(Espelhos esféricos)

1) INTRODUÇÃO:

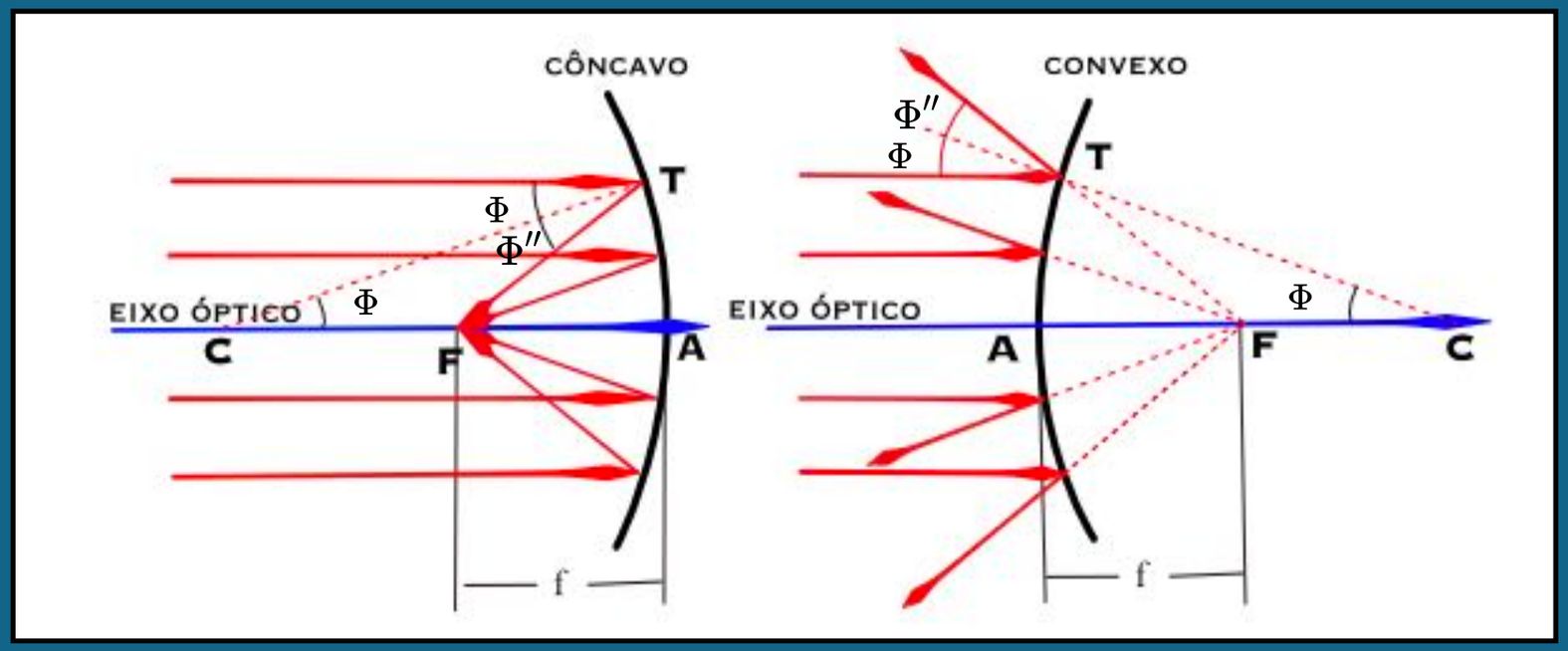
Uma superfície refletora esférica possui a propriedade de formação de imagem semelhante à de uma lente fina. A imagem produzida em um espelho esférico é, em alguns aspectos, superior à de uma lente porque no espelho não ocorrem os efeitos cromáticos devido à dispersão da luz branca. Portanto, os espelhos são ocasionalmente usados no lugar de lentes em instrumentos ópticos, mas suas aplicações não são tão amplas quanto as das lentes porque não oferecem as mesmas possibilidades de correção das outras aberrações da imagem.

Devido a simplicidade da lei da reflexão comparada com a lei da refração, o estudo quantitativo da formação da imagem por espelhos é mais fácil do que para lentes. Muitas das propriedades dos espelhos são as mesmas que as das lente.

2) PONTO FOCAL E DISTÂNCIA FOCAL:

A figura abaixo mostra a reflexão de um feixe de luz paralela por um espelho côncavo e por um convexo. Um raio que atinge o espelho no ponto T obedece à lei da reflexão $\Phi'' = \Phi$.

Opto-Mechanical Design Group
(Espelhos esféricos)



Todos os raios são mostrados como trazidos para um foco comum em F, embora isso seja estritamente verdadeiro apenas para os raios paraxiais. O ponto F é chamado de ponto focal e a distância FA é a distância focal.

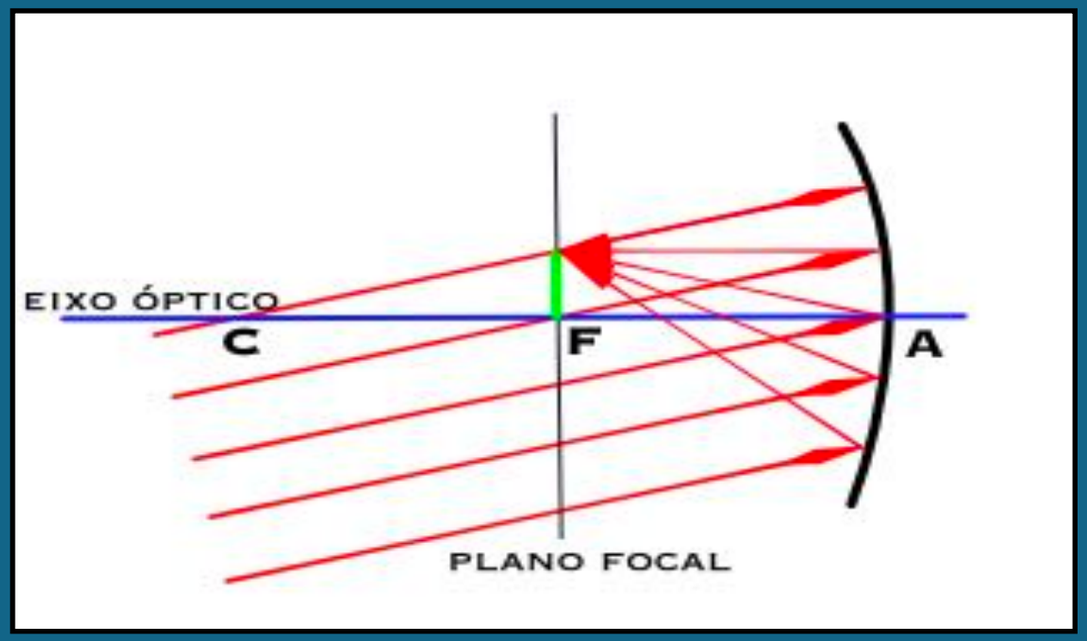
No segundo diagrama, os raios refletidos divergem como se viessem de um ponto comum F. Como o ângulo TCA também é igual a Φ, o triângulo TCF é isósceles e, em geral, CF = FT. Mas para ângulos muito pequenos Φ (raios paraxiais), FT é igual a FA. Portanto, podemos escrever que:

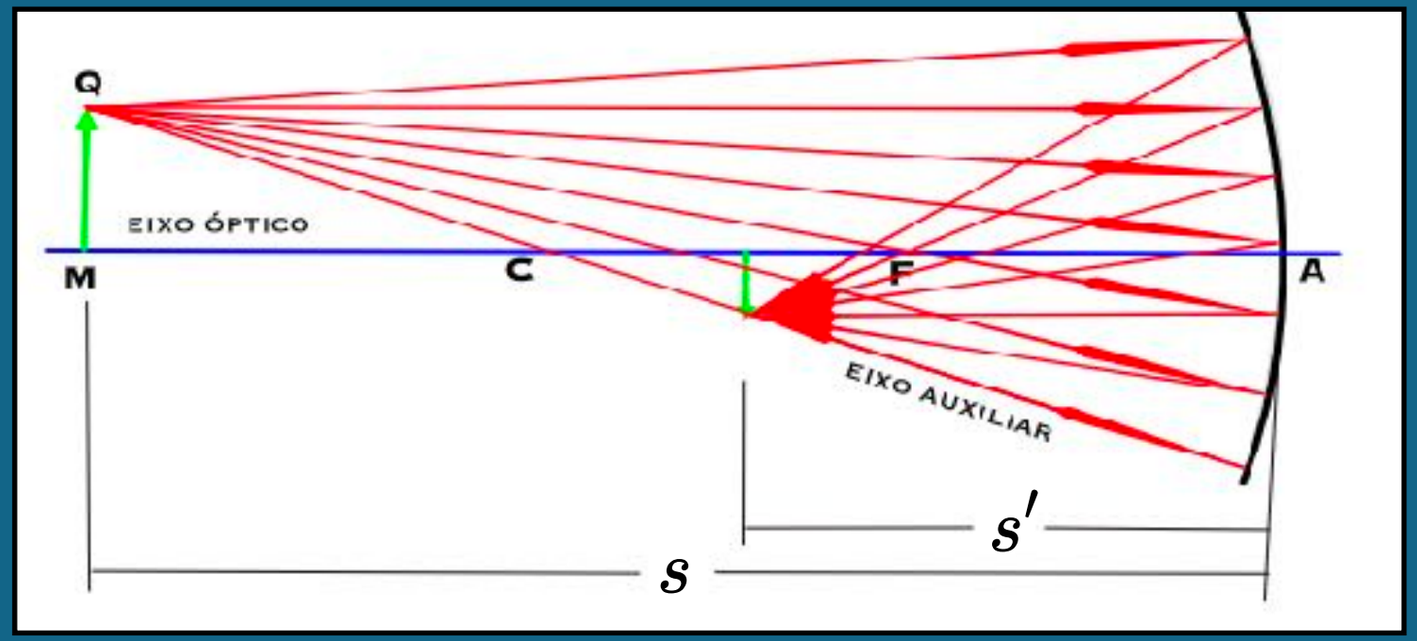
$$FA = \frac{1}{2}(CA); \qquad f = -\frac{1}{2}r$$

De acordo com a convenção de sinais, o raio de curvatura do espelho côncavo é negativo neste caso. A distância focal de um espelho convexo, que tem um raio positivo, também será negativa. Essa convenção de sinais é escolhida para ser consistente com aquela usada para lentes.

(Espelhos esféricos)

Como antes, o plano transversal que passa através do ponto focal é chamado de plano focal. Suas propriedades, como mostrado na figura abaixo, são similares àquelas de qualquer plano focal de uma lente; por exemplo, raios paralelos incidentes sob qualquer ângulo com o eixo óptico são trazidos para um foco em algum ponto no plano focal. A imagem Q′ de um ponto objeto distante, fora do eixo ocorre na interseção com o plano focal daquele raio que passa pelo centro de curvatura C.





3) CONSTRUÇÕES GRÁFICAS:

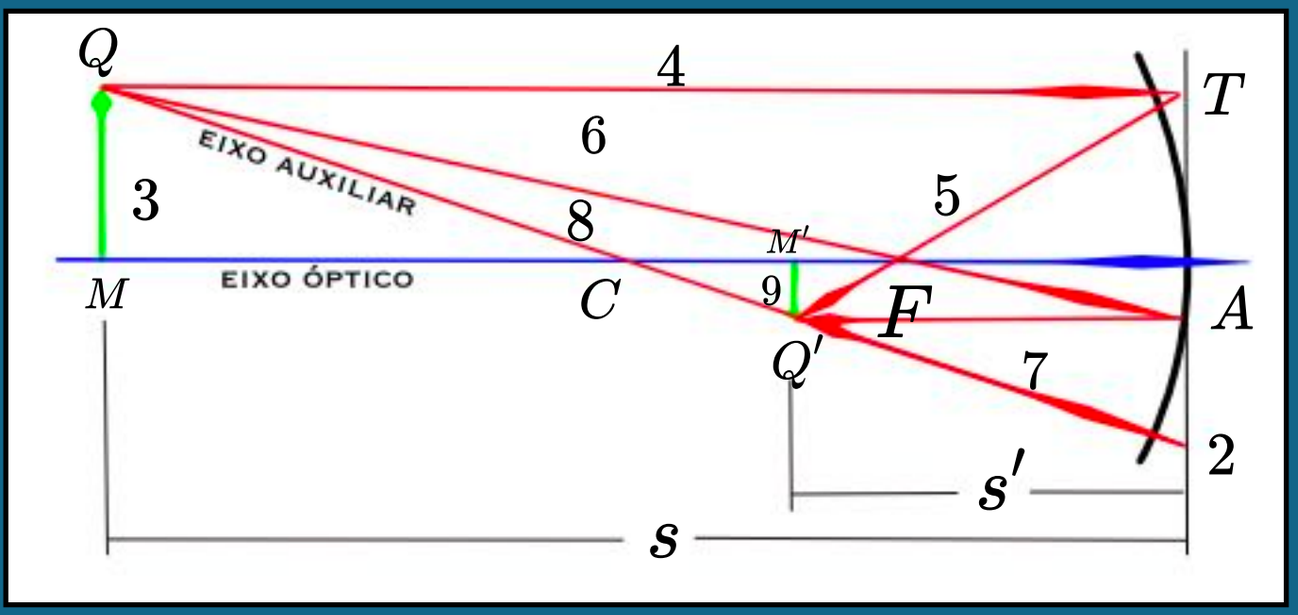
A figura do lado direito ilustra a formação de uma imagem real por um espelho côncavo.

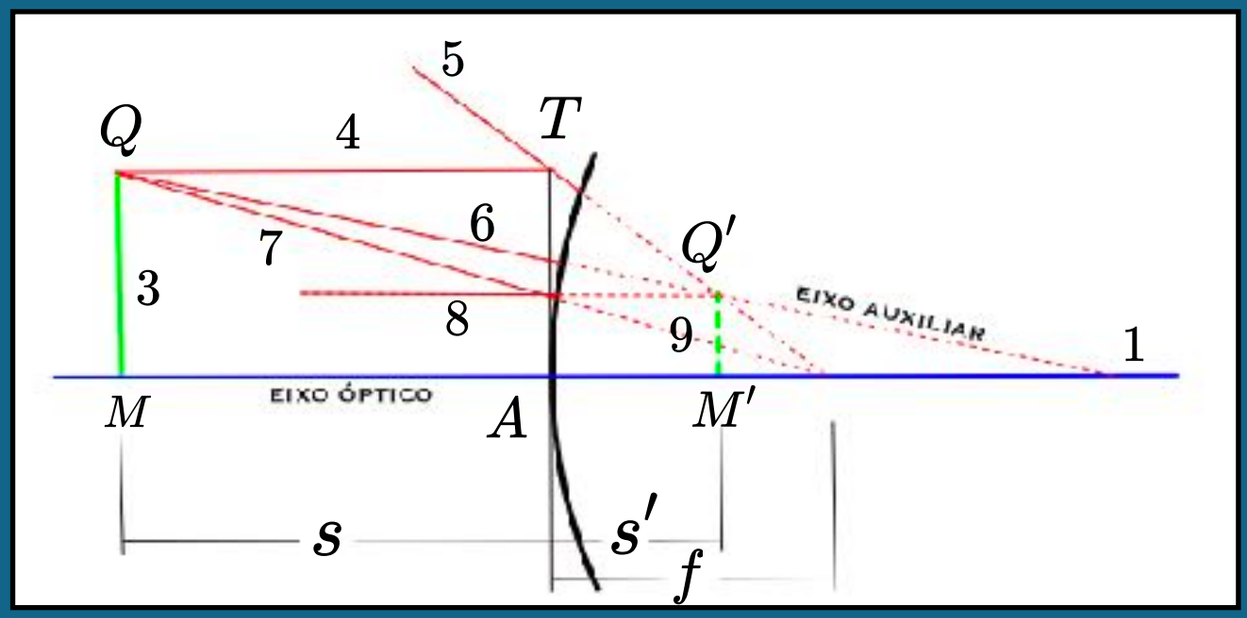
(Espelhos esféricos)

Quando o objeto MQ é movido em direção ao centro de curvatura C, a imagem também se aproxima de C e aumenta de tamanho até que, quando alcança C, tenha o mesmo tamanho do objeto. As condições em que o objeto está entre C e F podem ser deduzidas da permutabilidade do objeto e imagem aplicada a esse diagrama. Quando o objeto está no ponto focal, a imagem é virtual, como acontece com uma lente convergente. Os métodos para construir graficamente a imagem seguem os mesmos princípios usados para as lentes.

O método de construção de raios paralelos para um espelho côncavo é mostrado na figura abaixo. Três raios que saem de Q são, depois da reflexão, trazidos ao ponto de conjugado Q'. A imagem é real, invertida e menor que o objeto. O raio 4 é traçado paralelamente ao eixo que, por definição, quando refletido passa pelo ponto focal F. O raio 6, por passar pelo ponto focal, quando refletido sai paralelamente ao eixo óptico, e o raio 8 como para pelo centro de curvatura atinge o espelho normalmente e é refletido de volta em si mesmo. O ponto de cruzamento de qualquer um desses dois raios é suficiente para localizar a imagem.

(Espelhos esféricos)

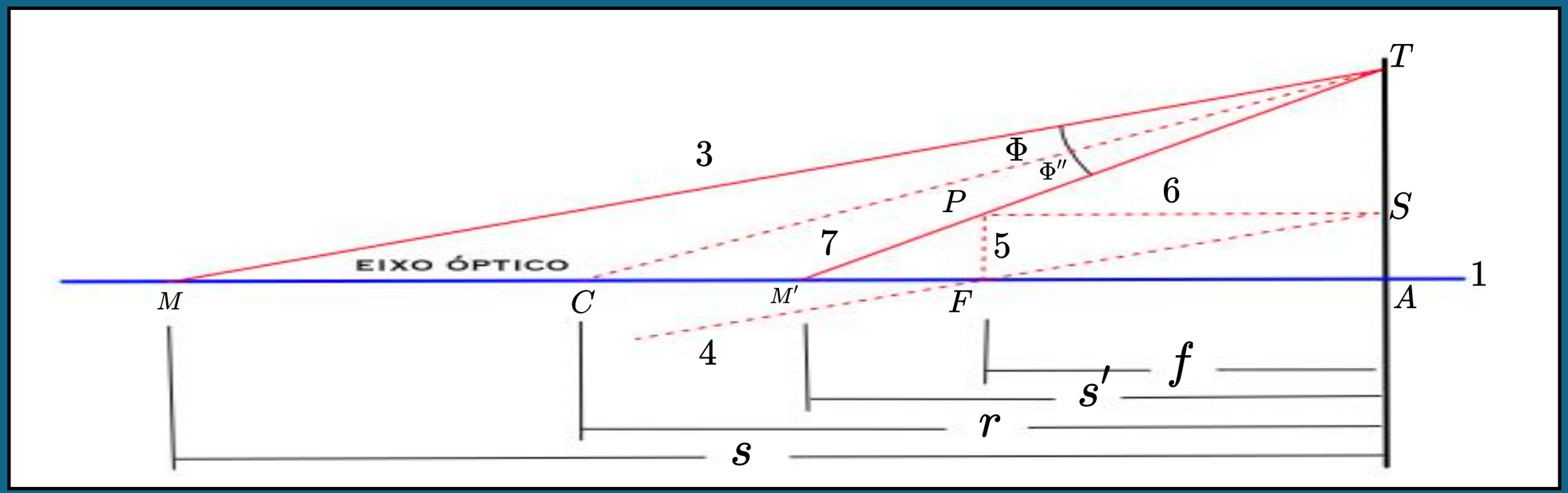




Um procedimento semelhante é aplicado a um espelho convexo que é mostrado na figura acima a direita. Os raios que saem do objeto Q, depois da reflexão, divergem do ponto conjugado Q'. O Raio 4, começando paralelo ao eixo, é refletido como se viesse de F. O raio 6 em direção ao centro de curvatura C é refletido de volta em si mesmo, enquanto o raio 7 indo em direção a F é refletido paralelamente ao eixo. Como os raios nunca passam por Q', a imagem Q'M' neste caso é virtual.

O método de raios oblíquos também pode ser usado para espelhos, conforme ilustrado na figura abaixo para um espelho côncavo. Depois de desenhar o eixo 1 e o espelho 2, dispomos os pontos C e F e desenhamos o raio 3 fazendo qualquer ângulo com o eixo.

Opto-Mechanical Design Group
(Espelhos esféricos)



Através de F, a linha tracejada 4 é então traçada paralelamente a 3. Onde esta linha intersecta o espelho em S, um raio paralelo ao eixo 6 é refletido para trás e vai cruzar o plano focal em P. Um raio 7 é então desenhado passando pelos pontos TP que vai intersectar o eixo óptico em M'. Os pontos M e M' são pontos conjugados, e 3 e 7 são as partes do raio no espaço objeto e imagem respectivamente. Se no lugar do raio 4 outro raio fosse desenhado através de C e paralelo ao raio 3, ele também cruzaria o plano focal em P. Um raio através do centro de curvatura seria refletido diretamente sobre si mesmo.

(Espelhos esféricos)

4) Fórmulas para espelhos:

Para podermos utilizar as fórmulas padrão de lentes a espelhos esféricos com a menor alteração possível, deveremos assumir às seguintes convenções de sinais:

1. As distâncias medidas da esquerda para a direita são positivas, enquanto as medidas da direita para a esquerda são negativas.

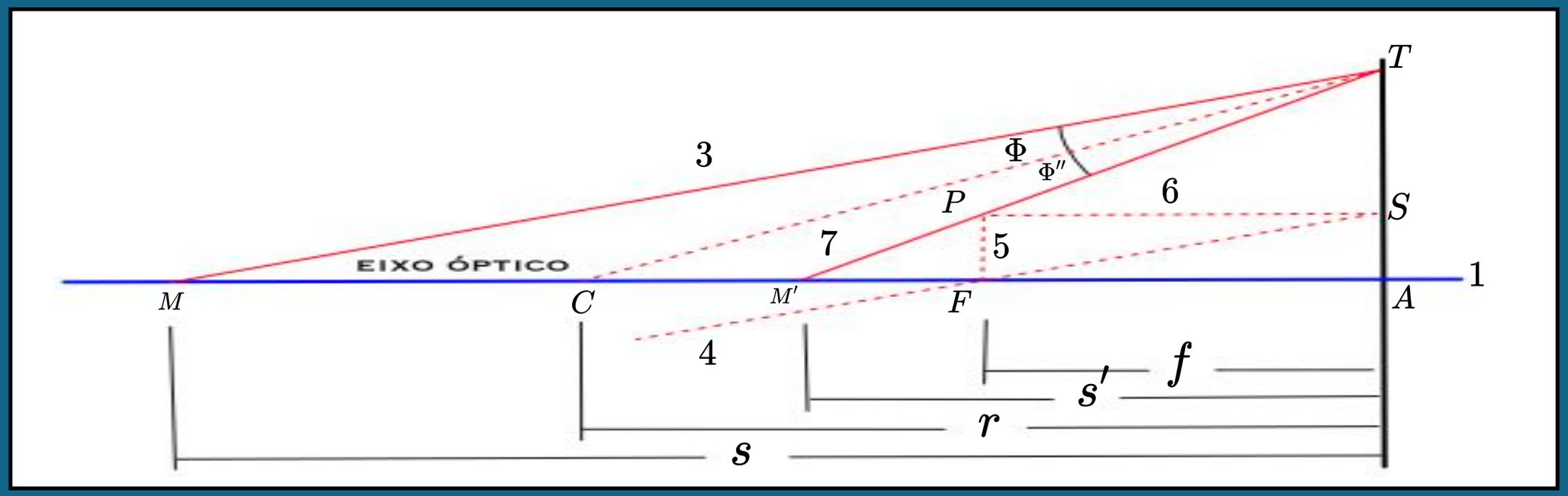
2. Os raios incidentes vão da esquerda para a direita.

3. O comprimento focal é medido do ponto focal até o vértice. Isso dá uma sinal positivo para espelhos côncavos e um sinal negativo para espelhos convexos.

4. O raio é medido do vértice ao centro da curvatura. Isso torna r negativo para espelhos côncavos e positivo para espelhos convexos.

5. As distâncias s e s' são medidas a partir do objeto e da imagem até vértice. Isso faz com que s e s' sejam positivas e o objeto e a imagem reais quando estão à esquerda do vértice; eles são negativos e virtuais quando estão à direita.

Opto-Mechanical Design Group
(Espelhos esféricos)



Na figura acima pode-se observar que, pela lei da reflexão, o raio TC divide o ângulo MTM' em duas partes iguais. Portanto podemos escrever que:

$$\frac{MC}{MT} = \frac{CM'}{M'T}$$

Agora, para raios paraxiais, MT ~ MA = s e M'T ~ M'A = s'. Além disso, a partir do diagrama,

$$MC = MA - CA = s + r$$

$$CM' = CA - M'A = -r - s' = -(s' + r)$$

Substituindo na expressão acima obtemos: $\frac{s+r}{s} = -\frac{s'+r}{s'} \implies \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r}$

(Espelhos esféricos)

O ponto focal primário é definido como aquele ponto objeto axial para o qual a imagem é formada no infinito, então substituindo s = f e s'= ∞ na equação do espelho, nós temos

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{\infty}=-\frac{2}{r} \implies f=-\frac{r}{2}$$

O ponto focal secundário é definido como o ponto imagem de um objeto que está localizado no infinito distante. Portanto, s'= f' e s = ∞ , de modo que:

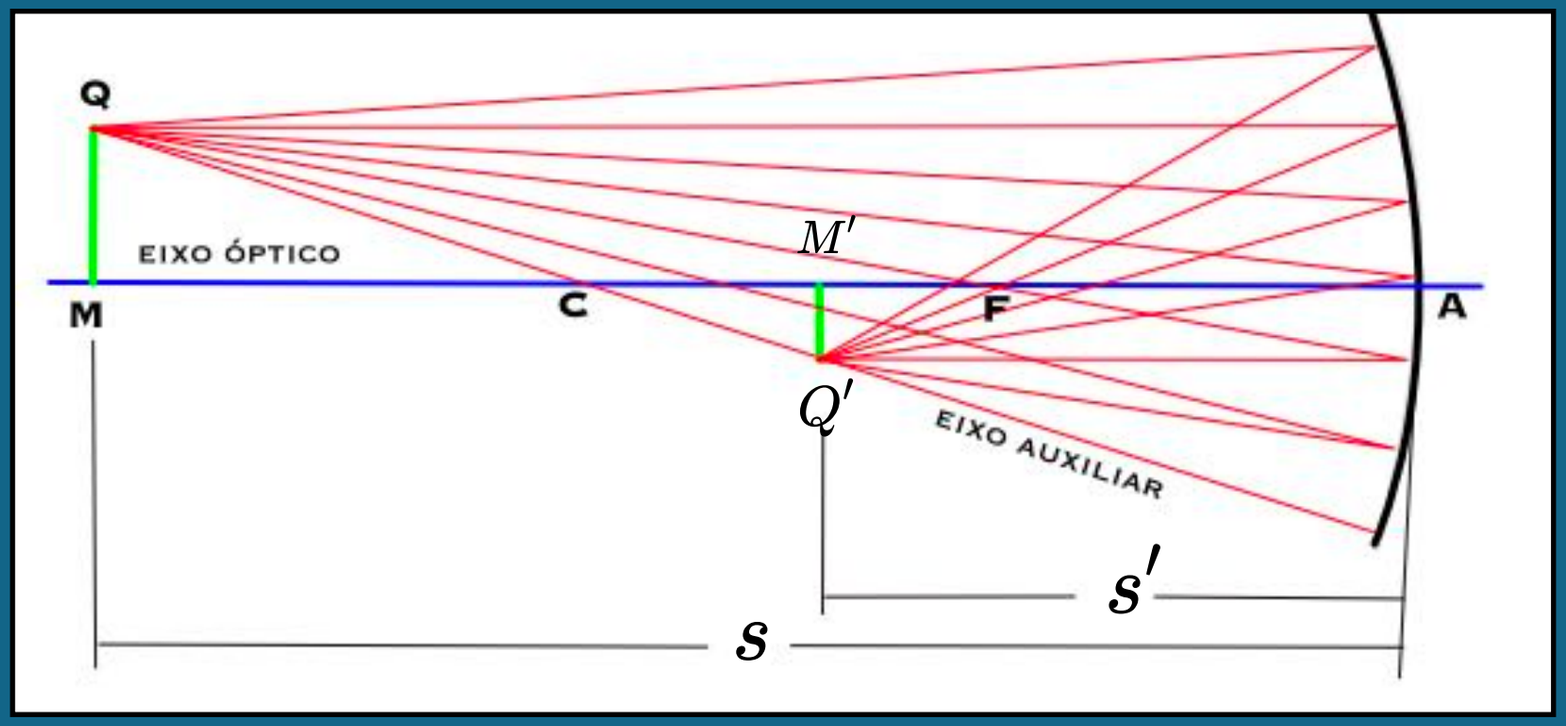
$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{f'}=-\frac{2}{r} \implies f'=-\frac{r}{2}$$

Portanto, os pontos focais primários e secundários são coincidentes, e a distância focal é metade do raio de curvatura. Quando - 2/r é substituído por 1/f, equação do espelho torna-se a equação para as lentes:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

(Espelhos esféricos)

A ampliação lateral da imagem de um espelho pode ser obtida a partir da figura abaixo. Da proporcionalidade dos lados nos triângulos semelhantes, Q'AM' e QAM obtemos que -y'/y = s'/s, e portanto:



$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

EXEMPLO 1: Um objecto de 2,0 cm de altura situa-se a 10,0 cm à frente de um espelho côncavo de raio de 16,0 cm. Encontre a) a distância focal do espelho, b) a posição da imagem e c) a magnificação lateral.

SOLUÇÃO: As quantidades dadas são y = +2,0 cm, s = +10,0 cm, e r = -16,0 cm. As quantidades desconhecidas são f, s'.

a) $$f = -\frac{-16}{2} = +8{,}0cm$$

b) $$\frac{1}{10} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{8} \implies s' = +40{,}0cm$$

c) $$m = -\frac{40}{10} = -4{,}0cm$$

5) PODER DE UM ESPELHO:

Na equação da imagem para lentes aparece as grandezas s, s', r, f e f' nos denominadores. Os recíprocos 1/s, 1/s', 1/r, 1/f e 1/f' na verdade representam as curvaturas das quais s, s', r, f e f' são os raios. Se definirmos: P=1/f; V=1/s, V'=1/s' e K=1/r, as equações do espelho assume a forma:

$$V + V' = -2K \qquad V + V' = P \qquad P = -2K \qquad m = \frac{y'}{y} = -\frac{V}{V'}$$

EXEMPLO 2:

Um objeto está localizado a 20,0 cm na frente de um espelho convexo de raio de 50,0 cm. Calcule a) o poder do espelho, b) a posição da imagem e c) sua magnificação.

SOLUÇÃO:

Expressando todas as distâncias em metros, temos:

a) $P = -2K = -4D$

b) $5 + V' = -4 \; ou \; V' = -9D$ $\qquad s' = \frac{1}{V'} = -\frac{1}{9} = -0{,}111 \; m$

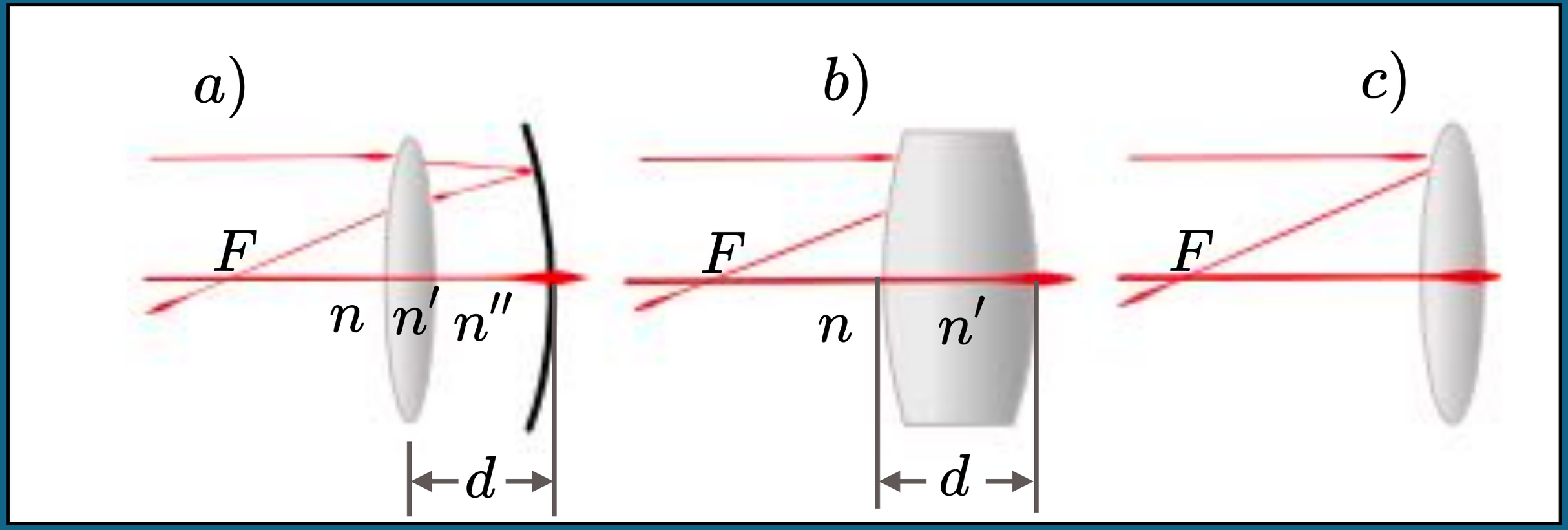
c) $m = \frac{-5}{-9} = +0{,}555$

O poder é P = -4 D, e possui imagem virtual que está localizada a 11,1 cm à direita do espelho e tem uma magnificação de 0,555 x.

6) ESPELHO ESPESSO:

O termo espelho espesso é aplicado a um sistema de lentes no qual uma das superfícies esféricas é um refletor. Sob essas circunstâncias, a luz que passa pelo sistema é refletida pelo espelho de volta através do sistema de lentes.

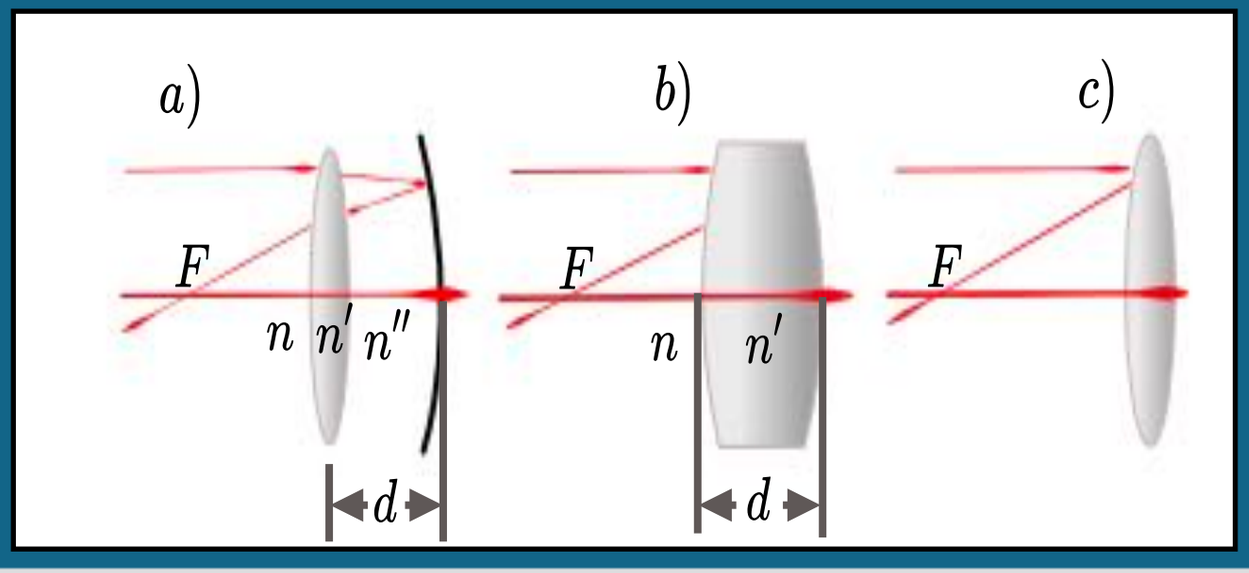
Três formas comuns de sistemas ópticos que podem ser classificados como espelhos espessos são mostradas na figura abaixo. Um raio incidente paralelo é traçado através de cada sistema até onde ele cruza o eixo, determinando assim a posição do ponto focal.

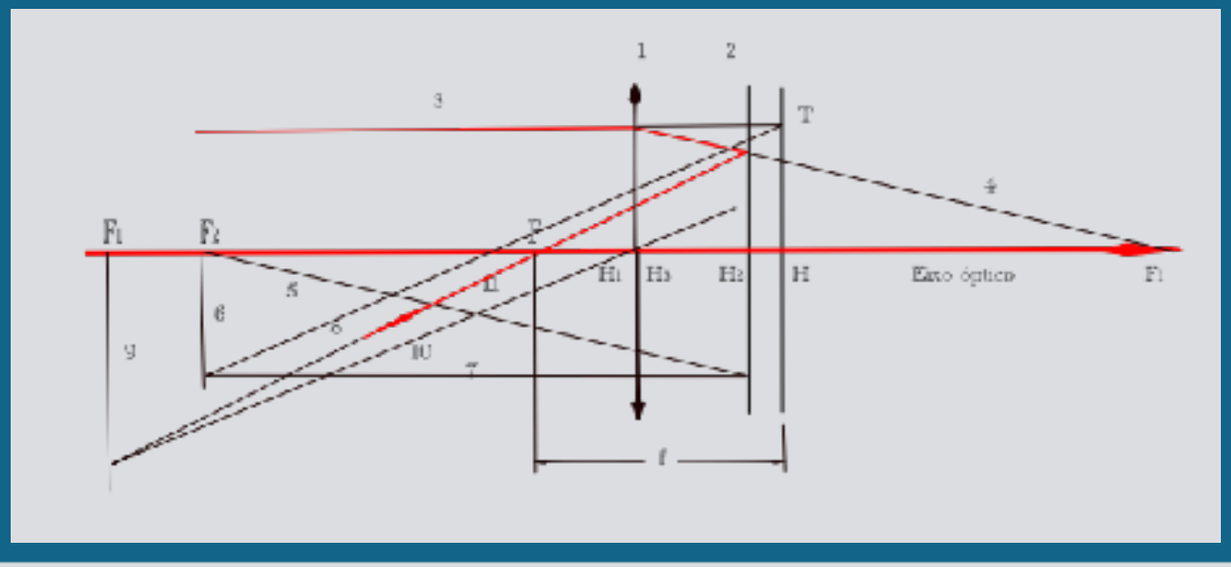


(Espelhos esféricos)

Na primeira ilustração, a lente é considerada fina, de modo os pontos principais podem ser considerados coincidentes e estão localizados em H1. Um raio incidente paralelo ao eixo é refratado pela lente, refletido pelo espelho, e novamente refratado pela lente antes de cruzar o eixo do sistema em F. O ponto T, onde os raios incidente e final, quando estendidos, determinam a posição do plano principal H. Se seguirmos as convenções de sinais para um único espelho, a distância focal f dessa combinação particular é positiva e é dada pelo intervalo FH.

Na segunda ilustração b), o raio incidente é refratado pela primeira superfície, refletido pela segunda, e finalmente refratado uma segunda vez pela primeira superfície vai até o ponto F, onde cruza o eixo. O ponto T, novamente determina a posição do plano principal e do ponto principal H.





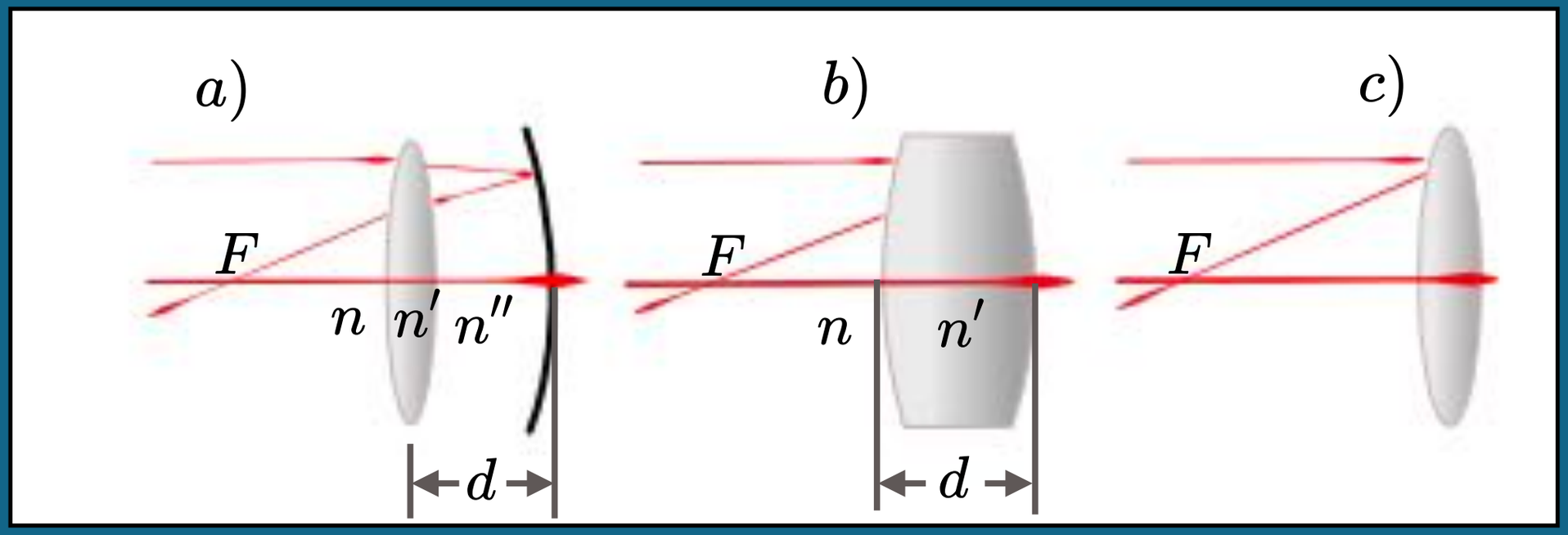
7) Fórmula para espelhos espessos:

Estas fórmulas serão dadas na notação de poder da lente para o caso mostrado na figura a) abaixo. Quando r_1, r_2 e r_3 são os raios das três superfícies da esquerda para a direita, o poder da combinação é dado por:

$$P = (1 - cP_1)(2P_1 + P_2 - cP_1P_2)$$

Onde, para o caso no diagrama a) temos que n"= n,

$$P_1 = (n' - n)(K_1 - K_2) \qquad P_2 = -2nK_3$$

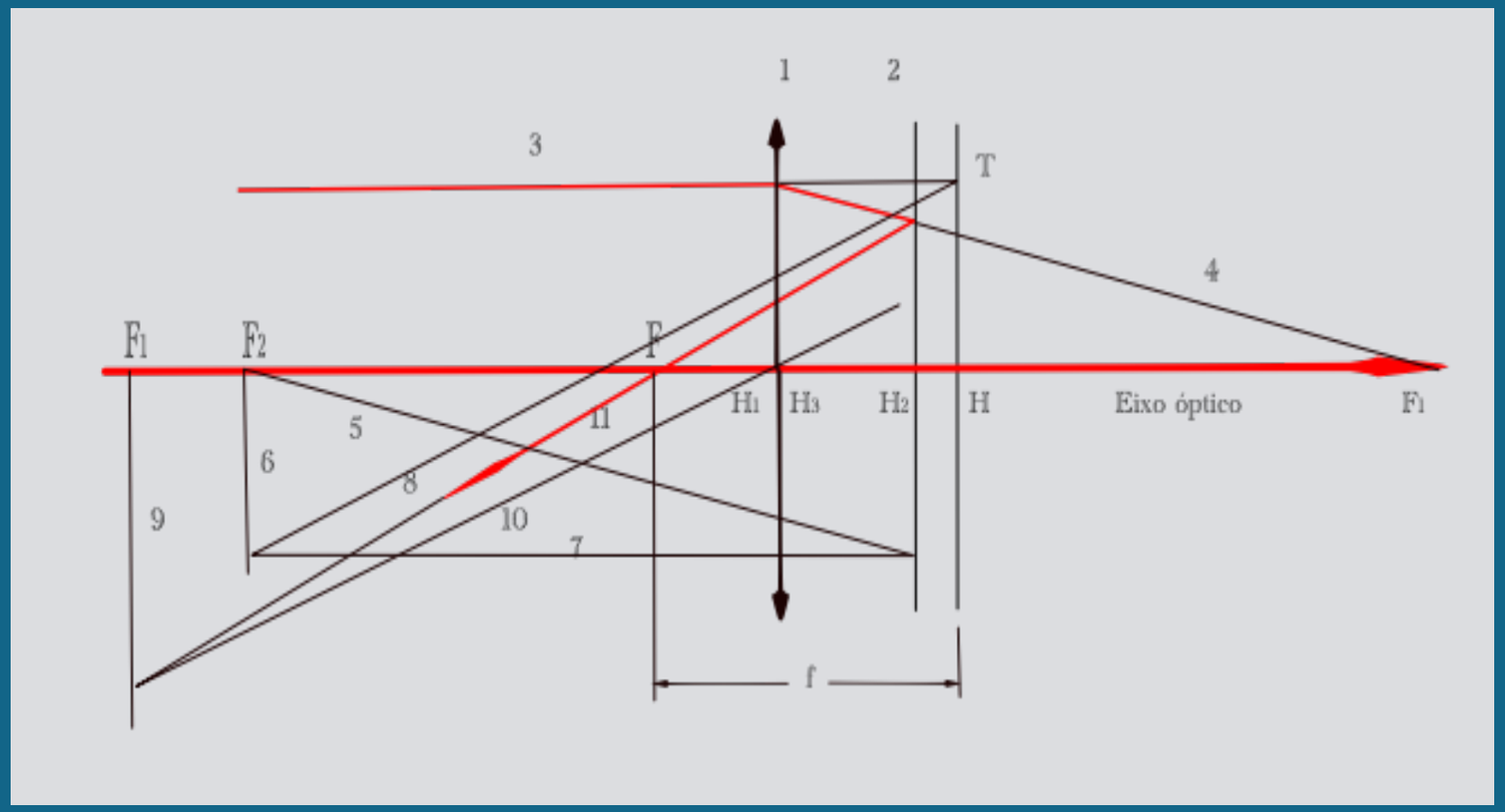


$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{r_1} \\ K_2 = \dfrac{1}{r_2} \\ K_3 = \dfrac{1}{r_3} \end{cases}$$

(Espelhos esféricos)

Dos índices de refração, n' representa o da lente e n do espaço circundante. A distância da lente ao ponto principal da combinação é dada por

$$H_1 H = \frac{c}{1 - cP_1}$$



Onde, H1 está localizado no centro da lente e c=d/n

EXEMPLO 3: Um espelho espesso tem como componente uma lente fina de índice n'= 1,50, raio r_1 = +50,0 cm e r_2 = -50,0 cm. Esta lente está situada a 10,0 cm na frente de um espelho de raio - 50,0 cm. Assumindo que o ar circunda ambos os componentes, encontre a) o poder da combinação, b) a distância focal e c) o ponto principal.

(Espelhos esféricos)

Solução:

a) O poder da lente é $P_1 = (1,50 - 1)\left(\frac{1}{0,50} - \frac{1}{-0,50}\right) = +2D$

$$c = \frac{d}{n} = \frac{0,10}{1} = 0,10m \quad P_2 = -2nK_3 = -2.\frac{1}{-0,5} = +4D$$

Finalmente o poder da combinação vale: $P = (1 - cP_1)(2P_1 + P_2 - cP_1P_2)$

$$P = (1 - 0,10 * 2)(2 * 2 + 4 - 0,10 * 2 * 4) = 0,8.(4 + 4 - 0,8) = +5,76D$$

b) Para um poder de +5,76 D teremos uma distância focal de:

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{5,76} = 0,173\ m\ = +17,3\ cm$$

c) A posição do ponto principal pode ser determinado pela expressão abaixo:

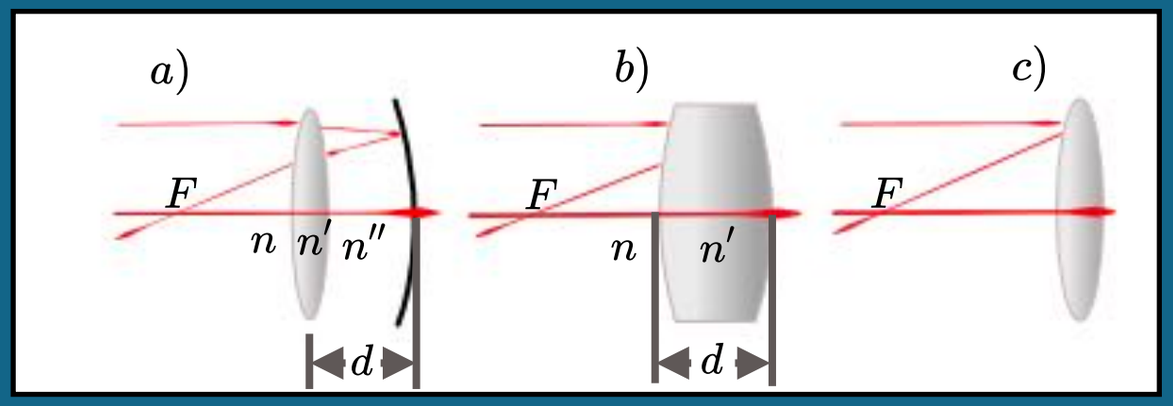
$$H_1H = \frac{c}{1 - cP_1} = \frac{0,10}{1 - 0,10 * 2} = 0,125\ m = +12,5\ cm$$

É, portanto, 12,5 cm à direita da lente, ou 2,5 cm atrás do espelho.

(Espelhos esféricos)

Outra Lente Espessa: Como segunda ilustração de um espelho espesso, considere uma lente grossa com uma das faces prateada, como mostrado na figura abaixo. Para o diagrama b), P_1 refere-se ao poder da primeira superfície, e P_2 refere-se ao poder da segunda superfície como um espelho de raio r_2 em um meio de índice n'. Em outras palavras,

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{n'-n}{r_1} \\ P_2 = -\dfrac{2n'}{r_2} \\ c = \dfrac{d}{n'} \end{cases}$$



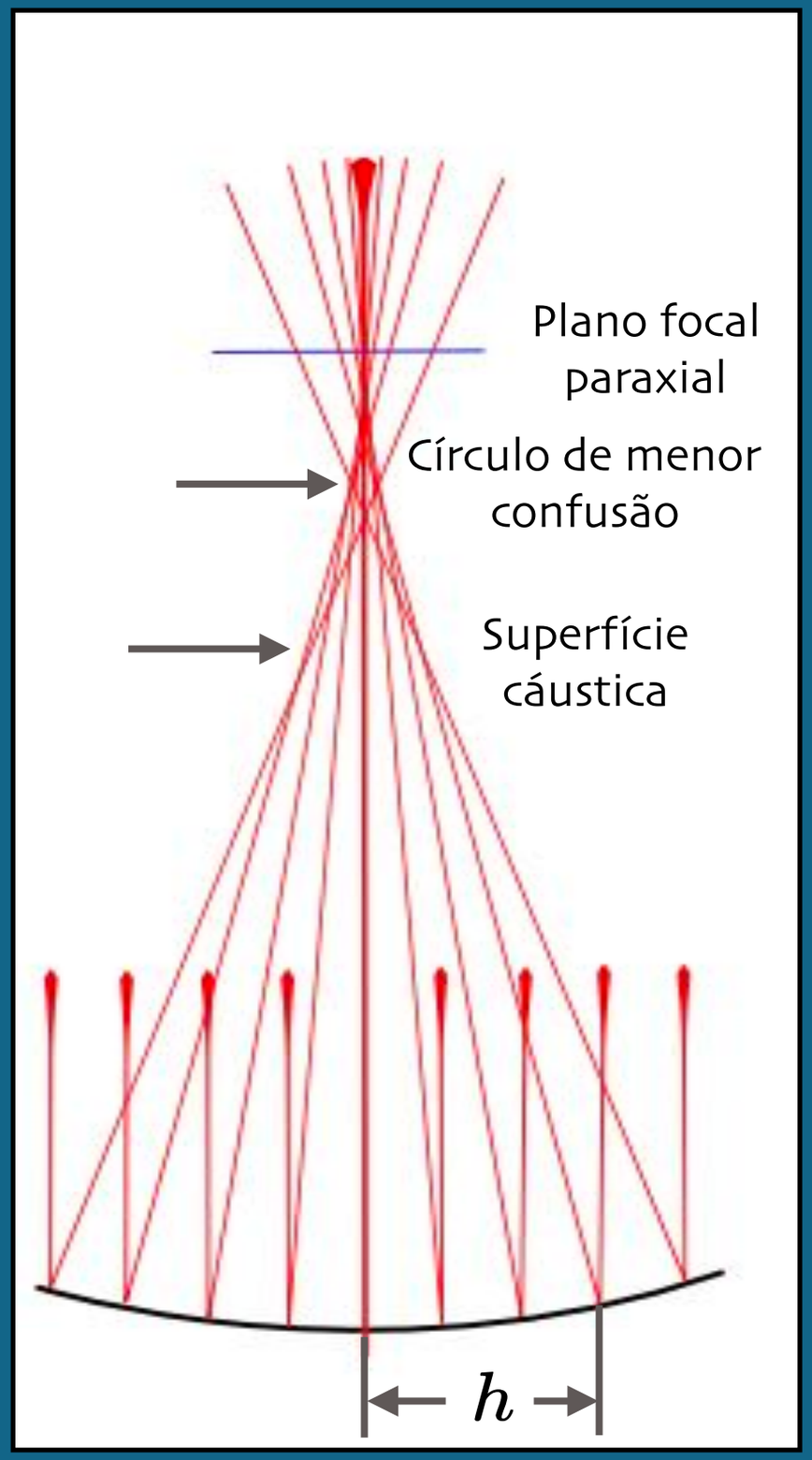
A terceira ilustração de um espelho espesso consiste de uma lente fina prateada na superfície traseira, como mostrado na figura c) abaixo. Este sistema pode ser considerado como um caso especial do diagrama a), onde o espelho tem o mesmo raio da superfície posterior da lente fina e o espaçamento d é reduzido a zero. De qualquer modo, teremos que:

$$P = 2P_1 + P_2$$

(Espelhos esféricos)

Neste caso, o ponto principal H coincide com o H_1 no centro comum da lente e do espelho. P_1 representa o poder da lente fina no ar e P_2 o poder do espelho no ar, ou P_1 representa o poder da primeira superfície de raio r_1 e P_2 representa o poder da segunda superfície que é um espelho de raio r_2 em um meio do índice n'.

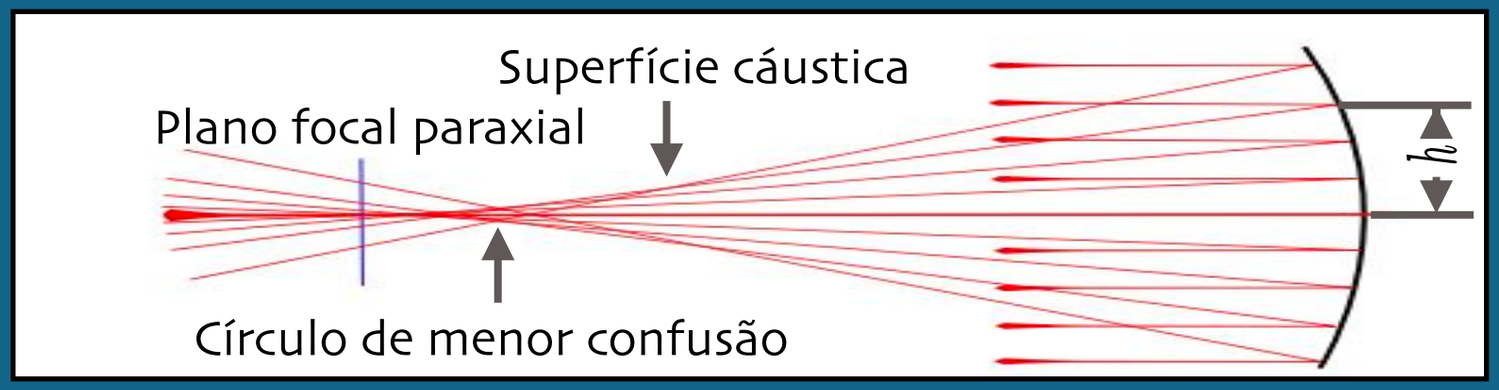
8) ABERRAÇÃO ESFÉRICA: Toda a análise feita nas seções anteriores sobre espelho esférico é valida somente na aproximação paraxial. Se, no entanto, a luz não estiver confinada à região paraxial, todos os raios de um ponto objeto não chegarão no foco em um ponto comum e temos um efeito indesejável conhecido como aberração esférica.

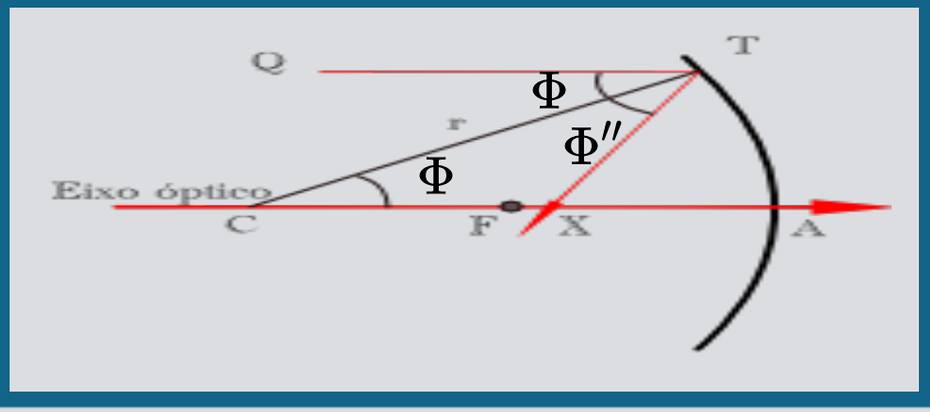


(Espelhos esféricos)

O fenômeno é ilustrado na figura abaixo, onde raios incidentes paralelos a distâncias crescentes h cruzam o eixo mais próximo do espelho. Todos esses raios formam uma superfície cáustica. Se um pequeno anteparo é colocado no plano focal paraxial F e depois movido em direção do espelho, um ponto é alcançado onde o tamanho do ponto imagem, que é circular é mínimo. Esse disco, que é indicado no diagrama, é chamado de círculo de menor confusão.

De acordo com a lei da reflexão aplicada ao ponto T, $\Phi'' = \Phi$. Tendo dois ângulos iguais, o triângulo CTX é isósceles e, portanto, CX = XT. Como uma linha reta é o caminho mais curto entre dois pontos, CT<CX+XT. Como CT é o raio do espelho e é igual a CA, então 1/2CA<CX. A figura a direita mostra que, à medida que T é movido em direção a A, o ponto X se aproxima de F e, no limite CX = XA = FA = 1/2CA.

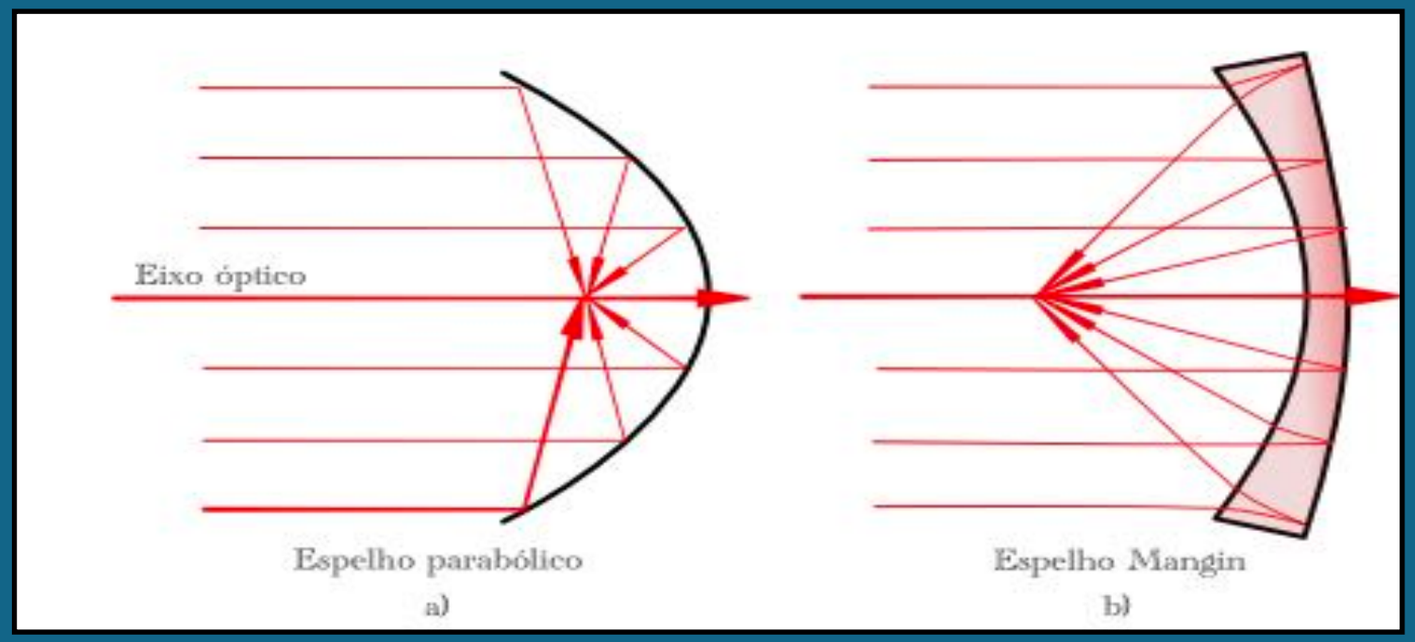


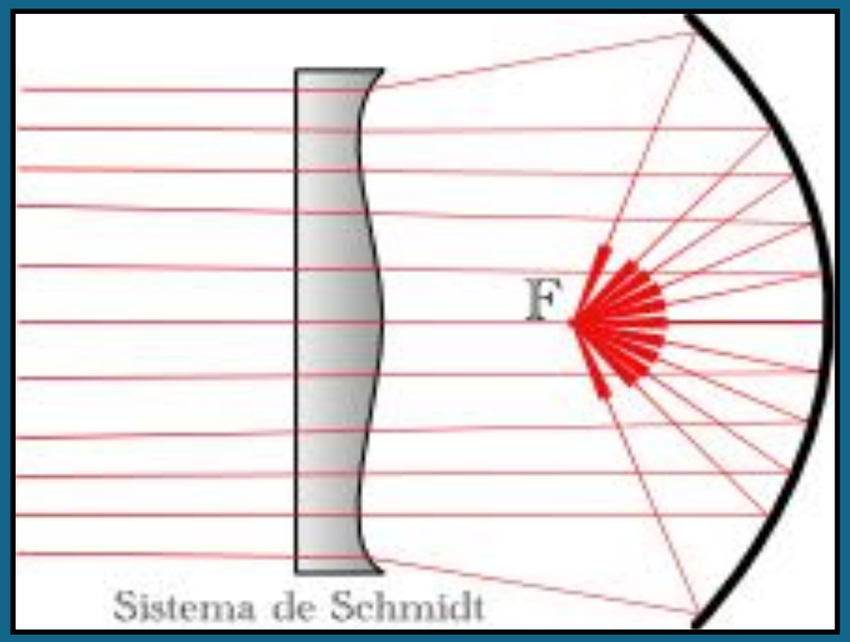


(Espelhos esféricos)

Nos últimos anos, vários métodos para reduzir a aberração esférica foram criados. Se, em vez de uma superfície esférica, a forma do espelho é a de um parabolóide de revolução, os raios paralelos ao eixo são todos focalizados no mesmo ponto. Outro método é mostrado na figura mais a direita, ele consiste na inserção de uma placa corretora na frente de um espelho esférico, desviando os raios em uma quantidade adequada antes da reflexão. Com a placa localizada no centro da curvatura do espelho, obtém-se um arranjo óptico conhecido como sistema de Schmidt.

Existe ainda um terceiro sistema, que é conhecido como espelho Mangin e é mostrado na parte central da figura abaixo.

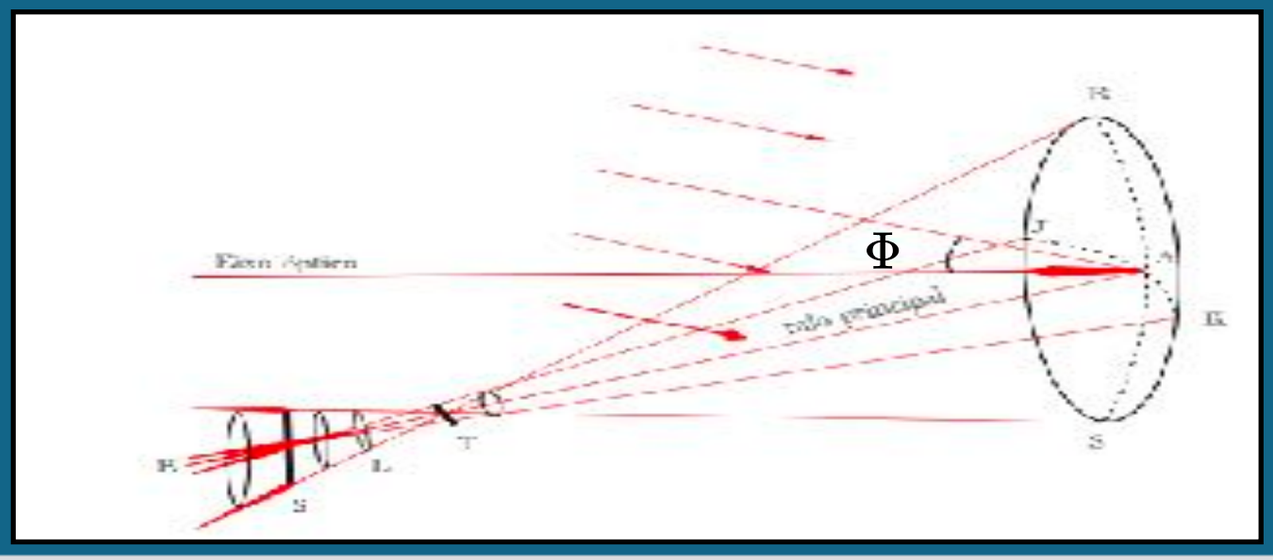




(Espelhos esféricos)

Neste sistema uma lente de menisco é empregada em que ambas as superfícies são esféricas. Quando a superfície traseira é prateada para formar o espelho côncavo, todos os raios paralelos são levados a um foco razoavelmente bom.

9) ASTIGMATISMO: Essa deformação na imagem ocorre quando um objeto está a alguma distância do eixo de um espelho côncavo ou convexo. Os raios incidentes, paralelos ou não, têm um ângulo apreciável Φ com o eixo do espelho. O resultado é que, em vez de uma imagem pontual, duas imagens de linhas perpendiculares são formadas. Este efeito é conhecido como astigmatismo e é ilustrado por um diagrama em perspectiva na figura abaixo.



(Espelhos esféricos)

Aqui os raios entrantes são paralelos enquanto os raios refletidos estão convergindo para duas linhas S e T. Os raios refletidos no plano vertical ou tangencial vão focar em T, enquanto os raios no plano horizontal ou sagital vão focar em S. Se um anteparo for colocada em E e movido na direção do espelho, a imagem se tornará uma linha vertical em S, um disco circular em L e uma linha horizontal em T.

Se as posições das imagens T e S dos pontos de objeto distantes forem determinadas para uma ampla variedade de ângulos, seus focos formarão uma superfície paraboloidal e plana, respectivamente, como mostrado na figura acima. À medida que a obliquidade dos raios diminui, aproximando-se do eixo, as imagens de linha não só se aproximam quando se aproximam do plano focal paraxial, mas também encurtam de comprimento. A aberração astigmática é determinada pela distância entre as superfícies T e S medidas ao longo do raio principal.

As equações que fornecem as duas posições de imagem astigmáticas são:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_r{}'} = -\frac{2}{r cos\phi} \qquad \frac{1}{s} + \frac{1}{s_s{}'} = -\frac{2cos\phi}{r}$$

(Espelhos esféricos)

Em ambas as equações, s e s' são medidas ao longo do raio principal. O ângulo Φ é o ângulo de inclinação do raio principal, e r é o raio de curvatura do espelho.

O sistema óptico de Schmidt, que será discutido mais adiante e o espelho de Mangin constituem instrumentos nos quais o astigmatismo de um espelho esférico é reduzido a um mínimo fazendo com que as duas superfícies focais T e S estejam bem próximas.

Um espelho paraboloidal é livre de aberração esférica mesmo para grandes aberturas, mas mostra diferenças S - T astigmáticas excepcionalmente grandes fora do eixo. Por esta razão, os refletores paraboloidais são limitados em seu uso para dispositivos que exigem uma pequena extensão angular, como telescópios astronômicos.