FAP 0214 - LabFlex 2008/1

Ótica Matricial

Manfredo Harri Tabacniks

IFUSP

Baseado no texto de Suaide, A., Szanto, E.M., Carlin, N. *Lentes. Apostila de Física Experimental 4*, FAP214, 2007.
http://sampa.if.usp.br:8080/~suaide/blog/files/fap214.2007/_lentes.pdf

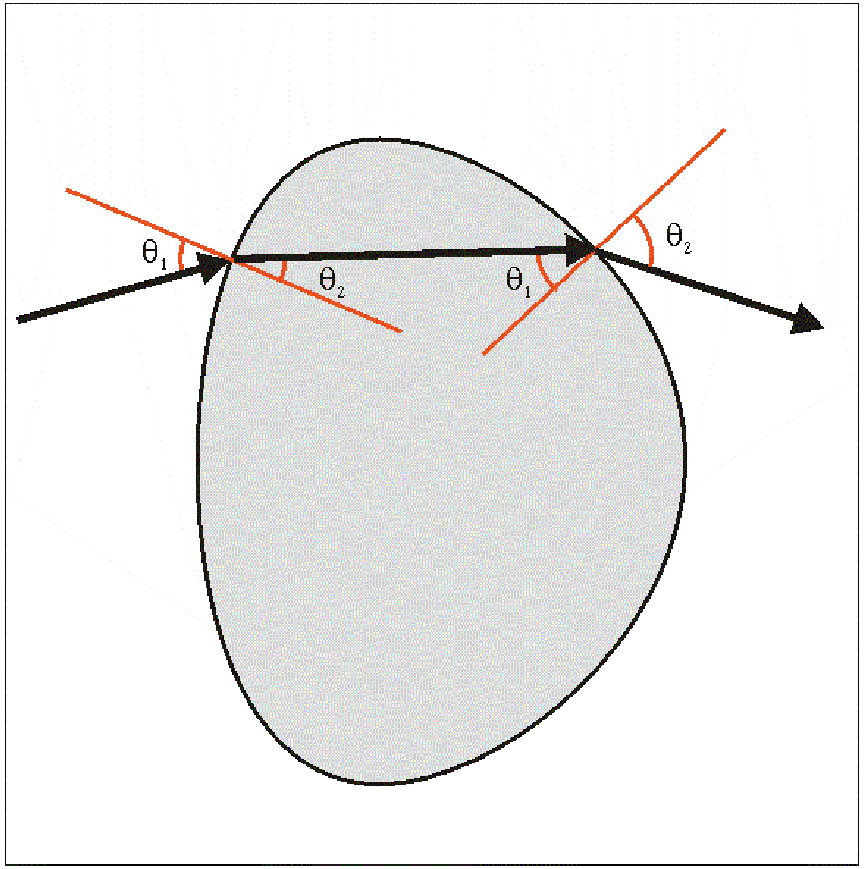
Lentes: funcionamento

Luz incide em uma superfície

Ocorre refração nesta superfície

A luz se propaga para a segunda superfície

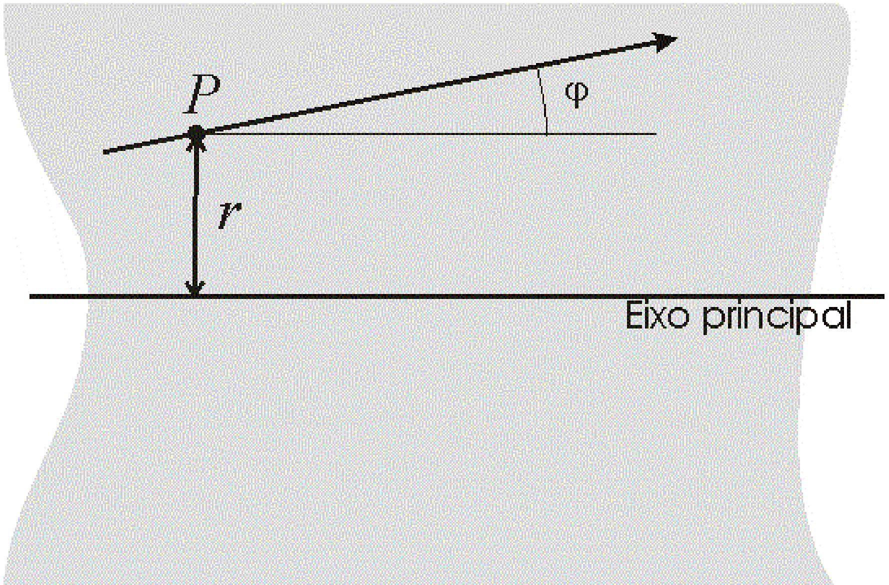
Ocorre nova refração



Ótica matricial

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Um raio luminoso R que parte do ponto P, com ângulo φ pode ser caracterizado por DUAS coordenadas generalizadas:



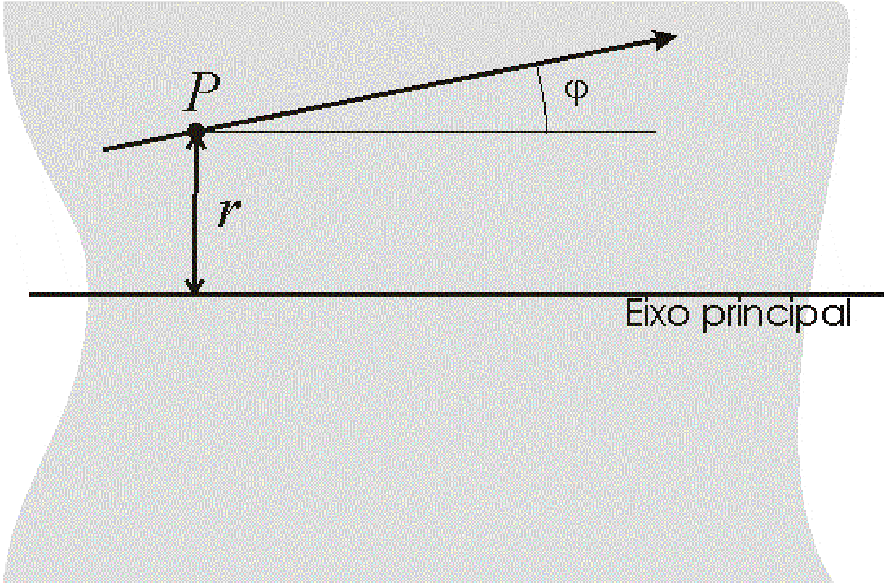
Aproximação paraxial
(Ok para $\varphi < 10^o$)

Ótica matricial

O raio evolui de $\mathbf{P_1}$ para $\mathbf{P_2}$ através de uma matriz de transformação $\mathbf{M}$

$$\mathbf{MP_1 = P_2}$$

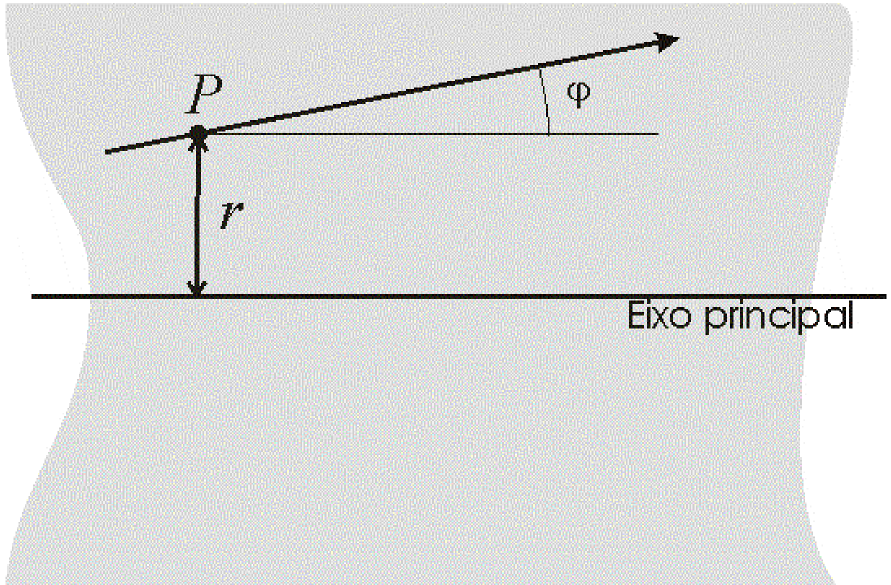
$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$



Ótica matricial

A matriz de transformação
é dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$



Ótica matricial

$$\mathbf{MP_1} = \mathbf{P_2}$$

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + B\varphi_1 \\ \varphi_2 &= Cr_1 + D\varphi_1 \end{aligned}}$$

Ótica matricial (propriedades)

Reversibilidade

$$\mathbf{P_1} = \mathbf{M}^{\mathbf{-1}} \cdot \mathbf{P_2}$$

Determinante unitário
(Teorema de Liouville)

$$\det(\mathbf{M}) = 1$$

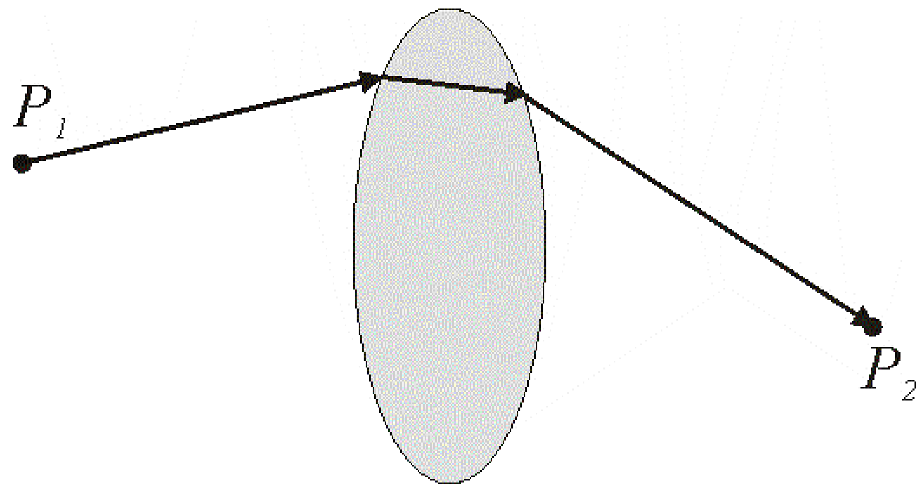
Combinação de
elementos ópticos

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{P}_1$$

Ótica matricial: lente simples

A transformação do ponto P_1 para P_2 é dada por:

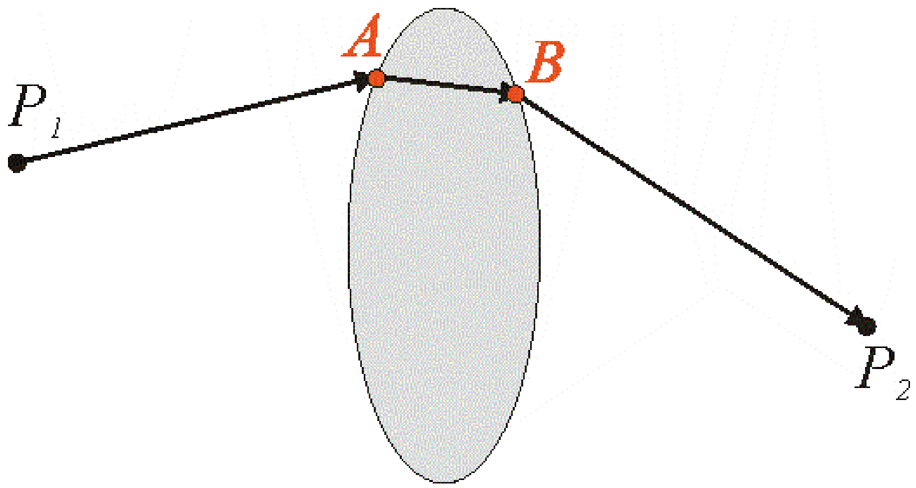
$$P_2 = M \cdot P_1$$



Exemplo: lente simples

M é a composição de três matrizes:

$$M = M_{B\to P_2} \cdot M_{A\to B} \cdot M_{P_1\to A}$$

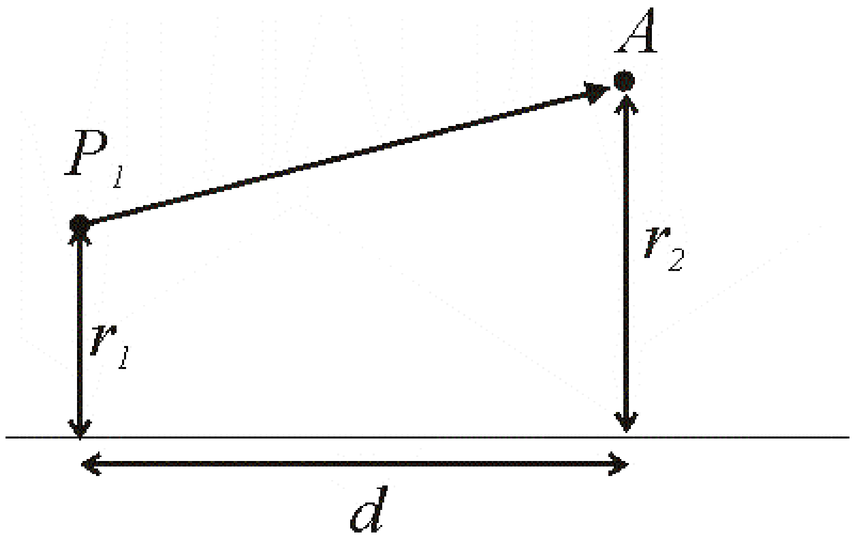


Exemplo: Espaço vazio (*drift line*)

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

$$r_2 = r_1 + d\tan\varphi_1$$

$$r_2 \sim r_1 + d\varphi_1$$

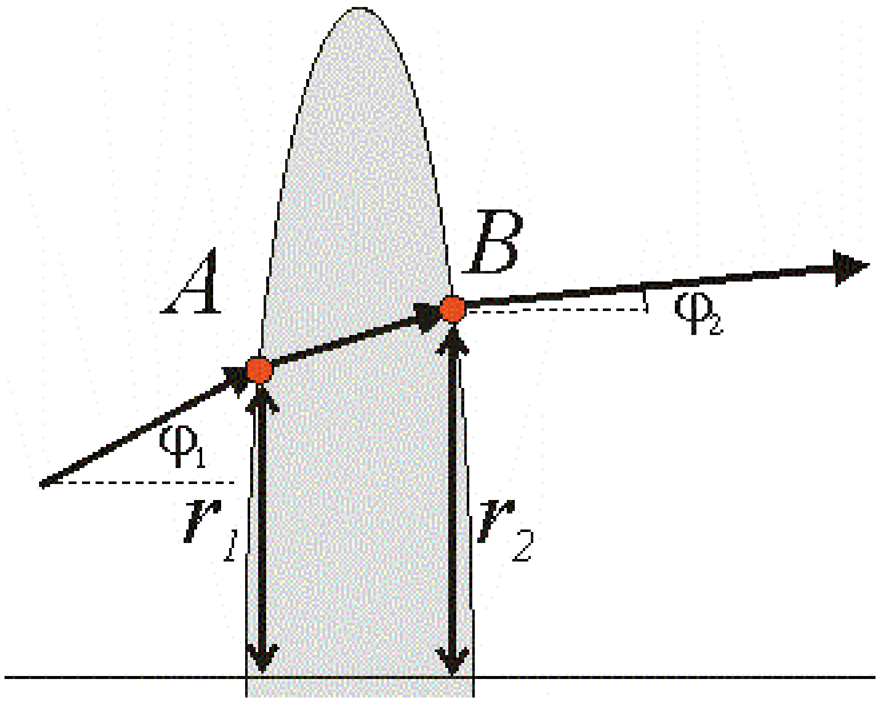


$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \qquad M_{P_1 \to A} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: lente simples

Lente delgada (d=0)

$$M_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$



Exemplo: lente simples

Assim, a transformação completa para uma lente simples e delgada entre dois espaços vazios vale:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Transporte da saída da lente (B) até o ponto imagem (i)

Transporte dentro da lente

Transporte do ponto objeto (o) até a lente (A)

Exemplo: lente simples

Transformação completa para uma lente simples e delgada entre dois espaços vazios:

espessura da "lente"

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{i}{f} & o - \dfrac{io}{f} + i \\ -\dfrac{1}{f} & 1 - \dfrac{o}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

f é o foco

Exemplo: lente simples

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{i}{f} & o-\frac{io}{f}+i \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{o}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = \left(1-\frac{i}{f}\right) r_1 + \underbrace{\left(o-\frac{io}{f}+i\right)}_{=0} \varphi_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{f} r_1 + \left(1-\frac{o}{f}\right) \varphi_1$$

Numa lente delgada, qualquer raio saindo de r_1 deve chegar a r_2, independente de φ_1, ou seja, o segundo termo da expressão se anula:

$$\left(o-\frac{io}{f}+i\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

Equação de Gauss para lentes delgadas

Lente espessa: matriz de propagação

P_1 é a potência da superfície 1,

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1}$$

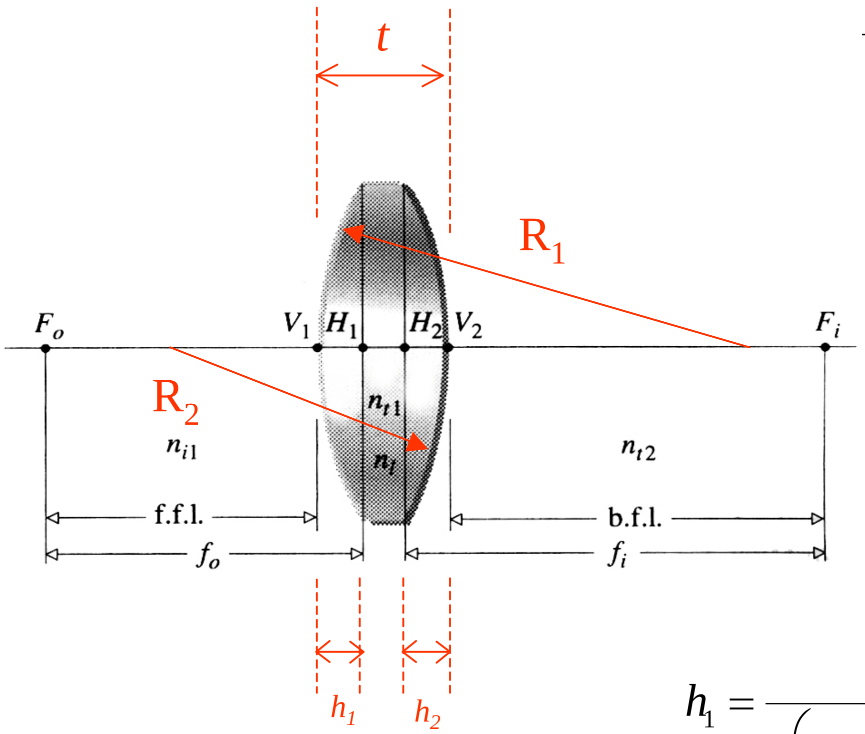
t é a espessura da lente

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{tP_1}{n} & \frac{t}{n} \\ \frac{tP_1P_2}{n} - P_1 - P_2 & 1 - \frac{tP_2}{n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + \frac{(n-1)^2}{n}\left[\frac{t}{R_1R_2}\right]$$

equação do fabricante de lentes

Lente espessa em ar: Determinação do foco e dos planos principais



$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] + \frac{(n-1)^2}{n}\cancel{\left[\frac{t}{R_1 R_2}\right]}$$

cuidado com a convenção de sinais

lente delgada, t~0

$$\frac{1}{f} \sim (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

$$h_1 = \frac{t}{n\left(1 + \frac{P_1}{P_2} - t\frac{P_1}{n}\right)} \qquad h_2 = \frac{t}{n\left(1 + \frac{P_2}{P_1} - t\frac{P_2}{n}\right)}$$

$$P_1 = \frac{n-1}{R_1} \qquad P_2 = \frac{n-1}{R_2}$$