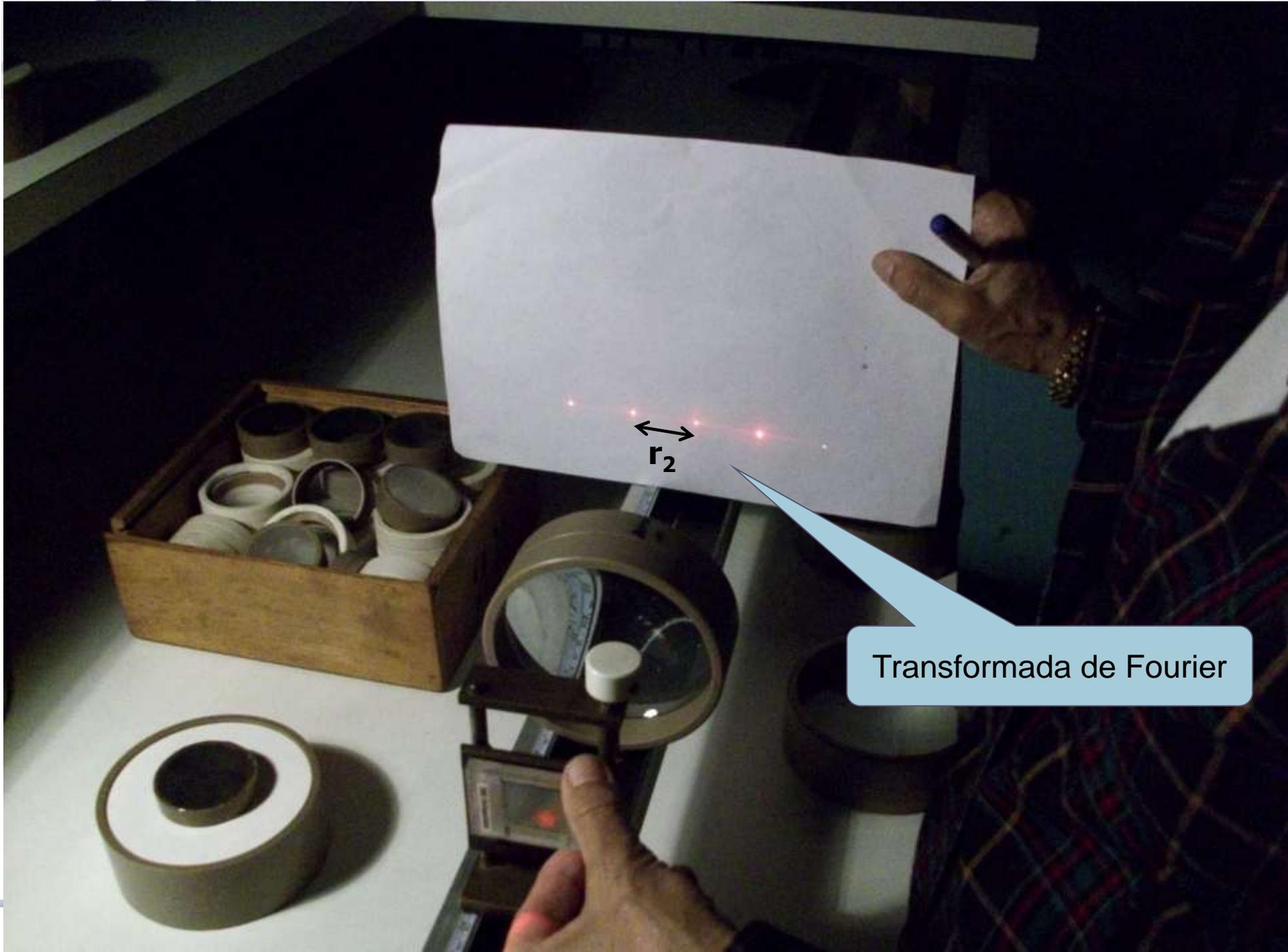
p/ a lente divergente ( $f$  negativo):  
feixe paralelo (fonte no infinito) a  
imagem se forma no foco



# Montagem: fonte pontual

- Montar o computador óptico:
  - Colocar a lente divergente próxima à lente de 5cm (você vai ter que ajustar)
  - Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.
  - Colocar a lente de  $f = 20$  cm com a face plana para o objeto
  - Posicionar o objeto à distância apropriada da lente.
  - Posicionar o anteparo de modo a determinar o plano de Fourier



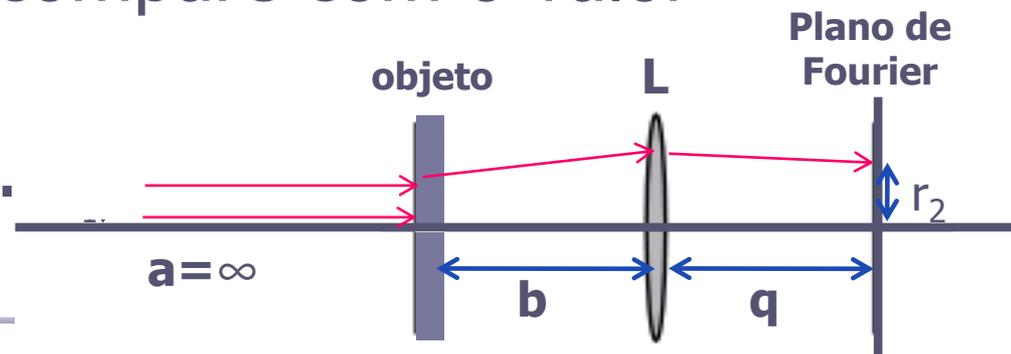


$r_2$

Transformada de Fourier

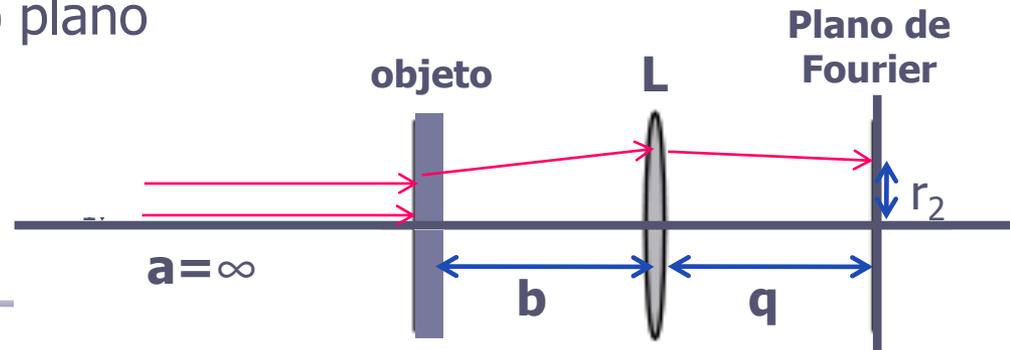
# Tarefa 2 – Para síntese

- Ilumine o objeto, com o feixe paralelo (fonte no  $\infty$ ):
  - Use a rede de difração de 300 linhas/mm como objeto
- Identifique o plano de Fourier  $q=f$
- Verifique que a posição do plano de Fourier não depende da posição do objeto em relação à lente
  - Faça pelo menos 3 medidas
- A partir das medidas das posições dos máximos ( $r_2$ ) da transformada de Fourier, determine as dimensões da grade e compare com o valor nominal de 300 l/mm
- Comente os resultados.



# Tarefas 3 - Relatório

- Crie uma fonte pontual, ajustando a divergência do feixe
- Coloque o objeto no foco da convergente, isto é,  $b=f$
- Determine a posição do plano de Fourier em função da posição da fonte pontual e compare com o previsto teoricamente
  - repita o procedimento para pelo menos 3 posições diferentes da fonte em relação ao objeto ( $a$ ) para comparar com a previsão teórica da posição do plano em relação à lente ( $q$ )
- Verifique que, se o objeto estiver no foco  $b=f$ , as posições dos máximos ( $r_2$ ) não variam: independem da posição da fonte em relação ao objeto ( $a$ ):
  - Desde que a figura esteja no plano de Fourier, ( $q$  vai variar)



# DICAS

1. Coloque o trilho em cima dos batoques, e depois não mexe mais nunca
2. Ajuste a altura do suporte do laser. Se for preciso, coloque um pouco de papel na frente ou atrás, até alinhar pelos 2 furos
3. Tire os furos da bancada
4. Coloque apenas a 1a lente. Verifique que o feixe ampliado no final do trilho está centralizado
5. Coloque a 2a lente e verifique se continua alinhado.
  1. Nestes dois passos, o ajuste é bem fino ( $\sim 1-3\text{mm}$ ). Não mexa no trilho, apenas no laser!