Instituto de Física - USP
FGE0213 - Laboratório de Física III - LabFlex

Aula 6 - (Exp 2.2)
Filtro de Wien

Mapeamento Numérico do Campo Elétrico

Manfredo H. Tabacniks
Alexandre Suaide
setembro 2007

Campo elétrico

Força conservativa → Potencial $\vec{E} = -\nabla U$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

Conhecendo-se a distribuição espacial do potencial sabemos calcular o campo.

Potencial eu sei medir...

Determinando o potencial e o campo elétrico

- Mapear o campo
  - Medir as equipotenciais e obter o gradiente experimentalmente
    - Feito na semana passada
- Como comparar estes resultados com uma previsão teórica?
    - Resolver as equações para o campo, ou potencial.

Resolução numérica da equação de Laplace

Lei de Gauss $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\nabla U) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equação de Poisson para o potencial $$\nabla^2 U = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Na ausência de cargas livres (Equação de Laplace)

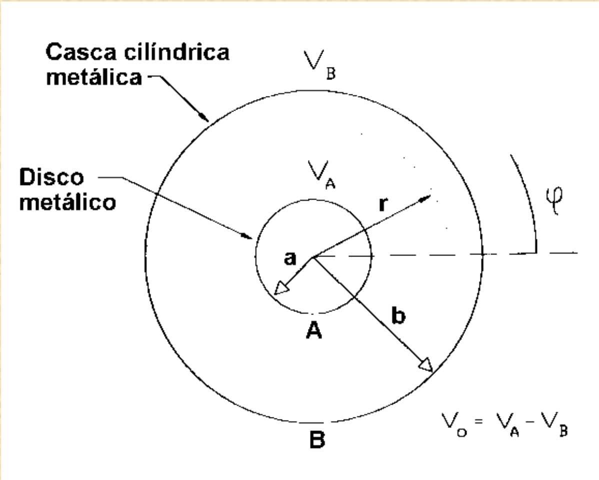
$$\nabla^2 U = 0$$

Resolução numérica da equação de Laplace

$$\nabla^2 U = 0$$

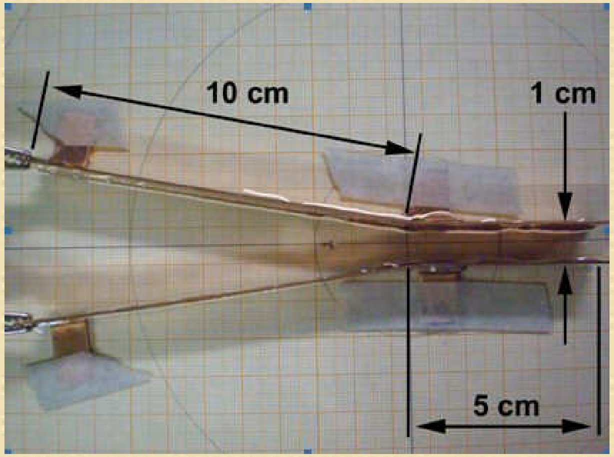
Sistemas simétricos.
Resolução algébrica

cabo coaxial



$$V(r) = A \ln r + B$$

Sistemas complexos ?



$$V(x, y) = ?$$

Resolução numérica da equação de Laplace

$$\nabla^2 U = 0$$

O Laplaciano em duas dimensões cartesianas:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U$$

Aproximação numérica para derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} U \approx \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x + \Delta x/2, y) - U(x - \Delta x/2, y)}{\Delta x}$$

Resolução numérica da equação de Laplace

$$\frac{\partial}{\partial x}U \approx \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{U(x+\Delta x/2, y) - U(x-\Delta x/2, y)}{\Delta x}$$

Vamos agora calcular a derivada segunda

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U(x+\Delta x/2, y) - U(x-\Delta x/2, y)}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x+\Delta x/2, y) - \frac{\partial}{\partial x}U(x-\Delta x/2, y)\right)$$

Calculando o primeiro termo da expressão acima:

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x+\Delta x/2, y)$$

Resolução numérica da equação de Laplace

Cálculo do primeiro termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x+\Delta x/2, y) = \frac{U(x+\Delta x/2+\Delta x/2, y) - U(x+\Delta x/2-\Delta x/2, y)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x+\Delta x/2, y) = \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x^2}$$

Do mesmo modo para o segundo termo:

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x-\Delta x/2, y) = \frac{U(x, y) - U(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

Resolução numérica da equação de Laplace

Assim, as derivadas segunda, em x e y, valem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U = \frac{U(x+\Delta x, y) - 2U(x,y) + U(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}U = \frac{U(x, y+\Delta y) - 2U(x,y) + U(x, y-\Delta y)}{\Delta y^2}$$

Fazendo $\Delta x = \Delta y = \Delta$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U = 0$$

$$\frac{U(x+\Delta, y) + U(x, y+\Delta) - 4U(x,y) + U(x-\Delta, y) + U(x, y-\Delta)}{\Delta^2} = 0$$

Resolução numérica da equação de Laplace

Fazendo $\Delta x = \Delta y = \Delta$ a equação de Laplace fica:

$$\frac{U(x+\Delta,y)+U(x,y+\Delta)-4U(x,y)+U(x-\Delta,y)+U(x,y-\Delta)}{\Delta^2}=0$$

Cuja solução é:

$$U(x,y)=\frac{1}{4}(U(x+\Delta,y)+U(x,y+\Delta)+U(x-\Delta,y)+U(x,y-\Delta))$$

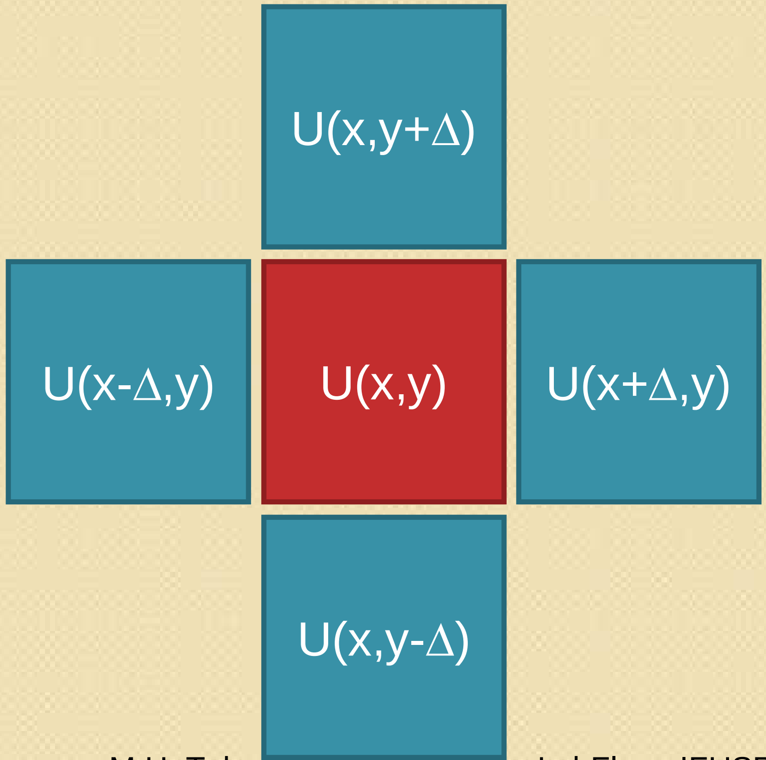
Resolução numérica da equação de Laplace

A solução da equação de Laplace diz que o potencial em um ponto é dado pela MÉDIA SIMPLES dos potenciais nas vizinhanças.

Podemos usar o EXCEL!!!!

Conseqüências Físicas

$$U(x,y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} U(x+\Delta,y)+ \\ U(x,y+\Delta)+ \\ U(x-\Delta,y)+ \\ U(x,y-\Delta) \end{pmatrix}$$



Criando um Excel para calcular o Laplaciano

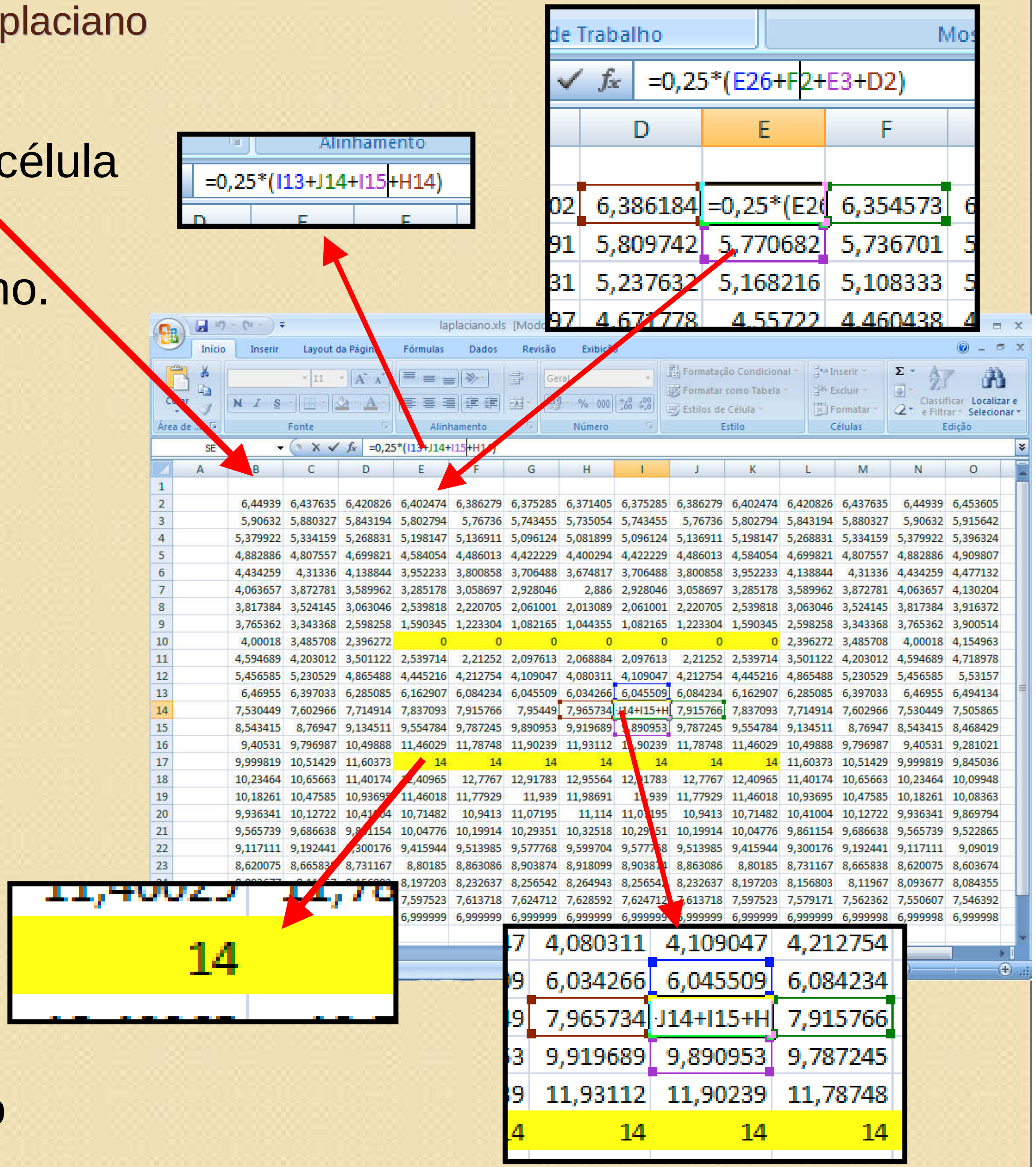
Definir o tamanho (D) de cada célula

Definir as condições de contorno. Amarelo para diferenciar

Programar as equações nas células

Estabelecer bordas cíclicas para simular o infinito

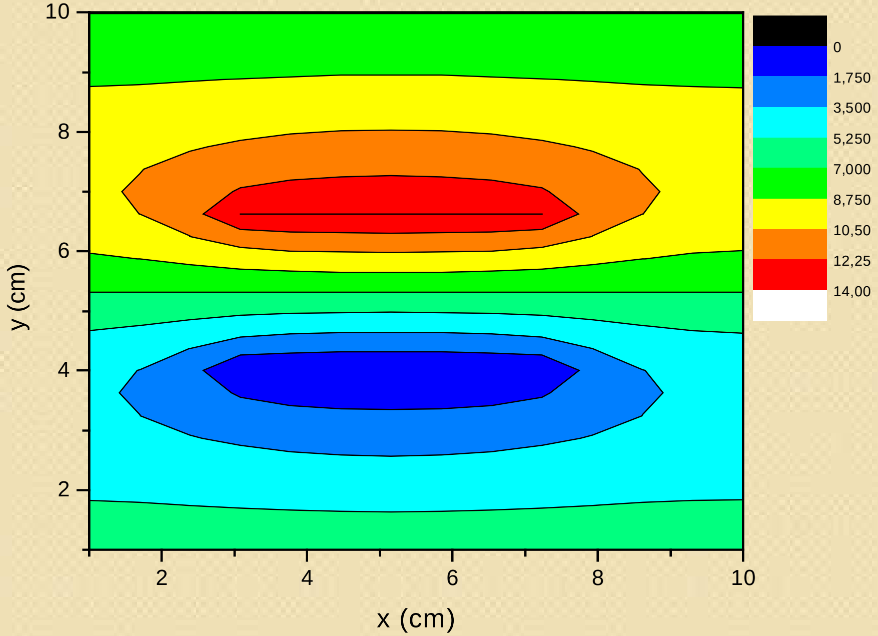
Mandar calcular (F9) até convergir. Alterar opções da planilha, para evitar erro de definição cíclica. Definir cálculo manual.

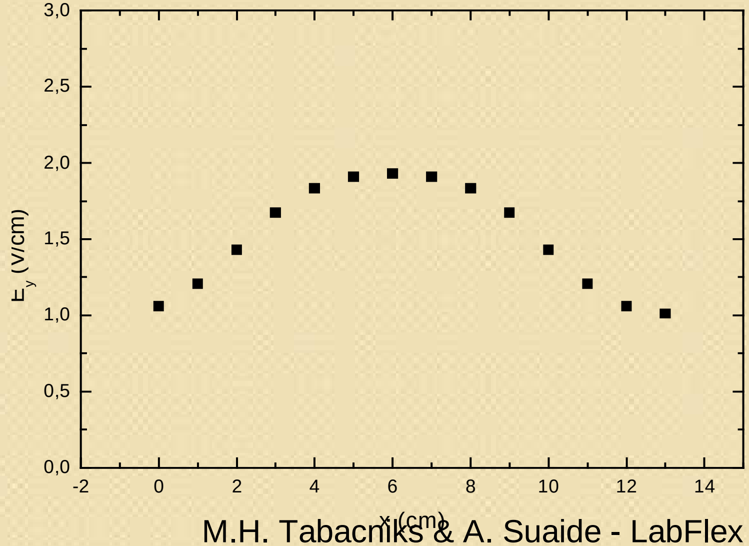


Copiar a matriz para o Origin ou programa gráfico de sua preferência.

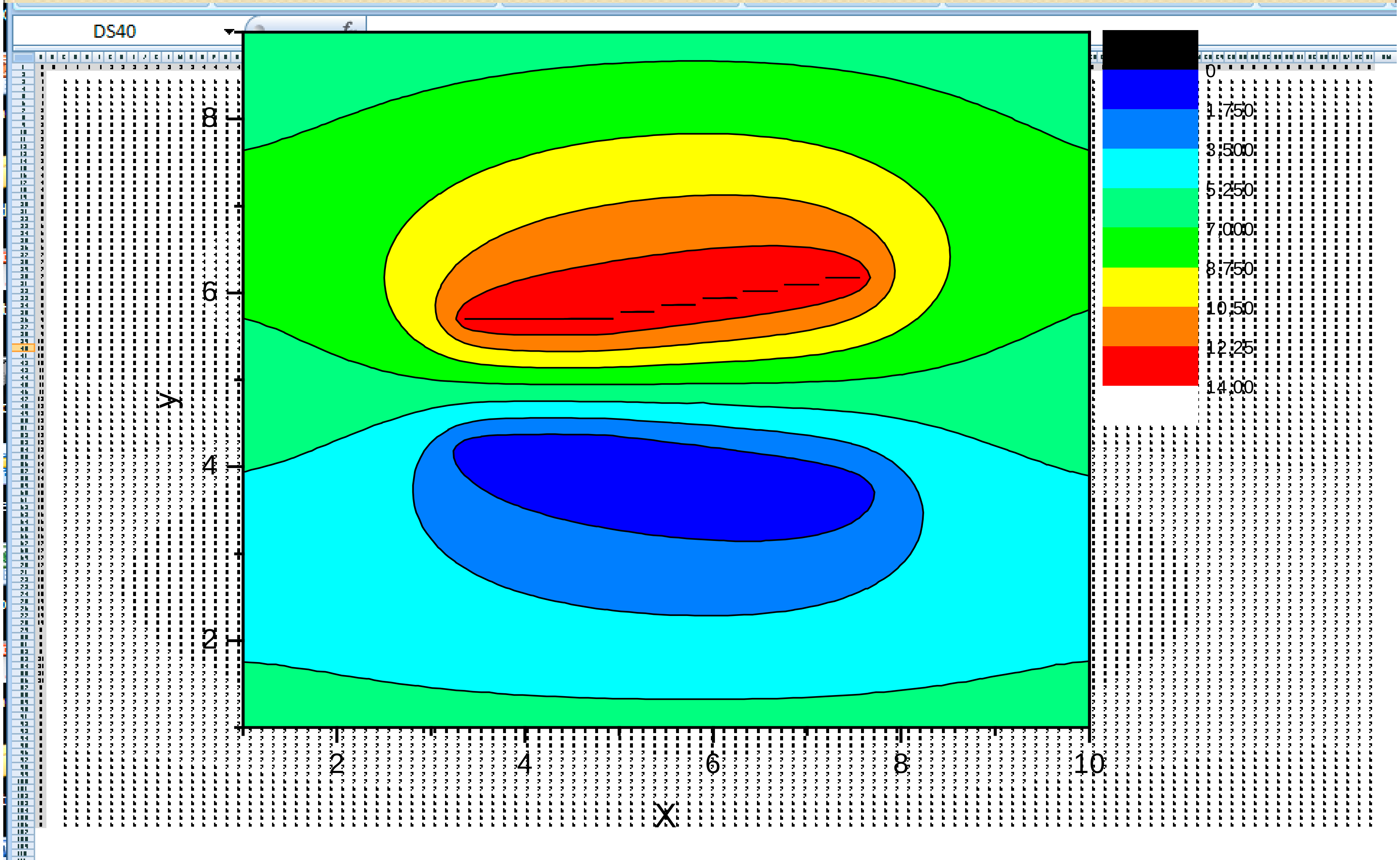
Fazer a análise como se fossem dados normais de potencial.

- Calcular campos
- equipotenciais
- etc.





Um exemplo com uma malha grande (mais precisão)

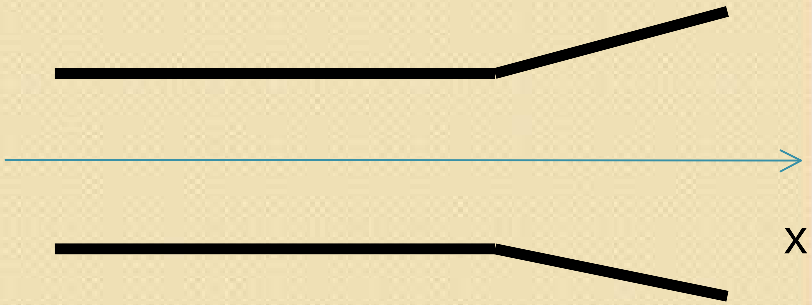


Atividades para a próxima semana (I)

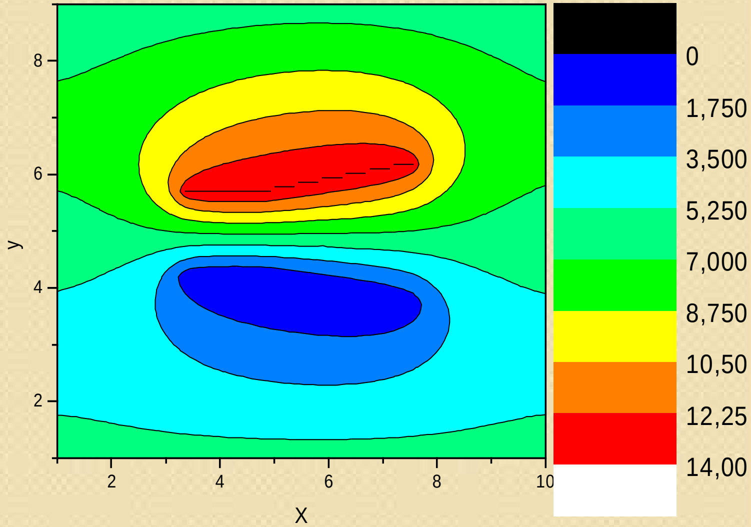
- Implementar a geometria das placas utilizadas no Excel e resolver o problema numericamente.
- Tem também o programa QFIELD, que faz a mesma coisa (quem quiser tentar)

- Calcular as componentes do campo ao longo dos eixos de simetria e superpor aos dados
- Entregar o gráfico com simulação superposta aos dados experimentais.

Simetrias...



O problema é simétrico em y...



Porque o potencial não é simétrico?

1) O Potencial é definido a menos de uma constante

2) A grandeza física é o campo elétrico