Caos determinístico e mapa logístico
FAP0214 Física Experimental IV

Manfredo Harri Tabacniks
IFUSP

Leituras sugeridas

http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/
www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt
http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/complexidade.pdf
sunsite.dcc.uchile.cl/nuevo/ciencia/CienciaAlDia/volumen3/numero2/articulos/v3n2a4v1.PDF

http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html
http://www.thorsen.priv.no/services/mandelbrot/
http://www.pa.msu.edu/~bauer/applets/Chaos-Feigenbaum/feig.html

Plot de Feigenbaum e mapa logístico
http://www.ies.co.jp/math/java/misc/chaosb/chaosb.html

Modelo do diodo e equação diferencial
http://library.wolfram.com/webMathematica/Engineering/Circuit.jsp
http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/programs/Mech/three/JDiode.html
http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/chaos

Caos

Veja: www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt

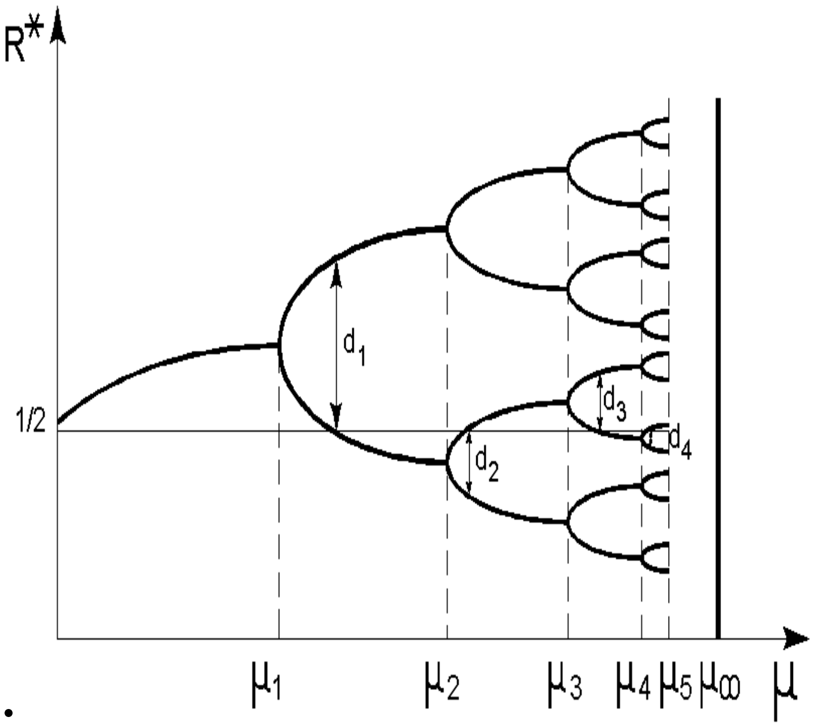
até página 31

Como se chega ao caos?

- Bifurcações de período
  - Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**)
  - Duplicação dos atratores

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4{,}6692016091029909....$$



Exemplo simples: o mapa logístico

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)

$$\frac{dN}{dt} = r\frac{N(K-N)}{K}$$

  - $\boldsymbol{r}$ = número Malthusiano, diz a taxa máxima de crescimento populacional
  - $\boldsymbol{K}$ = Máxima população possível para aquela situação

Exemplo simples: o mapa logístico

- Crescimento de populações
  - Equação logística – Pierre Verhulst (~1845)

$$x(t) = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1)e^{-rt}}, \text{ função sigmóide}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x), \text{ com } x = N/K$$

  - ***r*** = número Malthusiano,
    - Se r<0 → a população morre com o tempo x→0
    - Se r>0 → a população sobrevive

Exemplo simples: o mapa logístico

- Crescimento de populações
  - Mapa logístico

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

  - Neste caso, ***r*** é sempre maior que 1 e é denominado potencial biótico da população

  - Como é a evolução temporal da população em função da condição inicial (x_0) e do potencial biótico?

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Calculando o mapa logístico

- Dois métodos de cálculo
  - Excel
    - Fazer uma planilha e observar como as gerações evoluem com os parâmetros iniciais
  - Método gráfico
    - Diagrama de teia
      - Efeito visual mais direto mas depende de um pouco de habilidade gráfica ☺
      - Só por curiosidade...

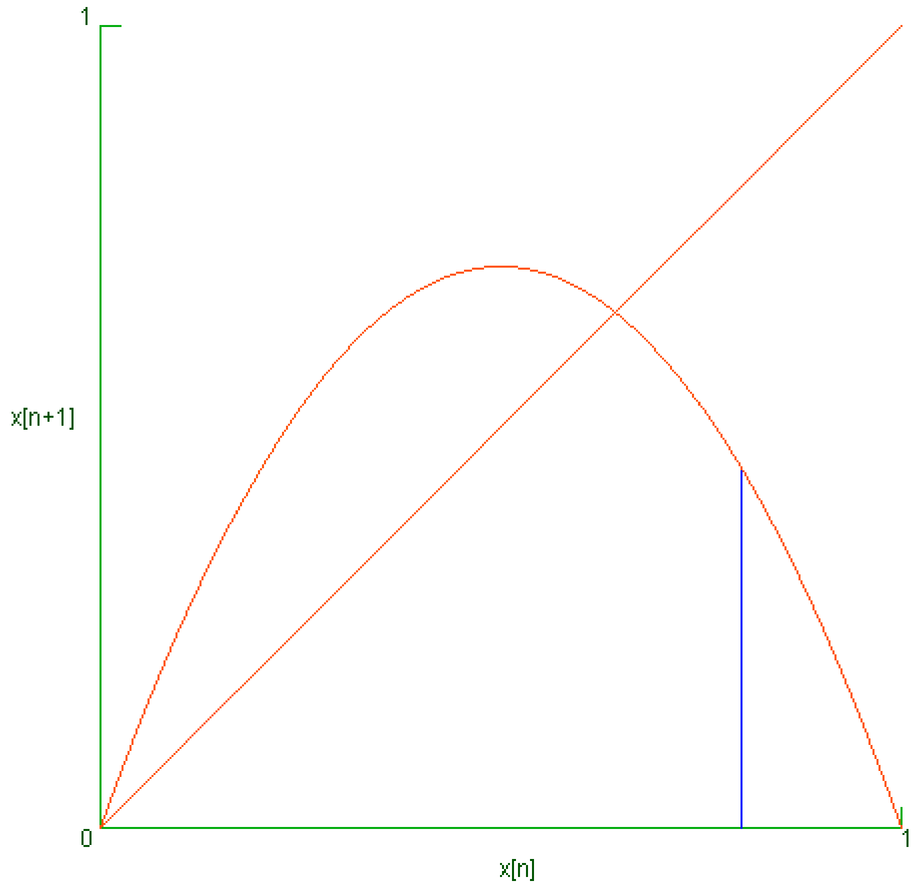
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Calculando o mapa logístico

- Diagrama de teia
  - Faz-se uma reta com c.a. = 1
  - Faz-se um gráfico superposto da função

$$f(x) = rx(1 - x)$$

  - Calcula-se $\boldsymbol{f(x)}$ para o valor de $\boldsymbol{x_0}$

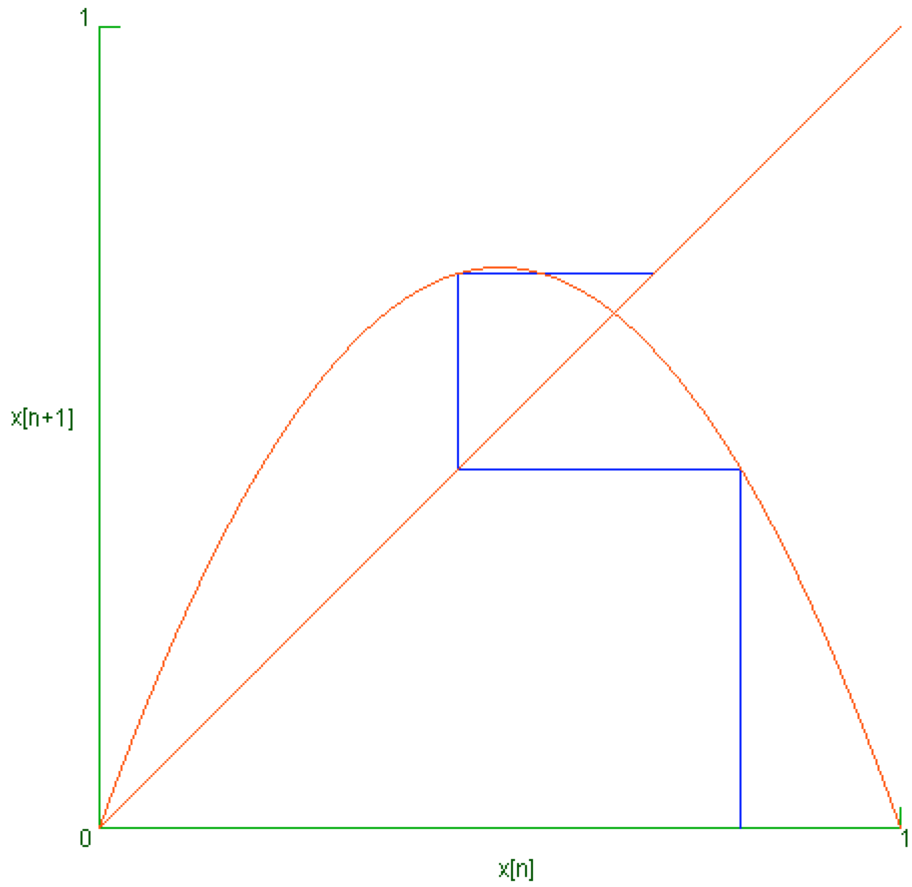


Prof. Alexandre Suaide - IFUSP
http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Calculando o mapa logístico

- Rebate-se o valor para a reta
  - Obtem-se assim o valor de x_1
- Calcula-se $f(x)$ para o valor de x_1
- Rebate-se novamente para a reta para obter x_2

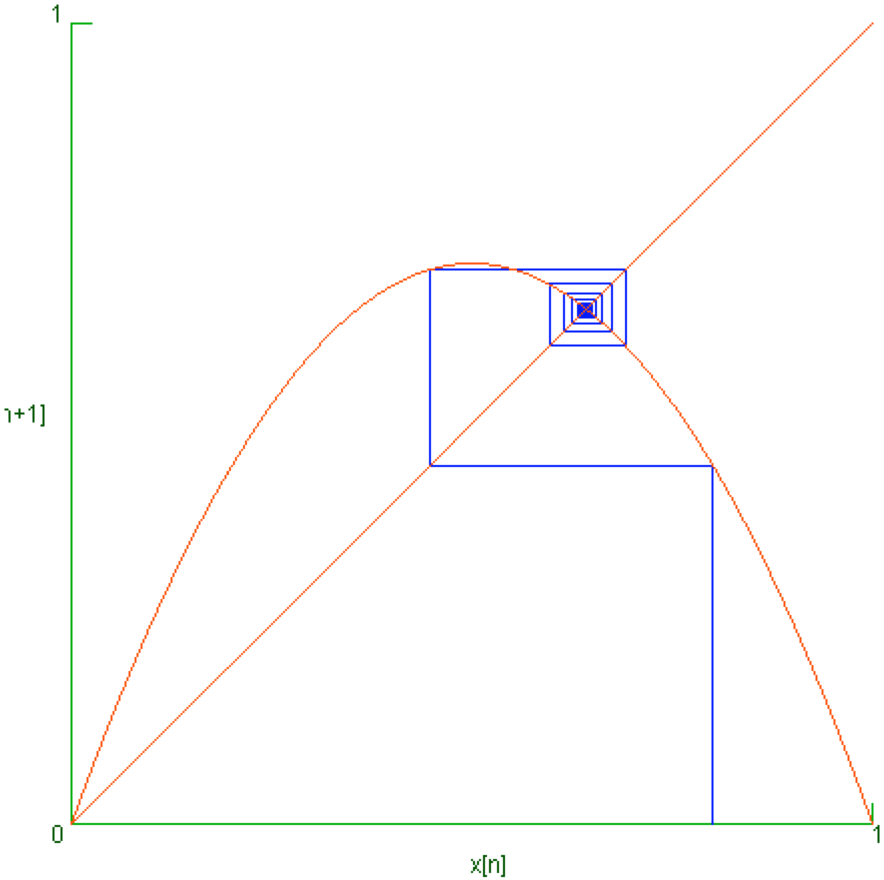


$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Calculando o mapa logístico

- E assim sucessivamente tantas quantas forem as interações desejadas

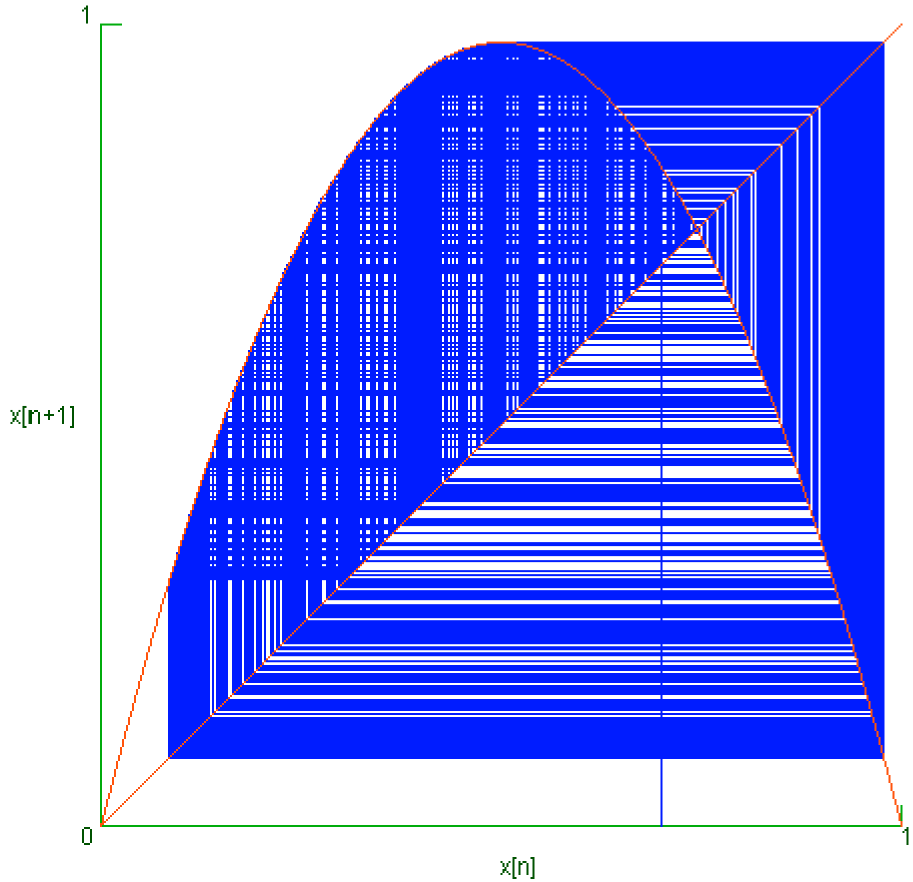
- Os vários comportamentos dependem de $\boldsymbol{r}$



$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

Calculando o mapa logístico
Exemplos

- População que atinge estabilidade
- População que morre com o tempo
- População em estado caótico



Prof. Alexandre Suaide - IFUSP
http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/

Mapa logístico

Veja: www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt

Página 13-16

Veja: http://www.ies.co.jp/math/java/misc/chaosb/chaosb.html

Depois de testar um pouco a página, recarregue-a, clique 3 vezes em “new message” e depois em “auto”. Note como é construído o diagrama de feigenbaum variando “a” e registrando os correspondentes valores de y (gráfico azul).

Um applet diferente que também constrói um mapa logístico.

http://www.pa.msu.edu/~bauer/applets/Chaos-Feigenbaum/feig.html

Veja as planilhas exemplo

Atividades

- Executar medidas XY no osciloscópio.

  Analisar V_C x V_R e V_L x V_R no circuito RLC

  Obter e interpretar as figuras de Lissajous (V_C x V_R)
  - Na próxima aula estudaremos o circuito RLD. Um bom exemplo pode ser encontrado em: http://www.fisicarecreativa.com/informes/infor_especial/Circuito_RLdiodo_2k4.pdf http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/chaos
- Construir o mapa logístico $X_{n+1} = R.X_n(1-X_n)$
  - Usar o Excel (ou equivalente) para calcular o mapa logístico em várias situações diferentes.
  - variar, $1<R<6$
  - variar $0 <X_0 < 1$
  - Mapear que condições {x_0 e R} levam a situações estáveis, quais são caóticas? Para quais valores {x_0 e R} há duplicação de amplitudes? Realize cálculo do número de Feigenbaum (com seus dados)

- VER APOSTILA (Caos 2007) PARA DETALHES (pode ser encontrada em "outros documentos" no site do labflex http://www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex/
  - Entregar os gráficos [X(n) x n] para vários R "interessantes". Destaque os principais fenômenos.
  - [X100, X101,X102,X103,X104,X105 em função de R, para 2<R<4]

- Ler os trabalhos:
  - http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/complexidade.pdf
  - sunsite.dcc.uchile.cl/nuevo/ciencia/CienciaAlDia/volumen3/numero2/articulos/v3n2a4v1.PDF