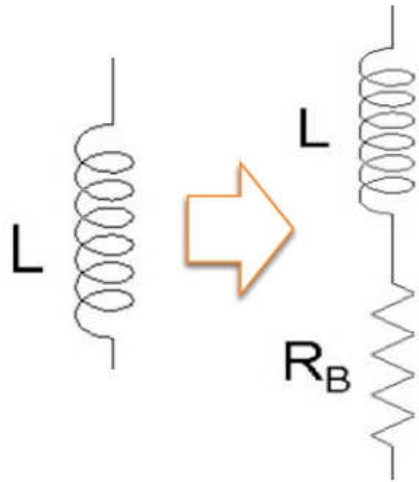


Caos determinístico e mapa logístico  
num circuito RLD  
FAP0214 Física Experimental IV  
2008/1

Manfredo Harri Tabacniks  
IFUSP

Reviendo atividade da semana passada  
Como medir  $R_L$  a partir da figura de Lissajous?

O indutor real pode ser modelado como um indutor ideal em série com um resistor



$$V_R = Ri = Ri_0 \cos(\omega t)$$

$$\hat{V}_L = j\omega L \hat{i} \Rightarrow V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

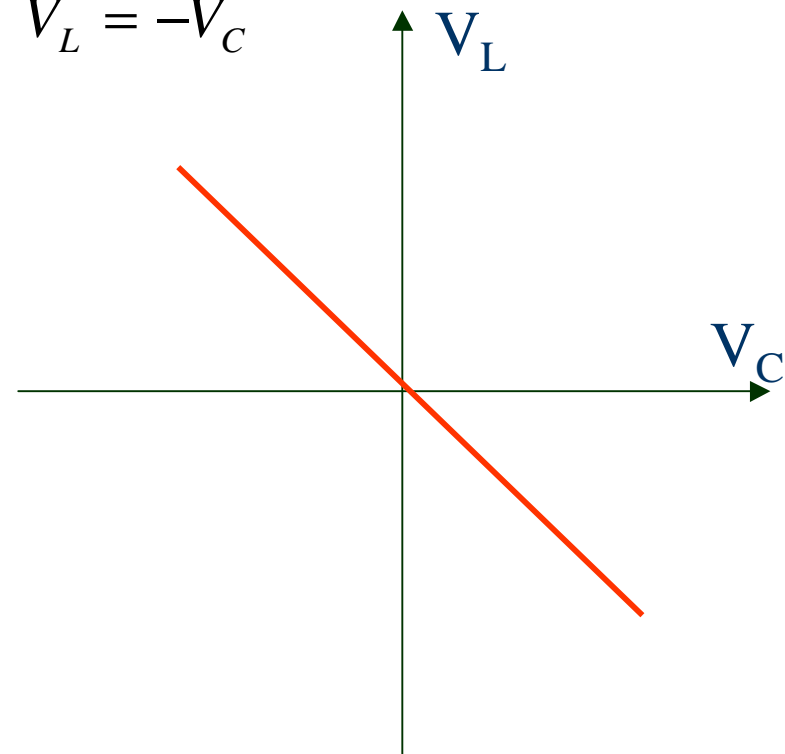
$$\hat{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \hat{i} \Rightarrow V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

## LC ideal

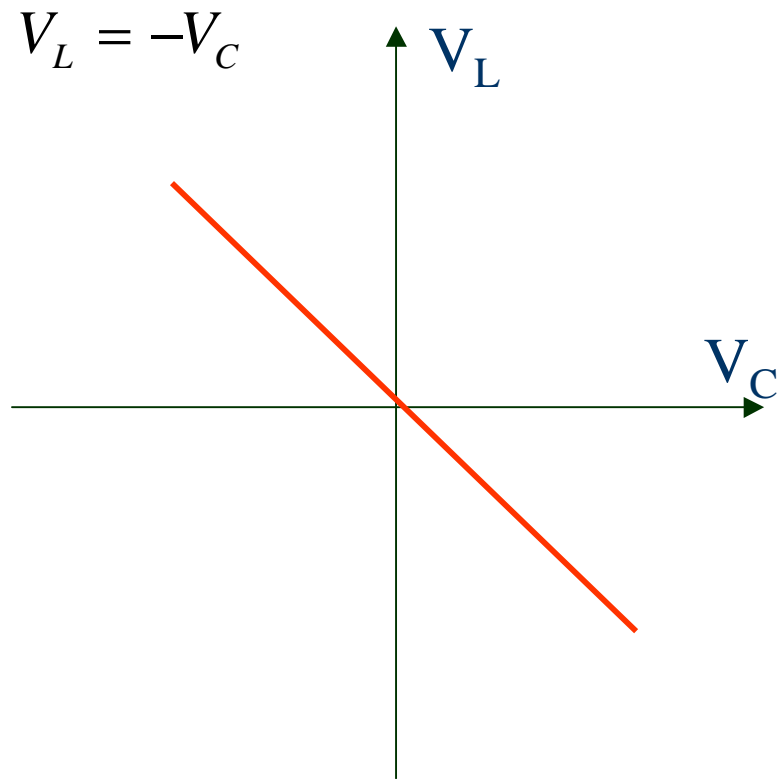
Na ressonância em corrente:

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$V_L = -V_C$$



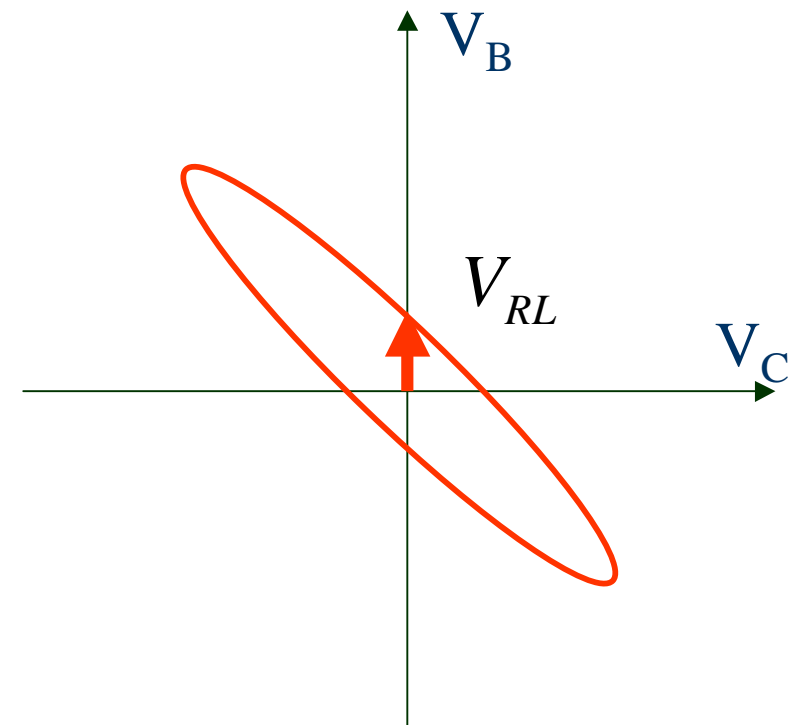
O indutor real pode ser modelado como um indutor ideal em série com um resistor



## LC real

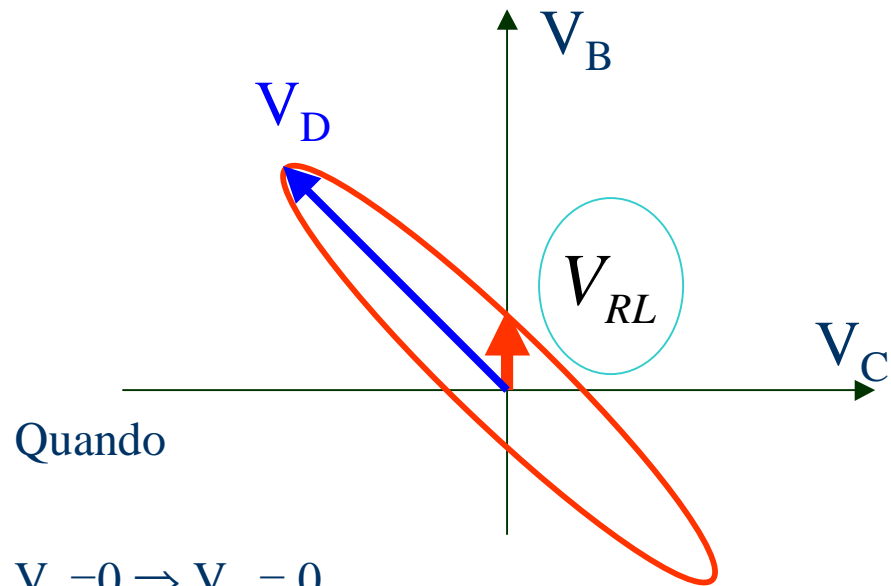
A tensão medida na bobina é  $V_B$

$$V_B = \sqrt{V_L^2 + V_{RL}^2}$$



Se  $V_C=0 \Rightarrow V_L = 0$

O indutor real pode ser modelado como um indutor ideal em série com um resistor



Quando

$$V_C=0 \Rightarrow V_L = 0$$

$$V_C = \text{máximo} \Rightarrow V_L = \text{máximo}$$

$$V_R = Ri = Ri_0 \cos(\omega t)$$

$$\hat{V}_L = j\omega \hat{L} i \Rightarrow V_L = \omega L i_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{V}_C = -\frac{j}{\omega C} \hat{i} \Rightarrow V_C = \frac{i_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Na ressonância em corrente

$$V_D = \sqrt{V_{L0}^2 + V_{C0}^2}$$

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$V_L = j \frac{L}{\sqrt{LC}} i \quad V_C = -j \frac{\sqrt{LC}}{C} i$$

$$V_D = i_0 \sqrt{2 \frac{L}{C}}$$

assim

$$\frac{2V_{RL}}{2V_D} = \frac{R}{\sqrt{2 \frac{L}{C}}}$$

O indutor real pode ser modelado como um indutor ideal em série com um resistor

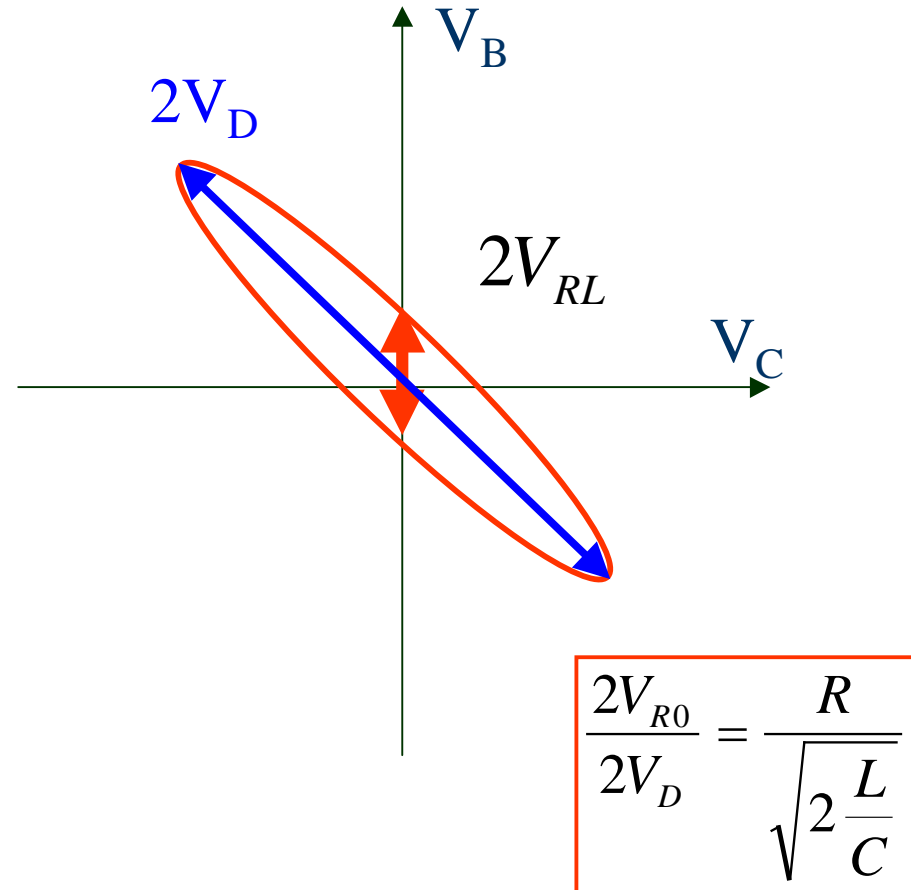
Na ressonância em corrente

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$V_L = j \frac{L}{\sqrt{LC}} i \quad V_C = -j \frac{\sqrt{LC}}{C} i$$

$$V_D = i_0 \sqrt{2 \frac{L}{C}}$$

$$V_{RL} = i_0 R_L$$



$$\frac{2V_{R0}}{2V_D} = \frac{R}{\sqrt{2 \frac{L}{C}}}$$

## Retornando ao diagrama logístico e caos no circuito RLD

# Leituras sugeridas

## Textos gerais sobre caos

<http://www.dfn.if.usp.br/~suaide/>

[www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt](http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt)

<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/complexidade.pdf>

[sunsite.dcc.uchile.cl/nuevo/ciencia/CienciaAIDia/volumen3/numero2/articulos/v3n2a4v1.PDF](http://sunsite.dcc.uchile.cl/nuevo/ciencia/CienciaAIDia/volumen3/numero2/articulos/v3n2a4v1.PDF)

## Diagramas e Fractais

<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html>

<http://www.thorsen.priv.no/services/mandelbrot/>

## Plot de Feigenbaum e mapa logístico

<http://www.ies.co.jp/math/java/misc/chaosb/chaosb.html>

<http://www.pa.msu.edu/~bauer/applets/Chaos-Feigenbaum/feig.html>

## Modelo do diodo e equação diferencial

<http://library.wolfram.com/webMathematica/Engineering/Circuit.jsp>

<http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/programs/Mech/three/JDiode.html>

<http://webusers.physics.umn.edu/~rlua/chaos>



## Mapa logístico

Motivação:

Seja  $X_n$  a população de uma determinada espécie na geração  $n$ .

A cada geração uma parte da população morre e filhotes nascem. O número de indivíduos na geração seguinte deve ser aproximadamente proporcional ao número de indivíduos na geração anterior:

$X_{n+1} = \mu X_n$  onde o parâmetro  $\mu > 1$  representa a taxa de crescimento

Se a população fica muito grande pode faltar comida. Então a taxa de crescimento não pode ser constante. Substituímos  $\mu$  por

$$\mu(1 - X_n/X_c)$$

onde  $X_c$  é o maior número de indivíduos que pode sobreviver com os recursos existentes.

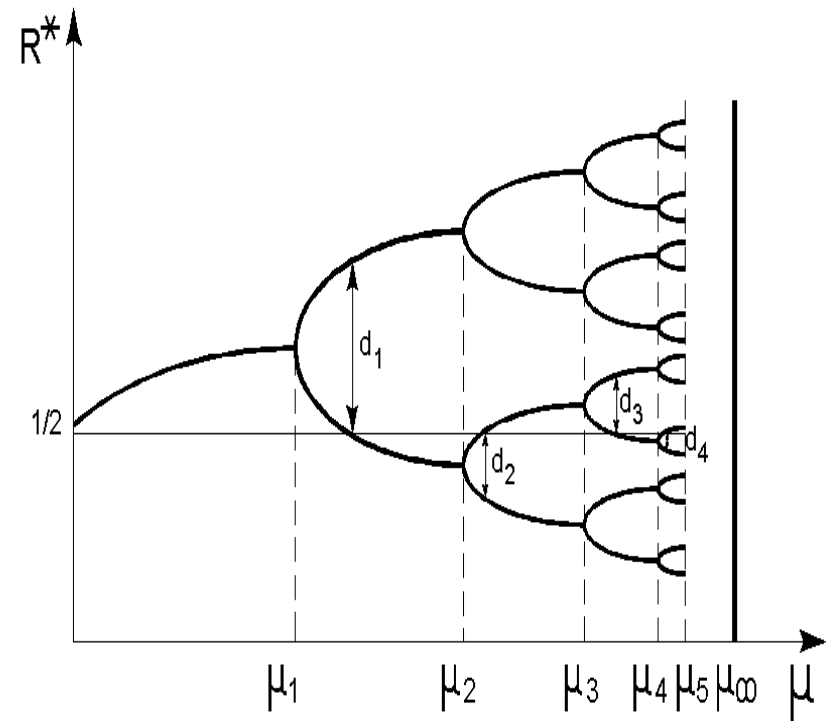
$$\frac{X_{n+1}}{X_c} = \mu \frac{X_n}{X_c} \left(1 - \frac{X_n}{X_c}\right) \qquad x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

# Número de Feigenbaum

- Bifurcações de período
  - Rota mais comum para o caos (**cenário de Feigenbaum**)
  - Duplicação dos atratores

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mu_n - \mu_{n-1})}{(\mu_{n+1} - \mu_n)} = \delta$$

$$\delta = 4,6692016091029909....$$



# Calculando o mapa logístico

- Dois métodos de cálculo

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

- Excel

- Fazer uma planilha e observar como as gerações evoluem com os parâmetros iniciais

- Veja planilhas exemplo:

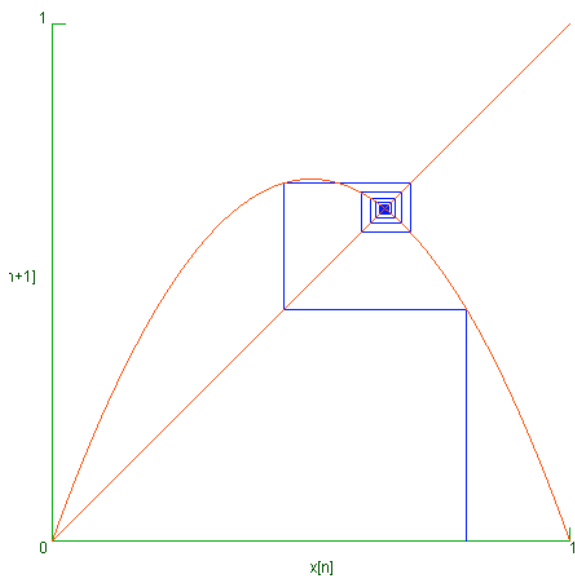
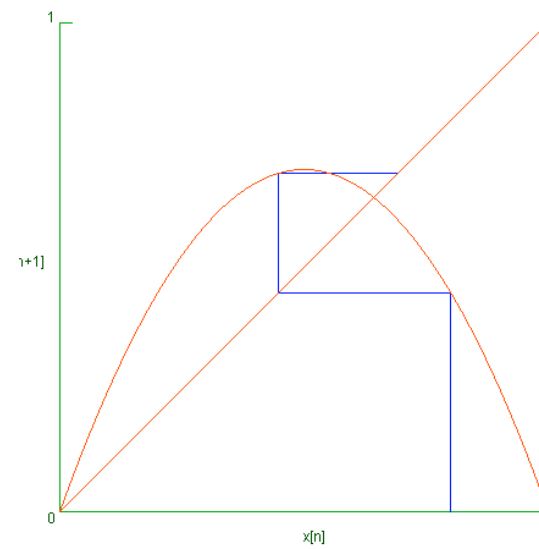
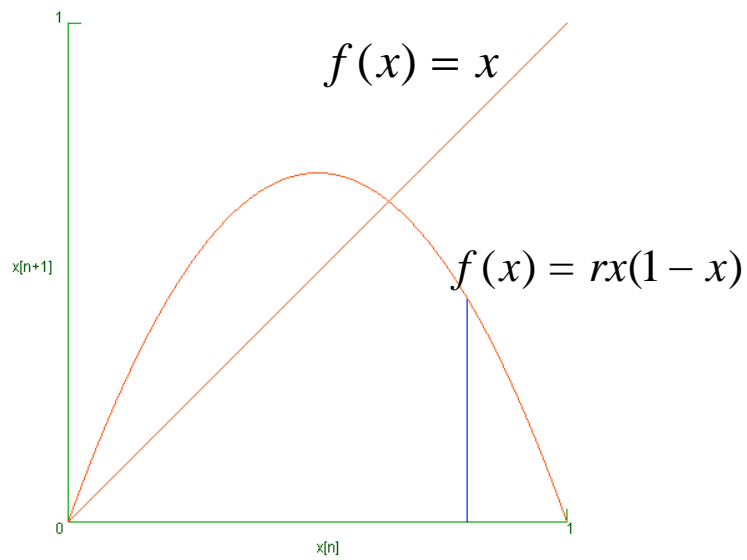
- <http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos1.xls>
      - <http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos2.xls>
      - <http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos3.xls>

- Método gráfico

- Diagrama de teia

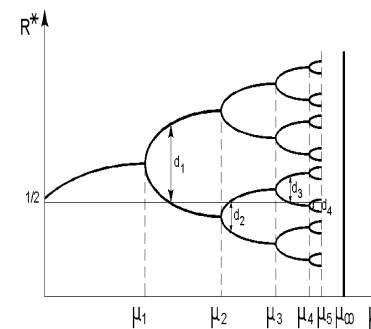
- Efeito visual mais direto mas depende de um pouco de habilidade gráfica 😊
      - Só por curiosidade...

# Calculando o mapa logístico: Diagrama de teia



- População atinge estabilidade
- População morre com o tempo
- População em estado caótico

Recolher os valores 'finais' de  $x_\infty(r)$  e graficá-los contra  $r$



# Mapa logístico

Veja: [www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt](http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Cursos/EscolaAvancadaCaos.ppt)

Página 13-16

Veja: <http://www.ies.co.jp/math/java/misc/chaosb/chaosb.html>

Depois de testar um pouco a página, recarregue-a, clique 3 vezes em “new message” e depois em “auto”. Note como é construído o diagrama de feigenbaum variando “a” e registrando os correspondentes valores de y (gráfico azul).

Um applet diferente que também constrói um mapa logístico.

<http://www.pa.msu.edu/~bauer/applets/Chaos-Feigenbaum/feig.html>

Veja as planilhas exemplo

<http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos1.xls>

<http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos2.xls>

<http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/caos3.xls>

# Objetivos

- Estudar o comportamento de um circuito RLD
  - Determinar seu mapa logístico  $V_0 > 3V$
  - Estimar o número de Feigenbaum

# Metodologia

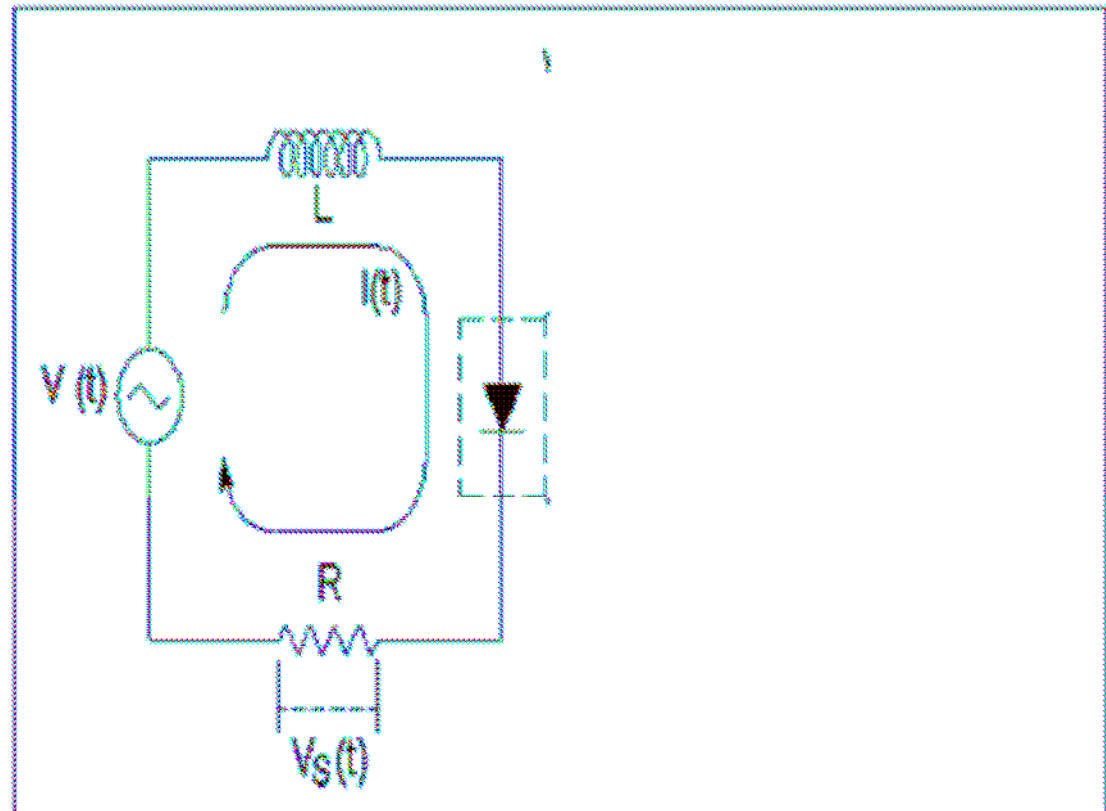
- Estudar um circuito RLC série ( $L \sim 1\text{mH}$ (azul),  $C \sim 1\mu\text{F}$ ,  $R \sim 1\Omega$ )
  - Medir  $V_R$  e  $V_C$  com osciloscópio em modo XY em torno da frequência de ressonância.
  - Graficar  $V_C$  em função de  $\omega = 2\pi f$ . Ajustar um modelo teórico. Veja planilha exemplo em <http://www.if.usp.br/manfredo/aulas/2008/ajusterlc.xls>
- Fazendo  $V_0 > 3V$ , observar  $V_D \times V_G$  em modo XY e Yt no osciloscópio. Use o gatilho no sinal de  $V_G$  e procure estabilizar a imagem;
  - Para  $f$  aproximadamente  $> 10\text{kHz}$  e mantendo  $V_G$  fixo, determine as frequências em que ocorre duplicação de caminhos; Verifique se essas frequências de transição evoluem conforme previsto pelo número de Feigenbaum;
  - Agora, com mais cuidado, meça e grafique  $V_D \text{ max}$  em função de  $\omega$ , nos intervalos de  $\omega$  em que isso for possível.

# Circuito RLD

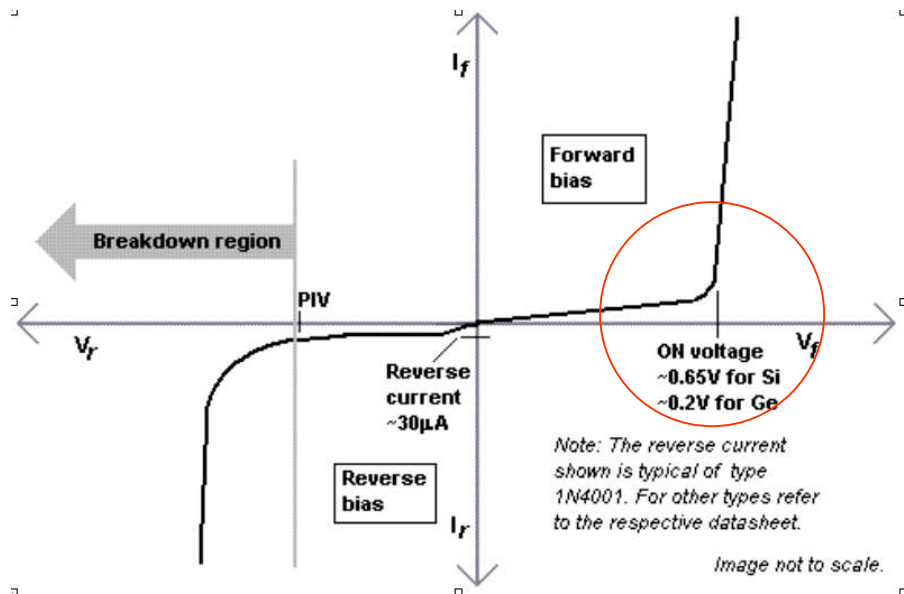
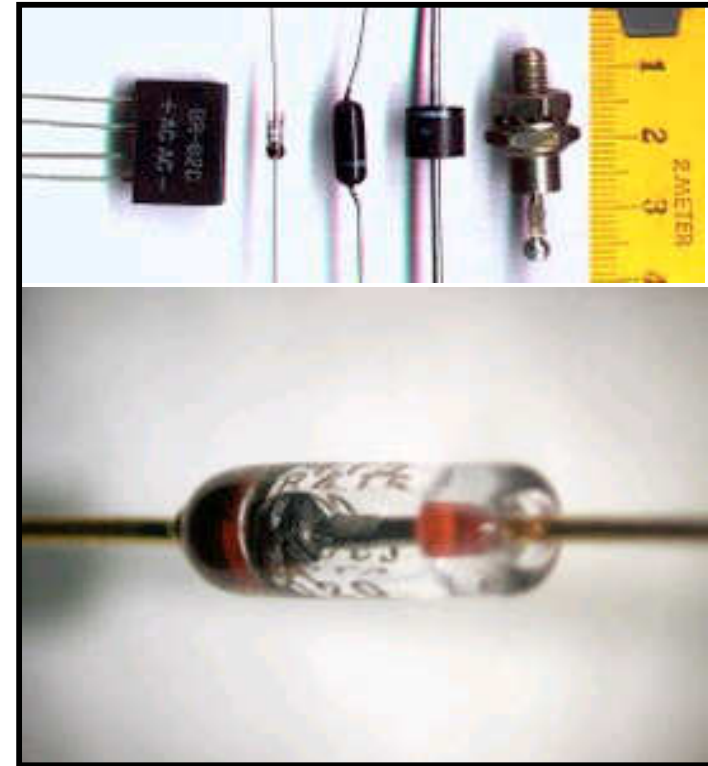
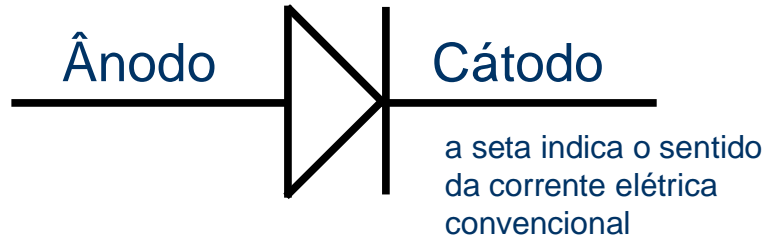
- $R = 10 \Omega$
- $L = 1 \text{ mH}$
- Diodo = 1N4007
  - ◆ Curvas características

$$i_D(V_D) = i_{D0} \left[ e^{\frac{eV_D}{kT}} - 1 \right]$$

- ◆ Não linearidade



# O DIODO



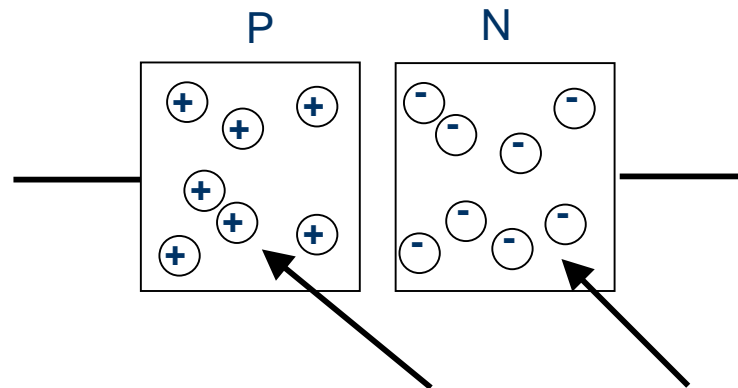
↔  
diodo ~ capacitor

## Bibliografia

<http://en.wikipedia.org/wiki/Diode#History>



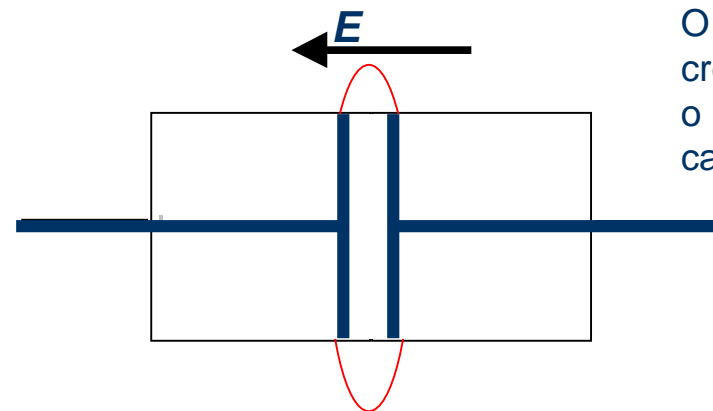
# O DIODO SEMICONDUTOR de Si



Tome-se um semiconductor (Si) intrínseco (neutro)  
Difundem-se impurezas...  
...pentavalentes (As, P) para formar um Si tipo N e  
...trivalentes (B ou Al) para formar Si tipo P.

“vacâncias” e elétrons relativamente livres para se mover, mas no todo os materiais são neutros.

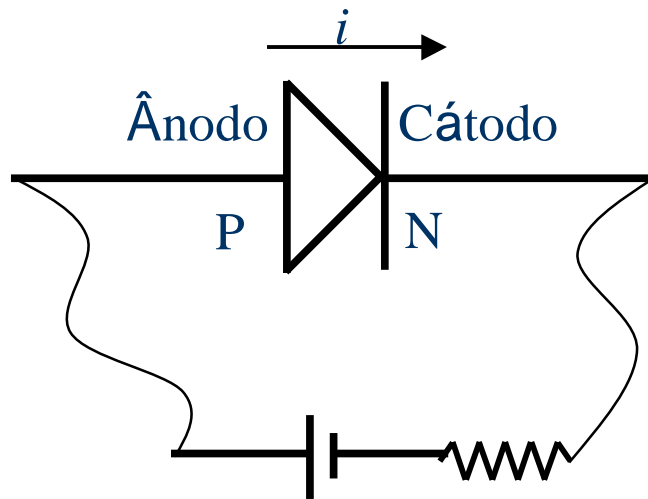
Ao conectar 2 semicondutores tipo P e tipo N alguns elétrons e vacâncias na interface se atraem e recombinaem criando uma região neutra (depletada = sem portadores de carga livres). O resultado é um saldo “+” do lado N e um saldo “-” do lado P. O saldo de cargas cria um campo elétrico no material.



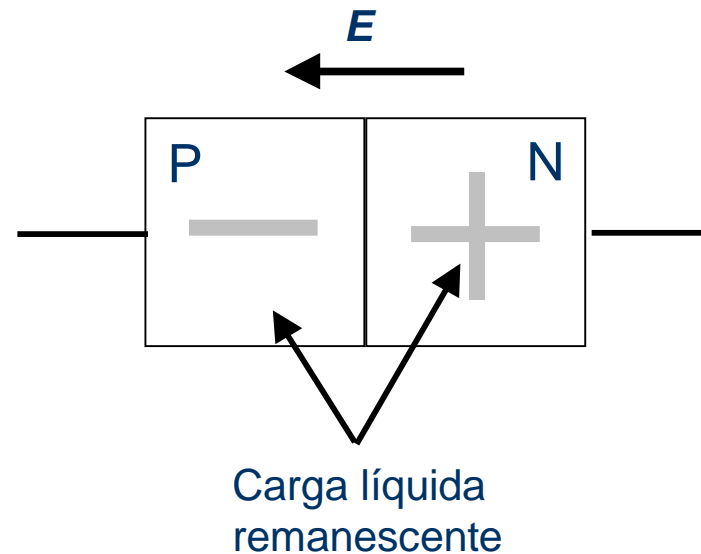
O campo elétrico, cresce até impedir o movimento de cargas.

Recombinação. Não há portadores de carga livres. Região isolante depletada de cargas móveis = CAPACITOR

# O DIODO SEMICONDUTOR de Si

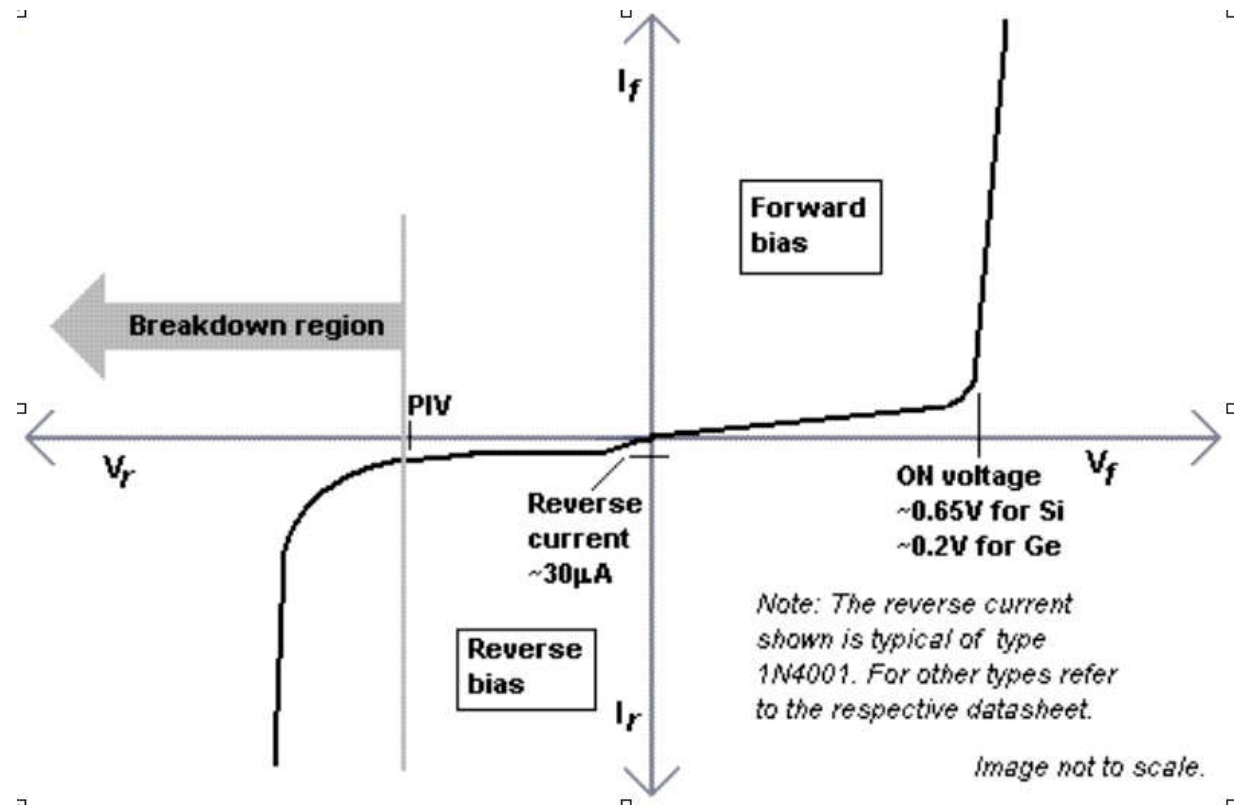


Polarização direta: Um potencial positivo no terminal P, reduz (e eventualmente reverte) o campo elétrico. O diodo conduz.



Polarização reversa: Um potencial negativo no terminal P, aumenta o campo elétrico e impede o movimento de cargas até eventual ruptura do dielétrico.

## O DIODO



- Capacitância do diodo depende da tensão sobre ele

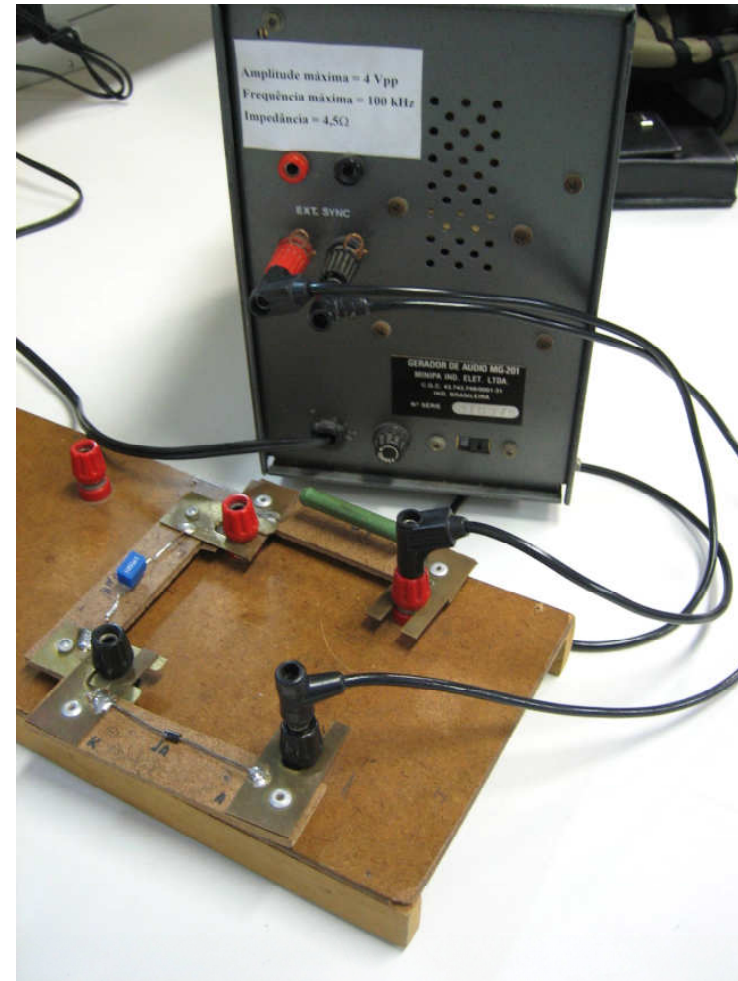
$$C(V_D) = C_0 e^{\frac{eV_D}{kT}} \text{ para } V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{eV_D}{kT}}} \text{ para } V_D \leq 0$$

polarização direta

- Para baixas tensões,  $\frac{eV_D}{kT} \ll 1$  a capacitância vale  $C(V_D) \sim C_0$ , ou seja, o diodo se comporta como um capacitor ideal

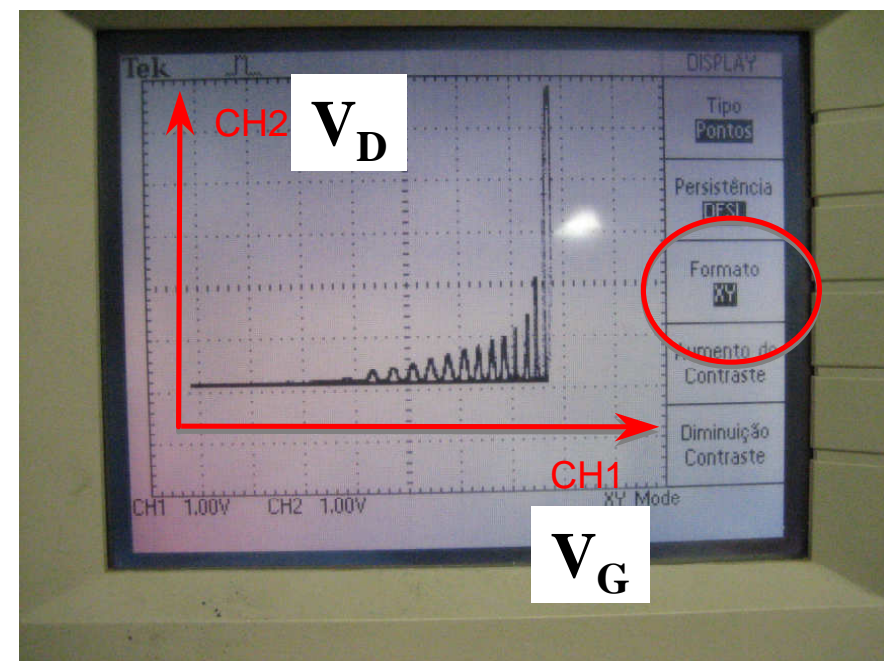
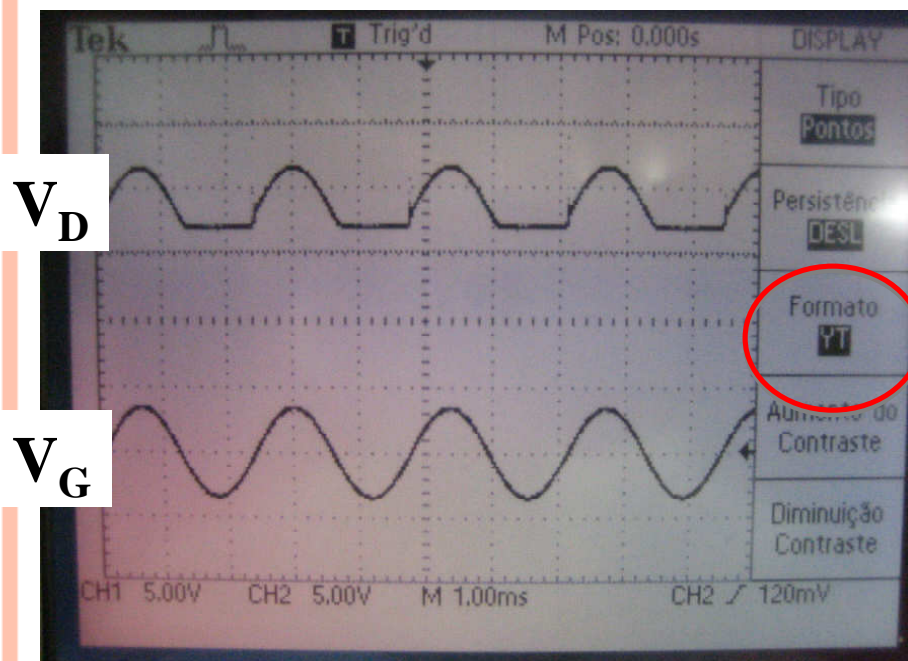
# ATIVIDADES DA SEMANA (RLD)





## MUDANDO DE X-T PARA X-Y

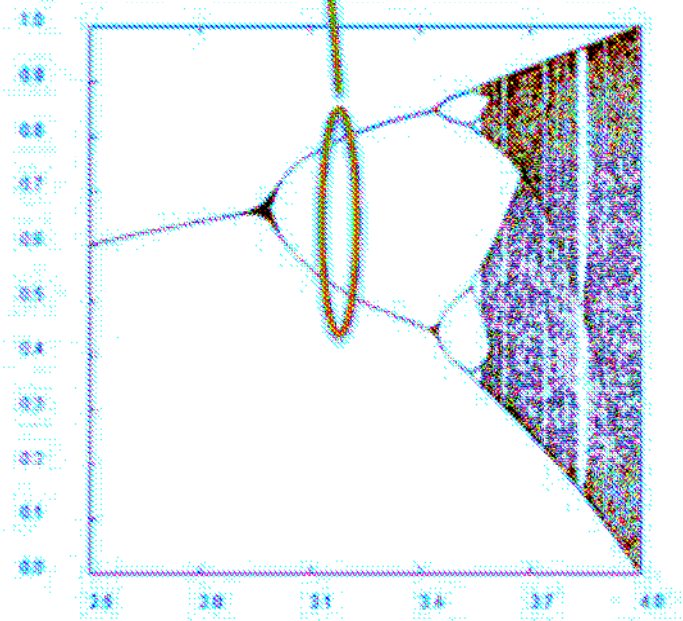
- ✂ Clicar o botão DISPLAY do osciloscópio
- ✂ Selecionar FORMATO no menu de tela



# PROCEDIMENTO E ATIVIDADES DA SEMANA

## ESTUDO DE CAOS NO CIRCUITO RLD

- Aumentar a tensão do gerador para o  $V_G \sim 3V$ 
  - O diodo deixa de se comportar como capacitor ideal e pode haver caos
- Medir o diagrama de bifurcação do circuito
  - Gráfico de  $V_D$  em função da frequência no gerador. Começar próximo de 40 kHz
  - Tomar cuidado de medir vários pontos, principalmente quando estiver próximo de uma bifurcação.
    - Com cuidado, em alguns casos, podemos ir até 8 bifurcações
  - Determinar o número de Feigenbaum





# PROCEDIMENTO E ATIVIDADES DA SEMANA

## ESTUDO DE CAOS NO CIRCUITO RLD

- Levantar o diagrama de fase do circuito para algumas frequências interessantes
  - O diagrama de fase corresponde ao gráfico de  $V_D$  vs  $V_G$ .
    - Modo X-Y no osciloscópio
  - Fazer o diagrama para várias frequências com, pelo menos, os seguintes casos:
    - Não há bifurcações (1 solução para o diodo)
    - Uma bifurcação (2 soluções para o diodo)
    - Duas bifurcações (4 soluções para o diodo)
    - Caos
  - O diagrama pode ser obtido fotografando a tela do osciloscópio
  - Discutir os diagramas obtidos
  
- Alguns grupos já fizeram este estudo na semana passada (era a atividade opcional)