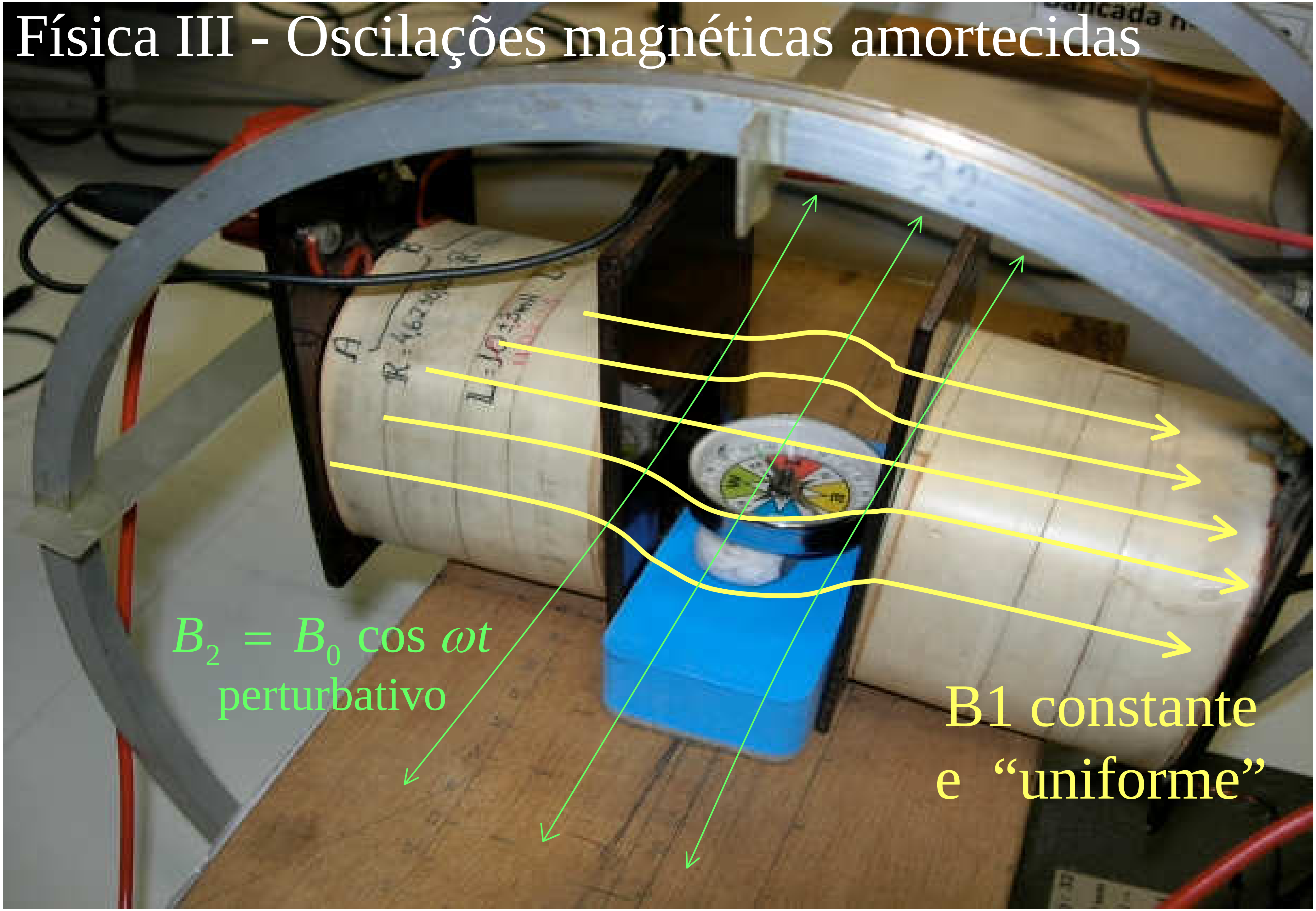
Instituto de Física - USP

FAP0214 - Física Experimental IV - LabFlex

Aula 03 - Exp 1.3
Oscilador RLC forçado amortecido

Manfredo H. Tabacniks
Alexandre Suaide
Eloisa Madeira
março 2008

Física III - Oscilações magnéticas amortecidas



Oscilações magnéticas amortecidas

$$I \frac{d^2}{dt^2}\theta + \gamma \frac{d}{dt}\theta + \mu B \theta = 0$$

atrito "viscoso"

torque restaurador

momento de inércia da agulha da bússola

Solução genérica

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(a+\omega i)t}$$

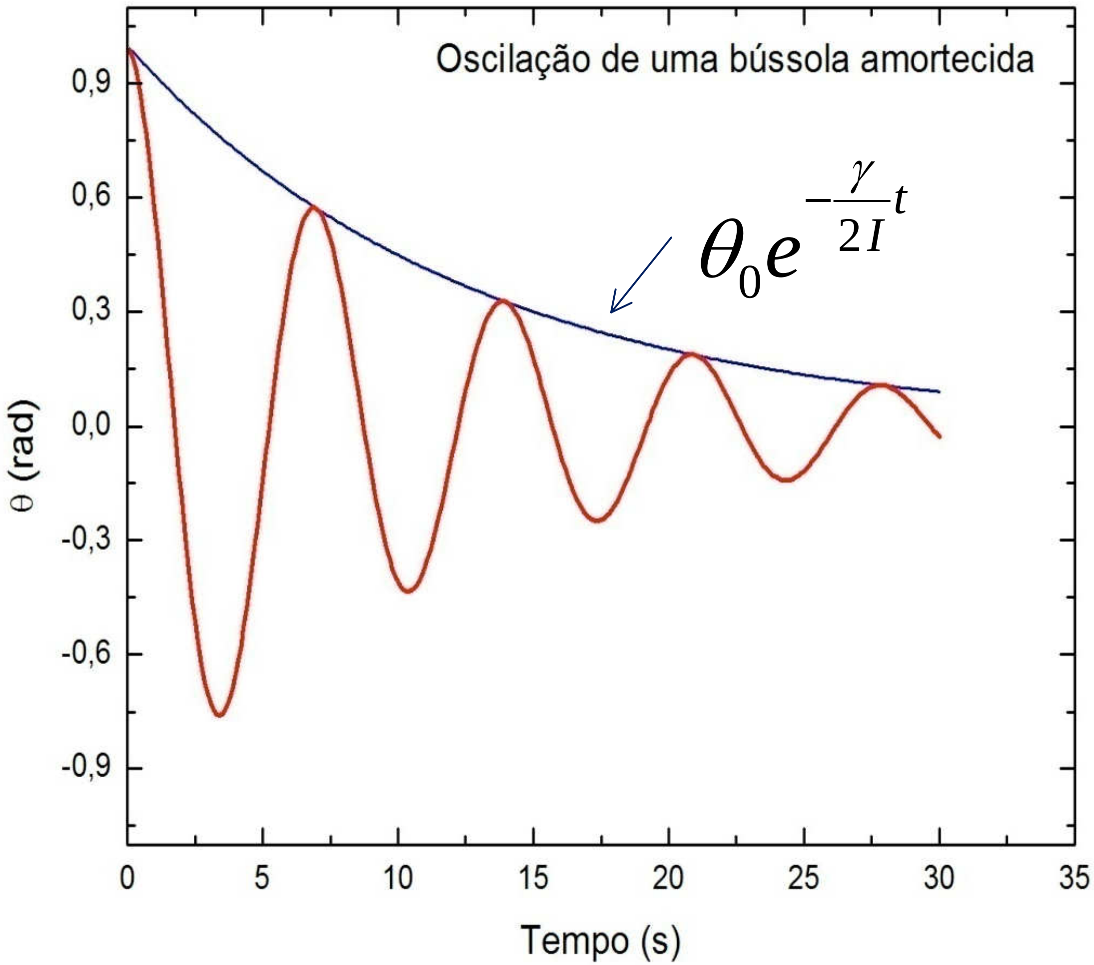
Movimento de uma bússola em um campo, com dissipação

O movimento oscilatório modulado por uma exponencial

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2I}t} \cos(\omega t)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4I^2}$$

com $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{\mu}{I}\right)B}$



Movimento oscilatório forçado amortecido de uma bússola em um campo magnético externo

A ED anterior
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta+\gamma\frac{d}{dt}\theta+\mu B\theta=0$$

A nova ED
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta+\gamma\frac{d}{dt}\theta+\mu B\theta+F\cos(\omega_{ext}t)=0$$

com
$$F\cos(\omega_{ext}t)=\mathrm{Re}\left[Fe^{i\omega_{ext}t}\right]$$

cuja solução é do tipo
$$\theta(t)=\mathrm{Re}\left[\theta_0 e^{i\omega_{ext}t}\right]$$

Movimento oscilatório forçado amortecido de uma bússola em um campo magnético externo

A nova ED
$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta+\gamma\frac{d}{dt}\theta+\mu B\theta+F\cos(\omega_{ext}t)=0$$

e a solução
$$\boxed{\theta(t)=\underbrace{\frac{\mu B}{I}\frac{1}{\left[\left(\omega_0^2-\omega_{ext}^2\right)^2+\frac{\gamma^2}{I^2}\omega_{ext}^2\right]^{1/2}}}_{\theta_0}\sin\left(\omega_{ext}t+\phi\right)}$$

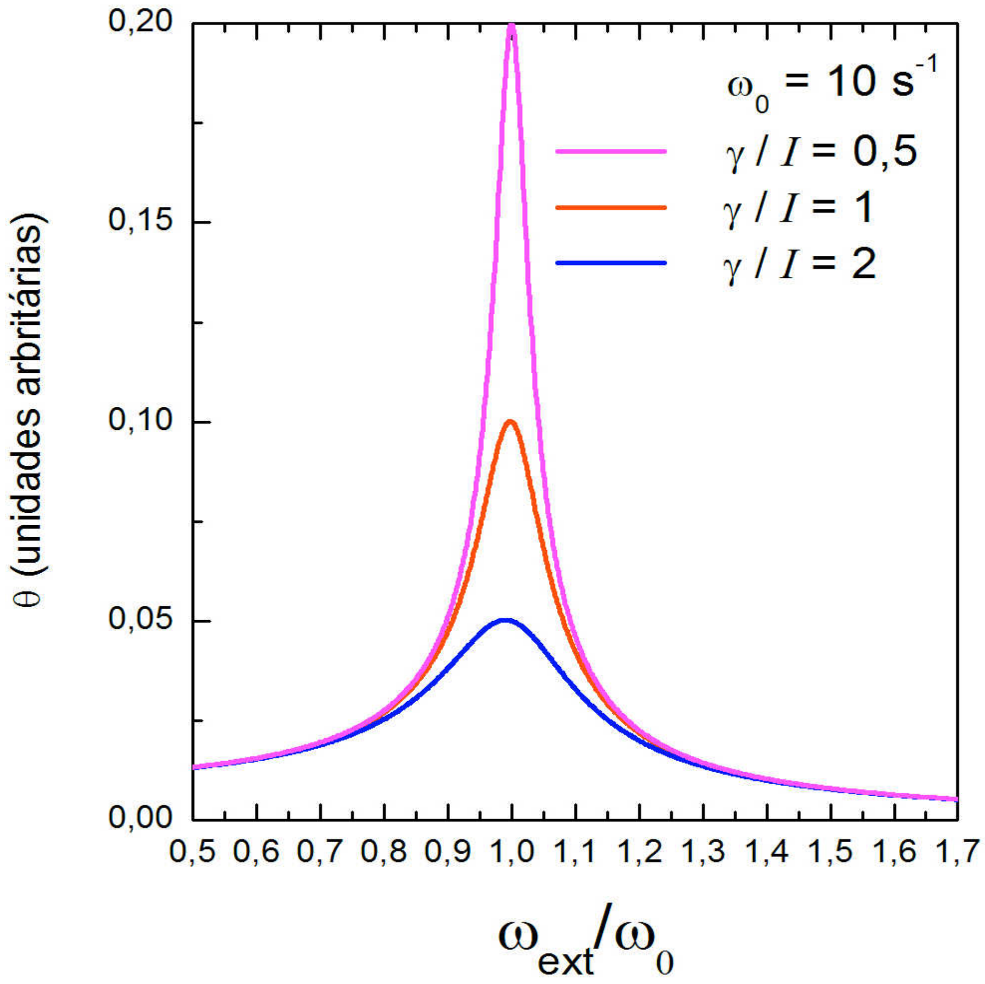
com
$$\omega_0^2=\frac{\mu}{I}B$$

Movimento oscilatório forçado amortecido de uma bússola em um campo magnético externo

A amplitude de oscilação depende da freqüência do campo externo

$$\theta_0 = \frac{\mu B}{I} \frac{1}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 \right)^2 + \frac{\gamma^2}{I^2} \omega_{ext}^2 \right]^{1/2}}$$

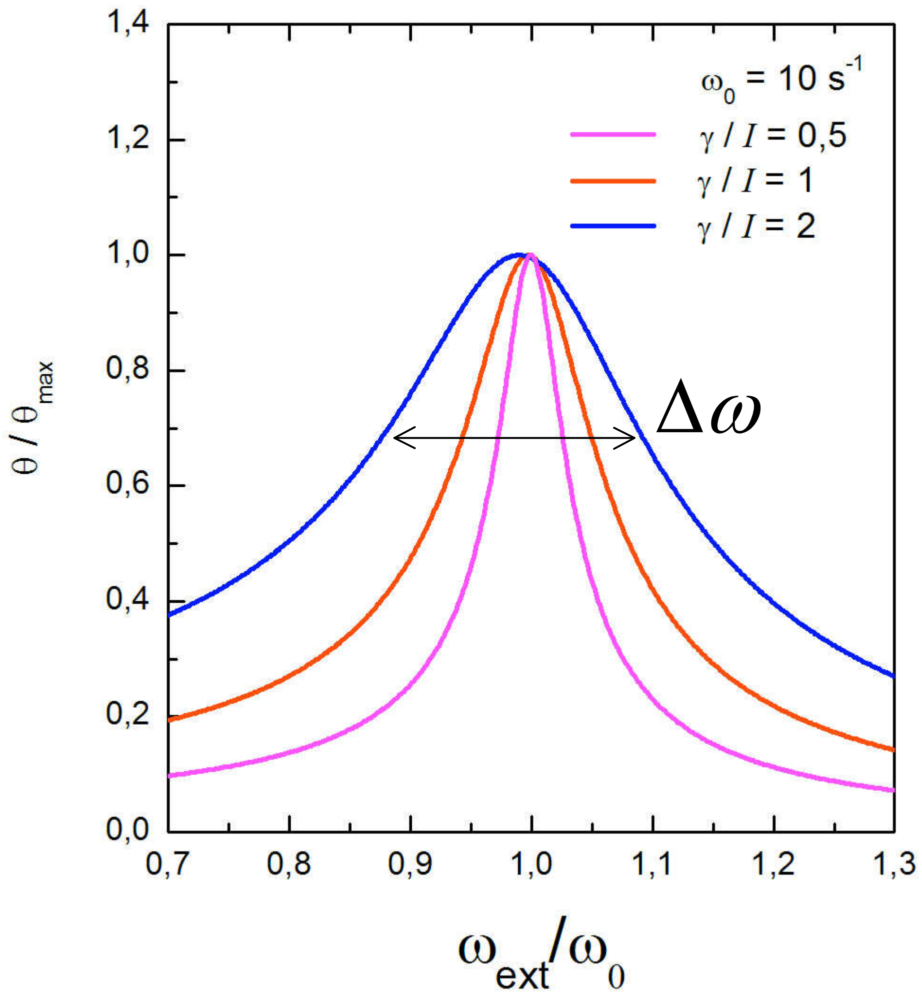
E possui um valor máximo: Ressonância



Movimento oscilatório forçado amortecido de uma bússola em um campo magnético externo

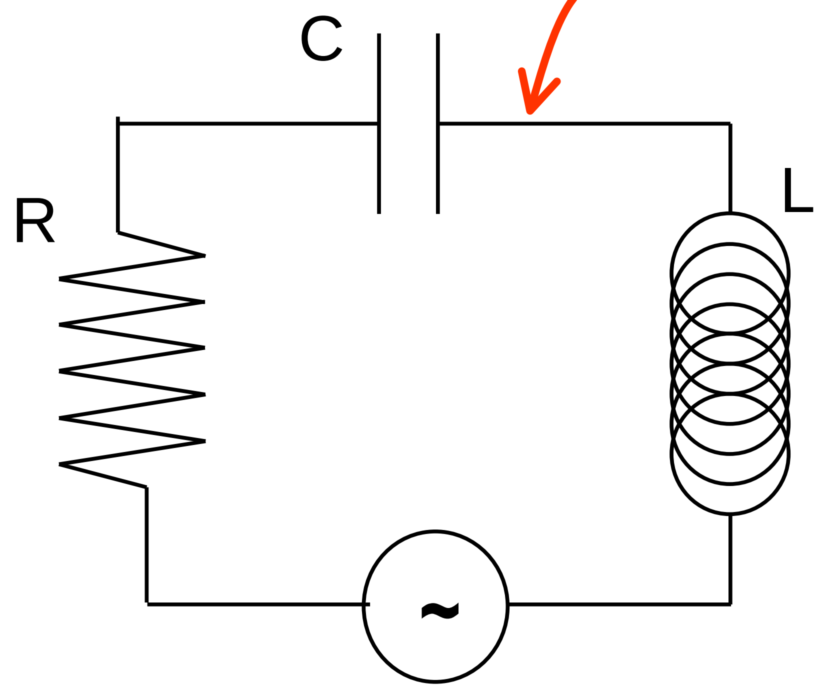
Qualidade "Q" $Q \propto \dfrac{\omega}{\Delta\omega}$

com Δω medido em $\theta \sim \dfrac{\theta_{MAX}}{\sqrt{2}}$



Experiência I.3 - Ressonância num circuito RLC

$$i = i_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[i_0 e^{j\omega t}\right]$$



É conveniente definir a corrente no circuito sem fase e incluir a fase nas outras grandezas.

$$V = V_0 \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\left[V_0 e^{j\omega t + \phi}\right]$$

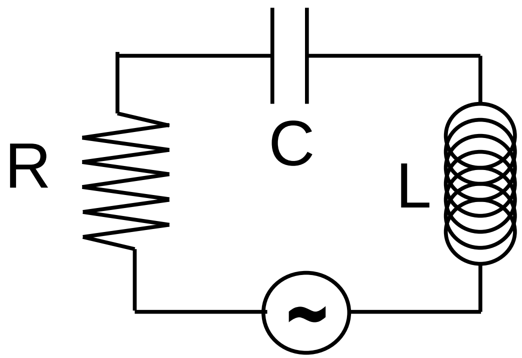
Impedância no capacitor, indutor e resistor

- Capacitor $$\hat{Z} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$ X_C

- Indutor $$\hat{Z} = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L$$ X_L

- Resistor $$\hat{Z} = R e^{0} = R$$

Circuito RLC em corrente alternada



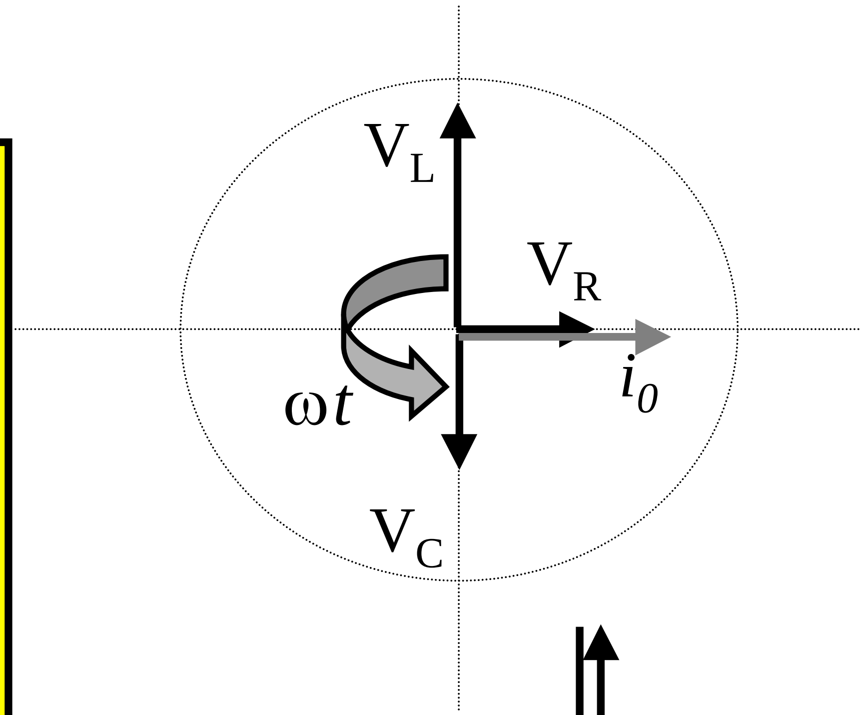
lei de ohm

$$\hat{V}(t) = \hat{Z}.\hat{i}(t)$$

$$V_R = i_0 R$$

$$V_C = i_0 X_C$$

$$V_L = i_0 X_L$$



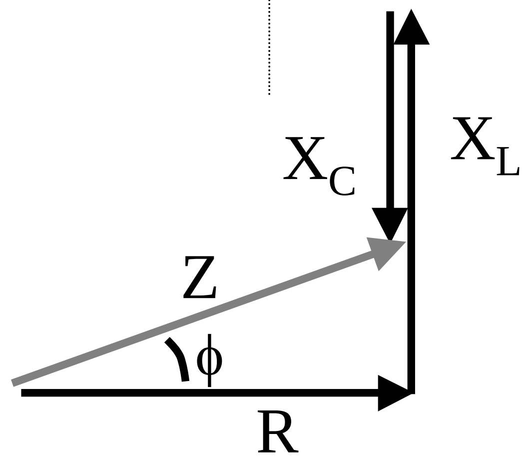
$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}$$

$$\hat{V}(t) = \hat{Z}.\hat{i}(t)$$

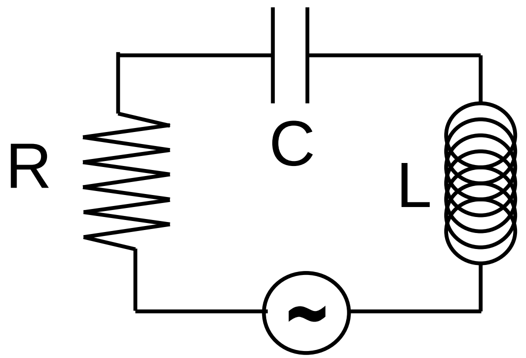
$$\hat{i}(t) = i_m e^{j\omega t}$$

fase “zero” da corrente é nula



$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Circuito RLC em corrente alternada



lei de ohm

$$\hat{V}(t) = \hat{Z}.\hat{i}(t)$$

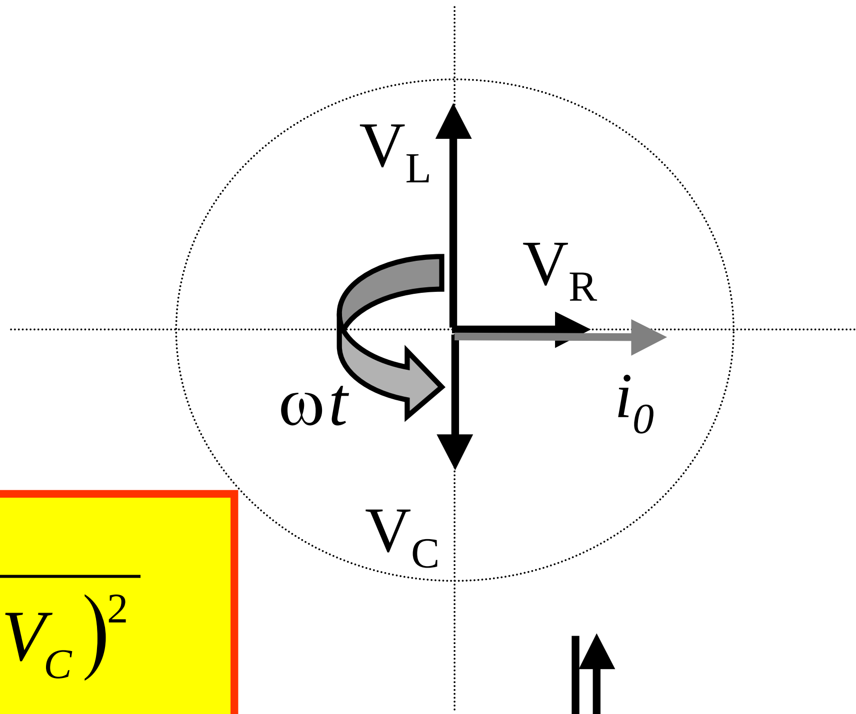
$$V_R = i_0 R$$

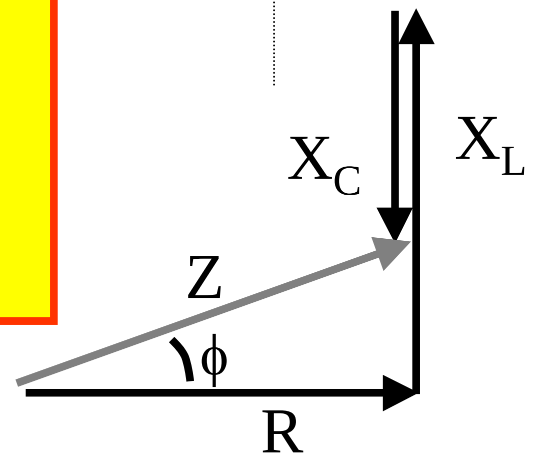
$$V_C = i_0 X_C$$

$$V_L = i_0 X_L$$

$$V_0 = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

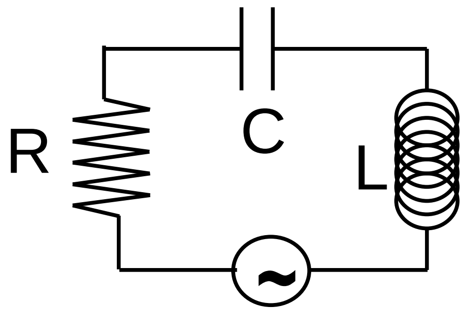
$$V_0 = i_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$





$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Circuito RLC em corrente alternada



$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}$$

$$V_0 = i_0\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}}$$

Ressonância de energia

$$wL = \frac{1}{wC}$$

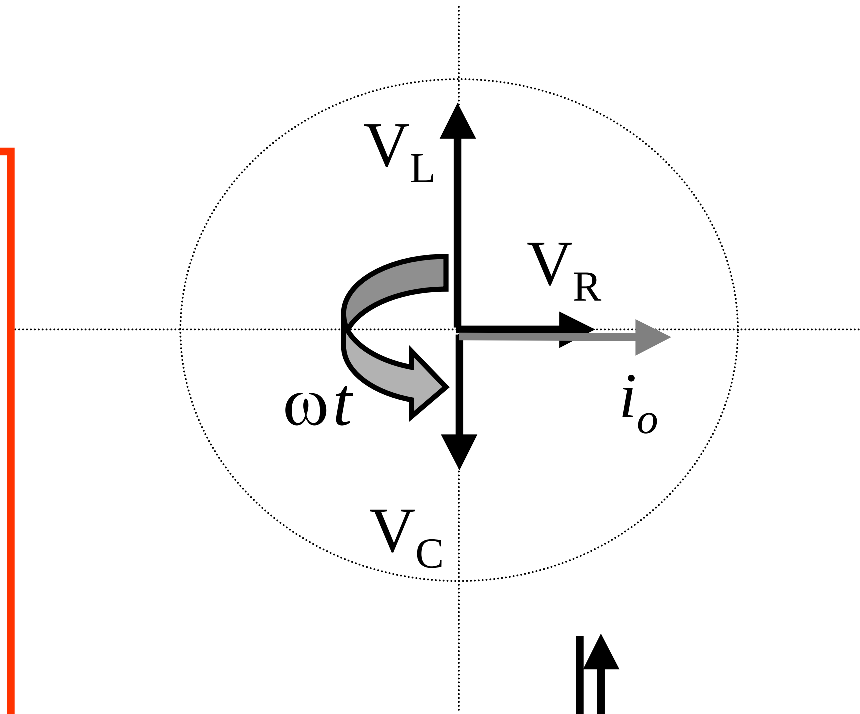
$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

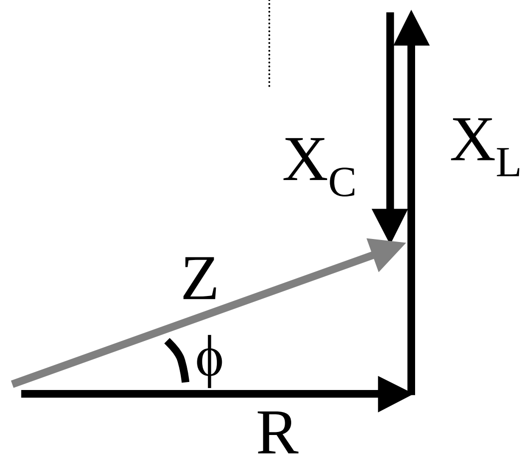
$$Z_0 = R$$

$$V_0 = R\, i_0$$

$$P = \frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{i_0}{\sqrt{2}}\cos\phi_0$$

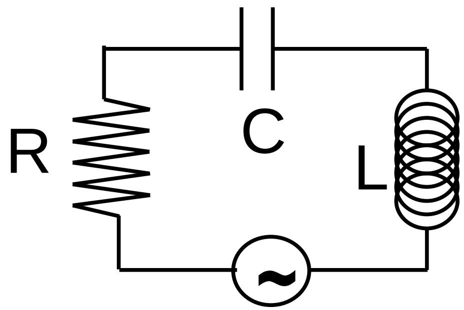
$$\boxed{P = \frac{V_0^2}{2R}}$$





$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Circuito RLC em corrente alternada



$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}$$

$$i(t) = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}}$$

$$wL = \frac{1}{wC}$$

Ressonância de amplitude

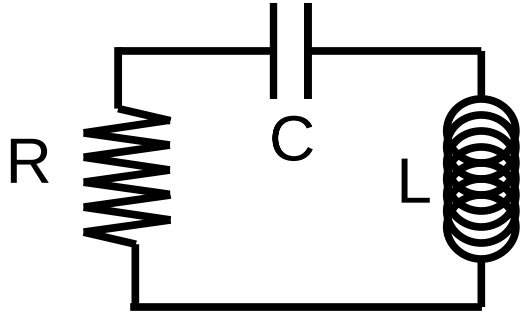
$$q(t) = \int i(t)\,dt = \frac{i_0}{w} sen(wt - \phi_0)$$

$$q_0 = \frac{i(t)}{w} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}}$$

$$w_1 = \sqrt{w_0 - \left(\frac{R^2}{2L^2}\right)}$$

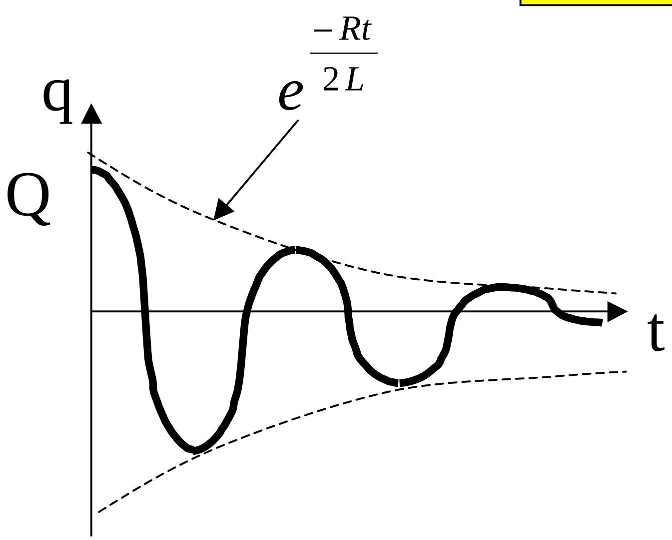
Poderíamos ter resolvido a ED...

$$-L\frac{dI}{dt}-\frac{q}{C}-IR=0 \qquad -L\frac{d^2q}{dt^2}-R\frac{dq}{dt}-\frac{q}{C}=0$$

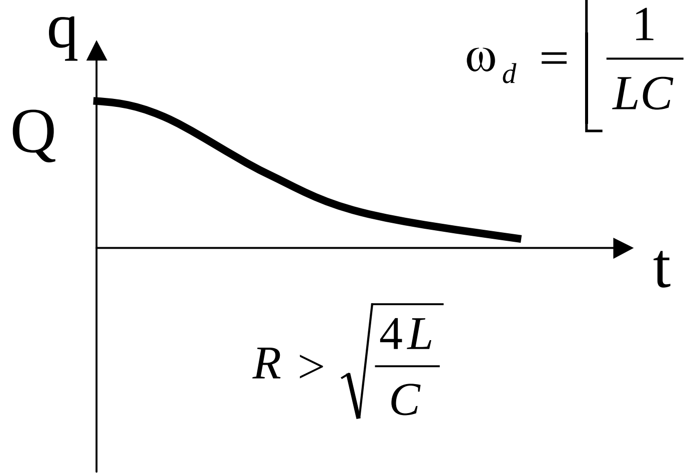


t = 0; q = Q

$$q=Qe^{\frac{-Rt}{2L}}\cos(\omega_d t+\delta)$$



$$\omega_d=\left[\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



$$R>\sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Atividades exp I.3

MATERIAL

1) Gerador de funções com baixa impedância de saída
2) bipolos:

    R = 10Ω, 1Ω
    L = 35 mHy (usar os conectores mais externos)
    C = 1μF

PROCEDIMENTO

1. Com os valores nominais, calcule a freqüência de ressonância do circuito;
2. Monte um circuito RLC série alimentado pelo gerador;
3. Para cada R [1 Ω; 10Ω], colete dados para construção de gráficos:
    a) potência de pico dissipada no resistor em função da freqüência angular ω
    b) tensão (de pico) no capacitor em função da freqüência angular ω
    c) fase entre a tensão e a corrente de alimentação (fornecida pelo gerador)
4. Usando os valores R, L e C <u>nominais</u>, calcule as funções $P(\omega)$, $\Delta\phi(\omega)$ e $V_C(\omega)$, e sobreponha-as nos respectivos gráficos;
5. Discuta a concordância (ou não) das curvas sobrepostas e possíveis correções para uma melhor concordância;
6. Extraia dos gráficos de dados <u>os valores experimentais</u> de R, L e C e o fator de qualidade Q;