Instituto de Física - USP

FGE0213 - Laboratório de Física III - LabFlex

Aula 14 - (Exp 3.3) -
Oscilador magnético forçado amortecido

Manfredo H. Tabacniks
Alexandre Suaide
novembro 2007

Oscilações magnéticas amortecidas

Aula passada - 3.2: Oscilador Harmônico (amortecido)

Determinamos B local usando uma bobina de Helmholtz perpendicular ao B local, graficando **($tg\theta$ x i)** .

Determinamos μ/I de uma bússola através de oscilações livres em campo B uniforme. Calculamos I e determinamos μ, o momento de dipolo de uma bússola. Com a bússola calibrada medimos o campo magnético externo.

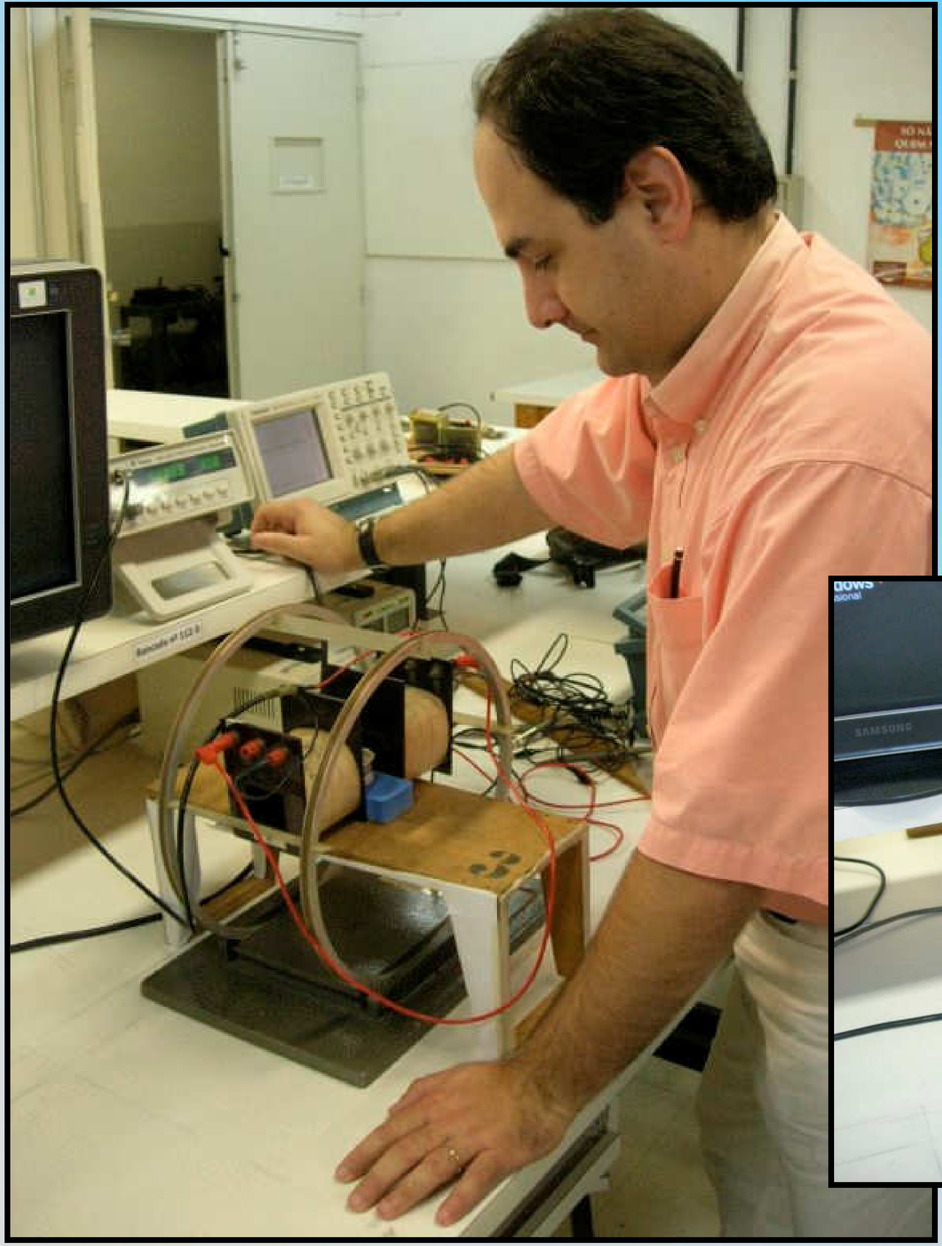
Aula 3.3 Oscilador Magnético Harmônico Amortecido

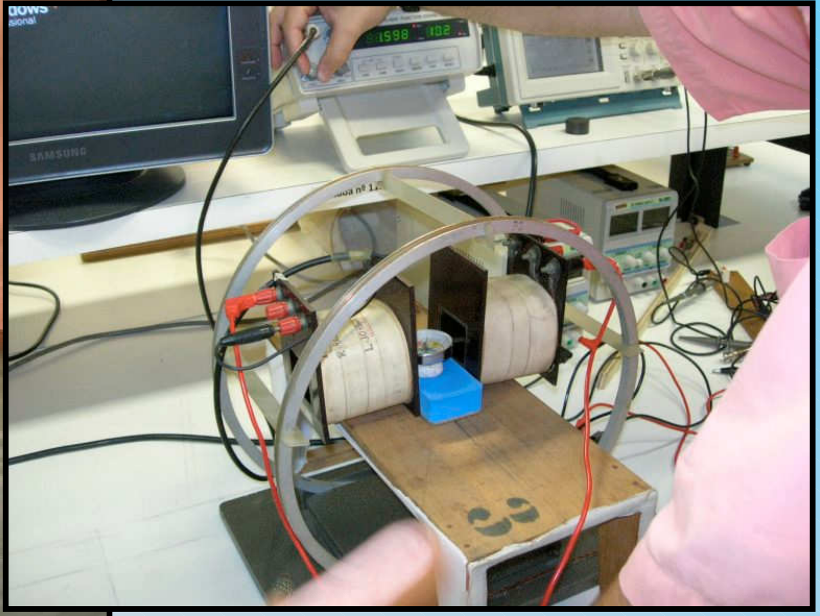
> Sintonizar a freqüência de oscilação (amortecida) da bússola num campo B_1 uniforme, com um segundo campo externo $B_2 = B_o \cos \omega t$.

> Estudar a dependência da freqüência de ressonância ω com B_1.

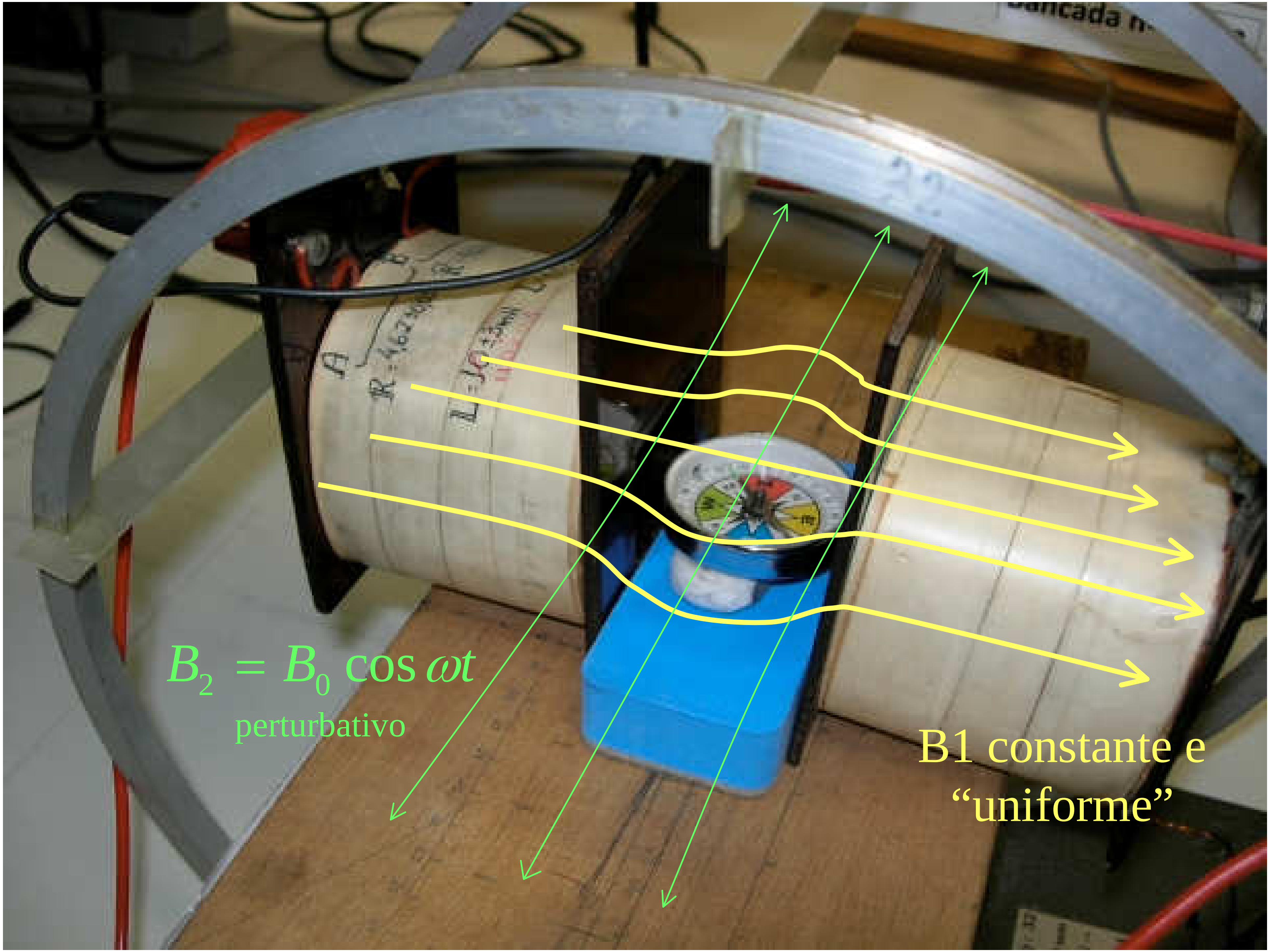
> Estudar o fator de qualidade Q, do oscilador.

Oscilações magnéticas amortecidas



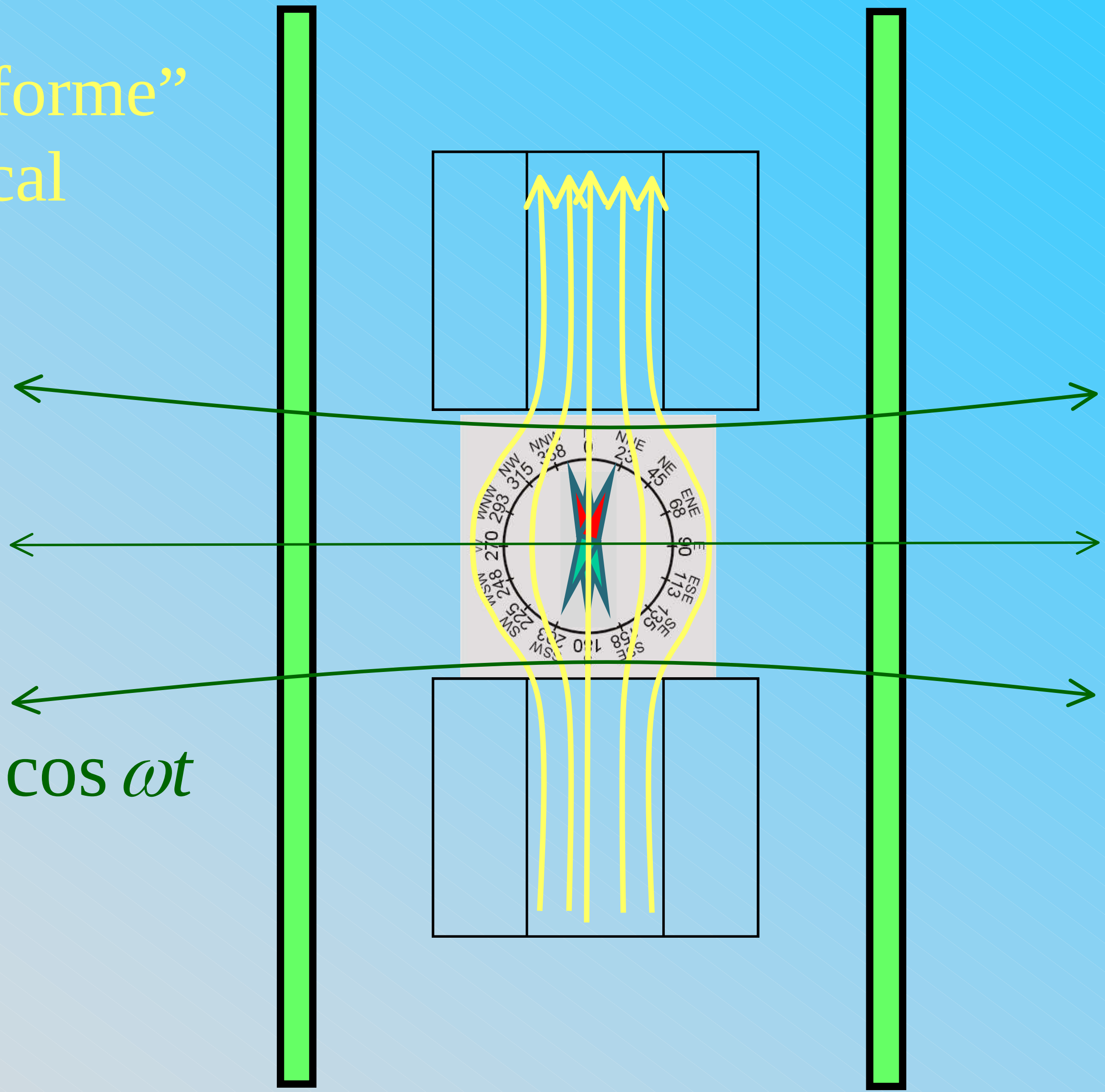


Uma bússola num campo magnético oscila com freqüência constante.


$B_2 = B_0 \cos \omega t$
perturbativo
B1 constante e
“uniforme”

Oscilações magnéticas amortecidas

B1 constante e "uniforme"
Cuidado com o B local



$$B_2 = B_0 \cos \omega t$$

Oscilações magnéticas livres

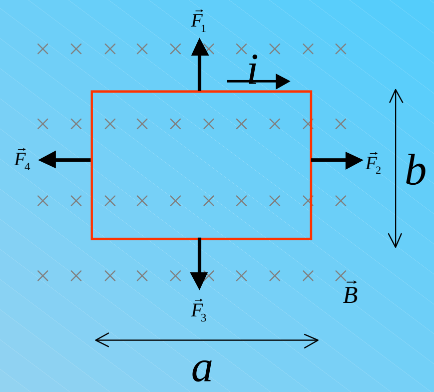
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

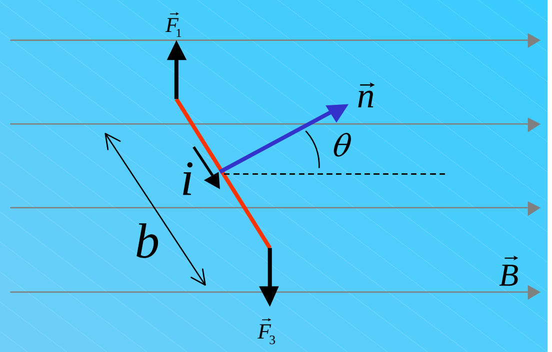
$$\tau_1 = \tau_2 = \left(\frac{b}{2}\right) ia\,B\,sen\theta$$

$$\tau = iab\,B\,sen\theta$$

$$\tau_N = Ni\,ab\,B\,sen\theta$$

$$\vec{\tau} = (N\,i\,ab)\,\vec{n} \times \vec{B}$$





Definindo o momento magnético:

$$\vec{\mu} = Niab\,\vec{n}$$

podemos escrever

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

cuja energia potencial magnética vale

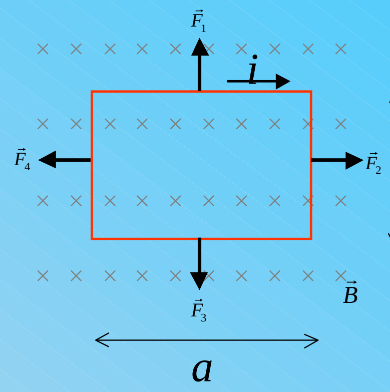
$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

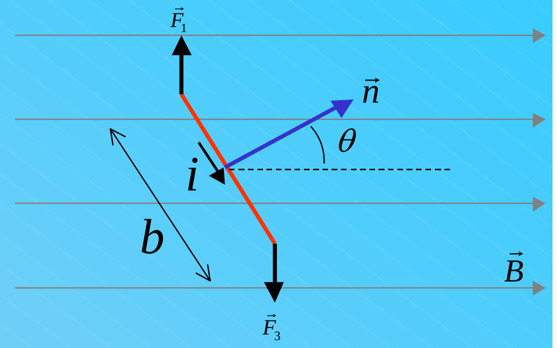
Oscilações magnéticas livres

Definindo o momento magnético:

$$\vec{\mu} = Niab\,\vec{n}$$

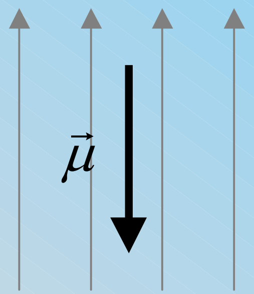
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$





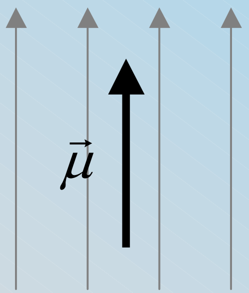
Energia potencial magnética

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$



$$U(\pi) = -\mu B \cos \pi = +\mu B$$

Deslocar um momento magnético de sua posição de equilíbrio cria **torque restaurador**



$$U(0) = -\mu B \cos 0 = -\mu B$$

Oscilações magnéticas livres

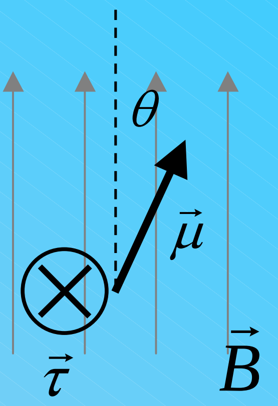
Um imã (uma bússola) pode ser modelado como um momento magnético (com momento de inércia) num campo magnético

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Energia potencial magnética

$$U(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

A bússola oscila em torno da posição de equilíbrio



Deslocar um momento magnético de sua posição de equilíbrio cria **torque restaurador**

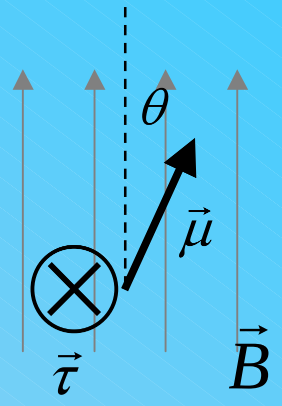
$$sen\theta \cong \theta$$

$$\tau \cong -\mu.B.\theta$$

Oscilações magnéticas livres

$$-\mu B\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

momento de inércia
da agulha da bússola



Deslocar um momento magnético de sua posição de equilíbrio cria **torque restaurador**

$$\tau \cong -\mu.B.\theta$$

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{\mu}{I}\right)B}$$

...mas existe atrito,
a oscilação é amortecida!

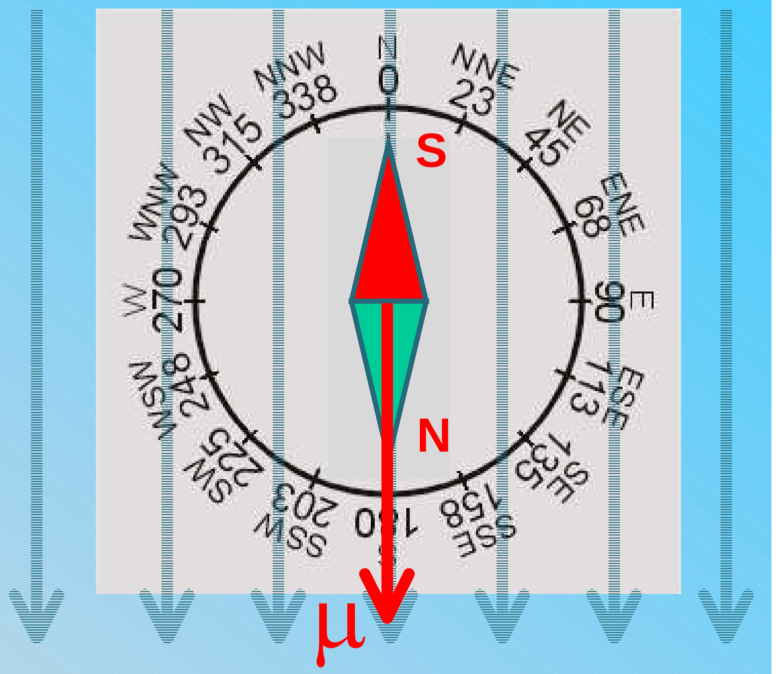
Oscilações magnéticas amortecidas

- Existe atrito na bussola que faz com que o movimento seja amortecido
  - Atrito com o ar
  - Atrito da agulha com o pino de suporte

- Se o coeficiente de atrito for pequeno podemos escrever que o torque é proporcional à velocidade angular

$$\tau_{atrito} = -\gamma \frac{d}{dt}\theta$$

NORTE



SUL

Oscilações magnéticas amortecidas

$$I \frac{d^2}{dt^2}\theta + \gamma \frac{d}{dt}\theta + \mu B \theta = 0$$

atrito
“viscoso”

torque restaurador

momento de inércia
da agulha da bússola

Solução genérica

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(a+\omega i)t}$$

Oscilações magnéticas amortecidas

Solução genérica

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(a+\omega i)t}$$

calculando $\dfrac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\theta = \frac{d}{dt}\theta_0 e^{(a+\omega i)t} = (a+\omega i)\theta_0 e^{(a+\omega i)t} = (a+\omega i)\theta$$

calculando $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = (a+\omega i)^2\theta$$

Oscilações magnéticas amortecidas

$$\frac{d\theta}{dt} = (a+\omega i)\theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = (a+\omega i)^2\theta$$

$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta + \gamma\frac{d}{dt}\theta + \mu B\theta = 0$$

$$I(a+\omega i)^2\cancel{\theta} + \gamma(a+\omega i)\cancel{\theta} + \mu B\cancel{\theta} = 0$$

$$I(a+\omega i)^2 + \gamma(a+\omega i) + \mu B = 0$$

Solução genérica

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(a+\omega i)t}$$

$$a = -\frac{\gamma}{2I}$$

$$\omega^2 = \frac{\mu}{I}B - \frac{\gamma^2}{4I^2} = \omega_0^2 - a^2$$

Oscilações da bússola amortecida

Solução genérica

$$\theta(t) = \theta_0 e^{(a+\omega i)t}$$

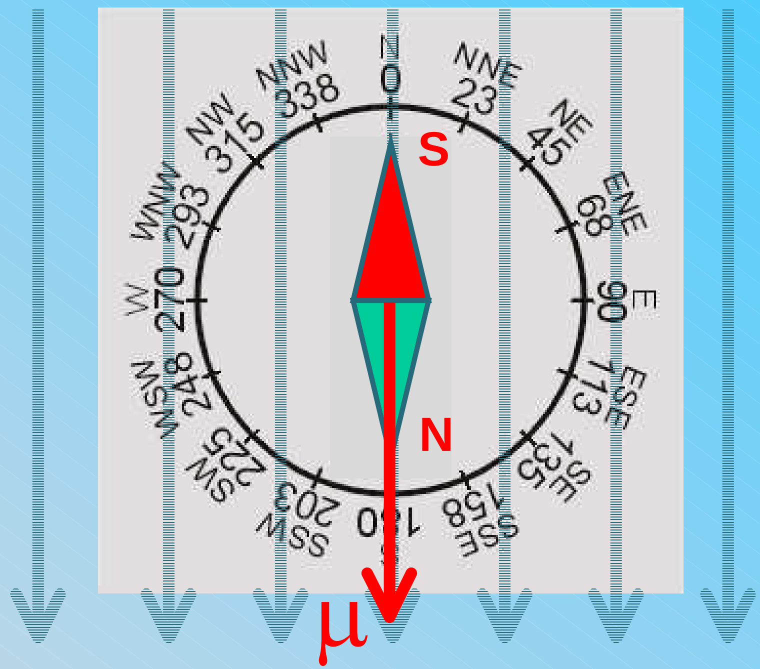
- Assim, o movimento oscilatório da bússola é

$$\theta(t) = \theta_0 e^{at} e^{i\omega t}$$

- Tomando a parte real da solução acima

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2I}t} \cos(\omega t)$$

NORTE

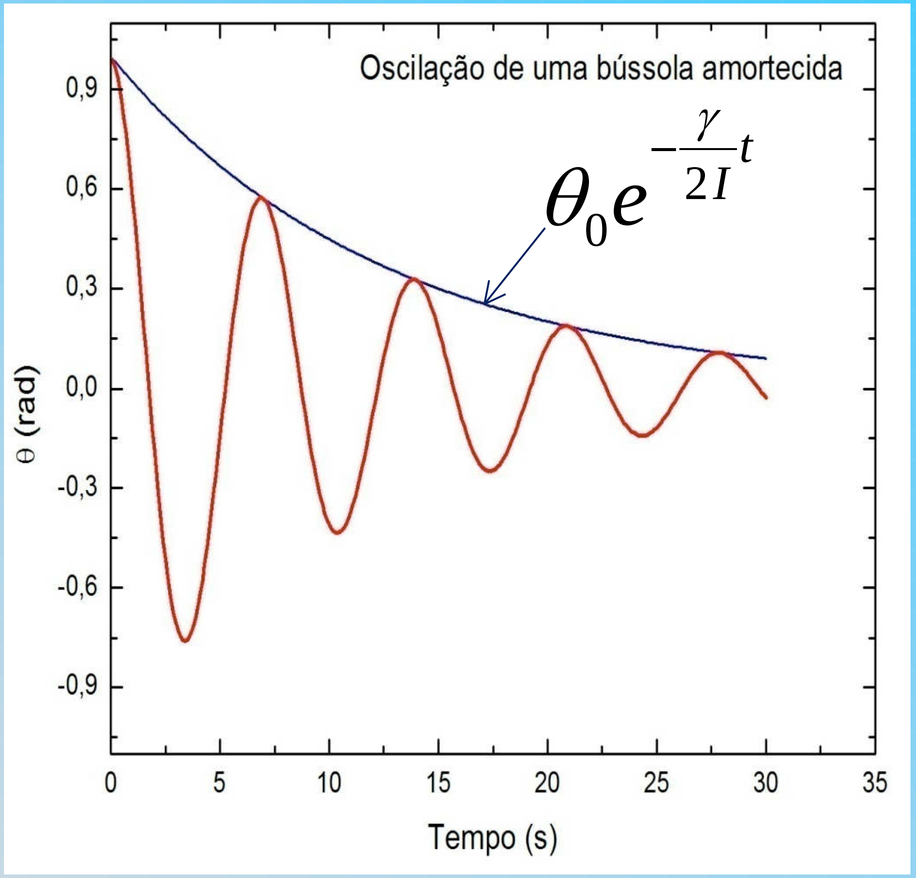


SUL

Movimento de uma bússola em um campo, considerando dissipação

- O movimento é oscilatório modulado por uma exponencial

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\gamma}{2I}t} \cos(\omega t)$$

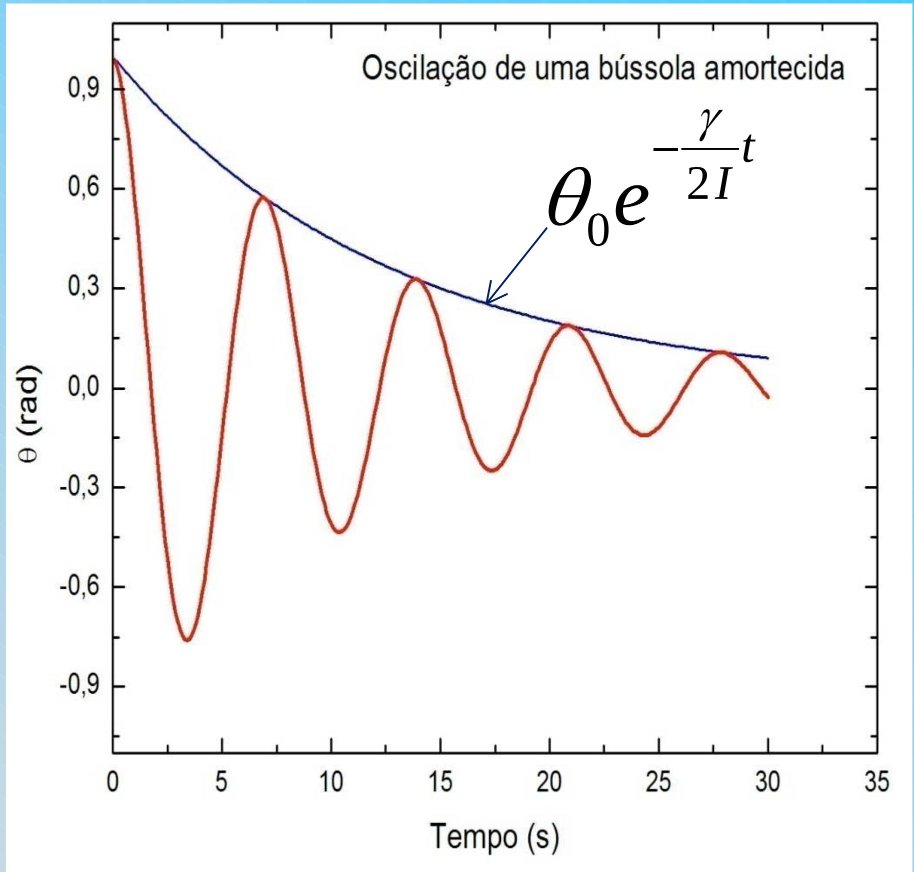


Movimento de uma bússola em um campo, considerando dissipação

- Qual a freqüência de oscilação?

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4I^2}$$

- A freqüência é menor do que a obtida se nós não considerarmos dissipação.
  - Incerteza teórica no modelo da aula passada
  - O nosso experimento tem sensibilidade para perceber esta discrepância?



Movimento forçado e ressonância

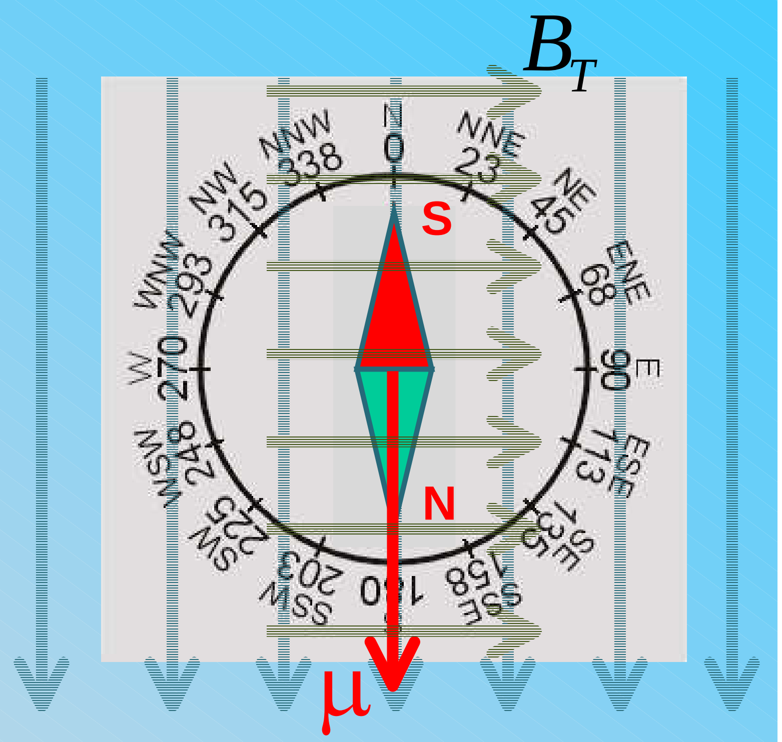
- A bússola oscila com freqüência natural dada por:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4I^2}$$

- O que acontece se perturbarmos a bússola com um campo transversal dado por:

$$B_T(t) = B_{T0}\cos(\omega_{ext} t)$$

NORTE



SUL

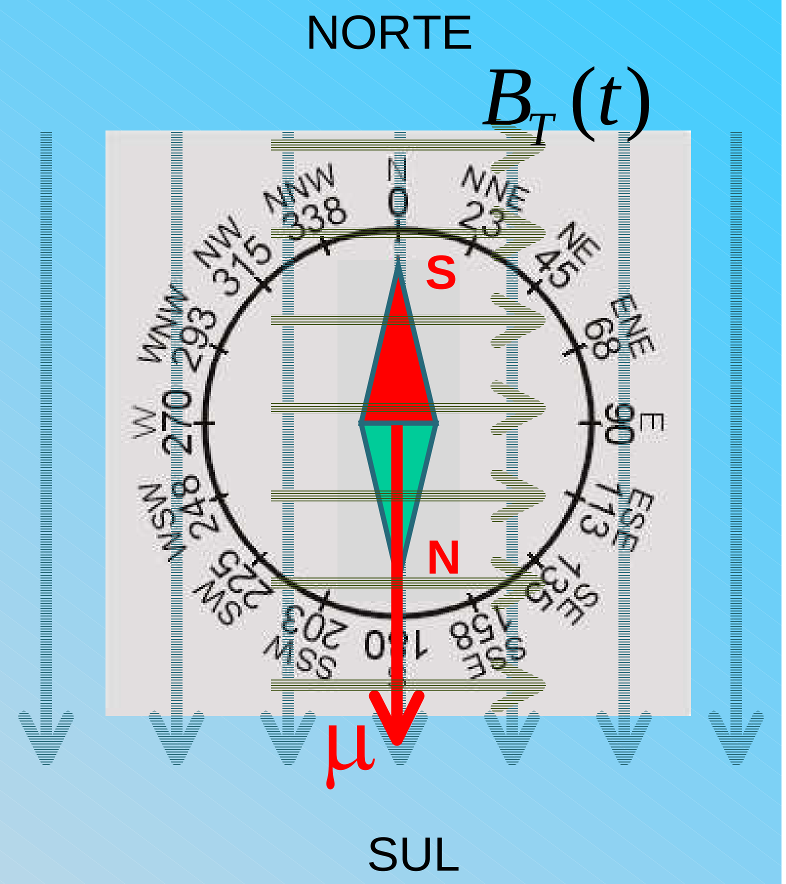
Movimento forçado e ressonância

- Apareceria um novo torque dado por

$$\tau_T = -\mu B_T(t)\sin\left(90-\theta\right)$$

$$\tau(t) = \quad F(t) = -\mu B_T(t)$$

- A equação de movimento seria agora



$$I\frac{d^2}{dt}\theta + \gamma\frac{d}{dt}\theta + \mu B\theta + F\cos(\omega_{ext}t) = 0$$

M.H. Tabacniks, A. Suaide, E Madeira - LabFlex - IFUSP (2007)

Movimento forçado e ressonância

- Devemos resolver a seguinte equação diferencial

$$I\frac{d^2}{dt^2}\theta + \gamma\frac{d}{dt}\theta + \mu B\theta + F\cos(\omega_{ext}t) = 0$$

- A solução pode ser obtida utilizando notação complexa

- Assim $$F\cos(\omega_{ext}t) = \mathrm{Re}\left[Fe^{i\omega_{ext}t}\right]$$

$$\theta(t) = \mathrm{Re}\left[\theta_0 e^{i\omega_{ext}t}\right]$$

Movimento forçado e ressonância

- Resolvendo a equação (*ver, por exemplo, Mecânica, K. R. Symon, Oscilador Harmônico Forçado*)

$$\theta(t) = \underbrace{\frac{\mu B}{I} \frac{1}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2\right)^2 + \frac{\gamma^2}{I^2}\omega_{ext}^2\right]^{1/2}}}_{\theta_0} \sin\left(\omega_{ext} t + \phi\right)$$

- Com:

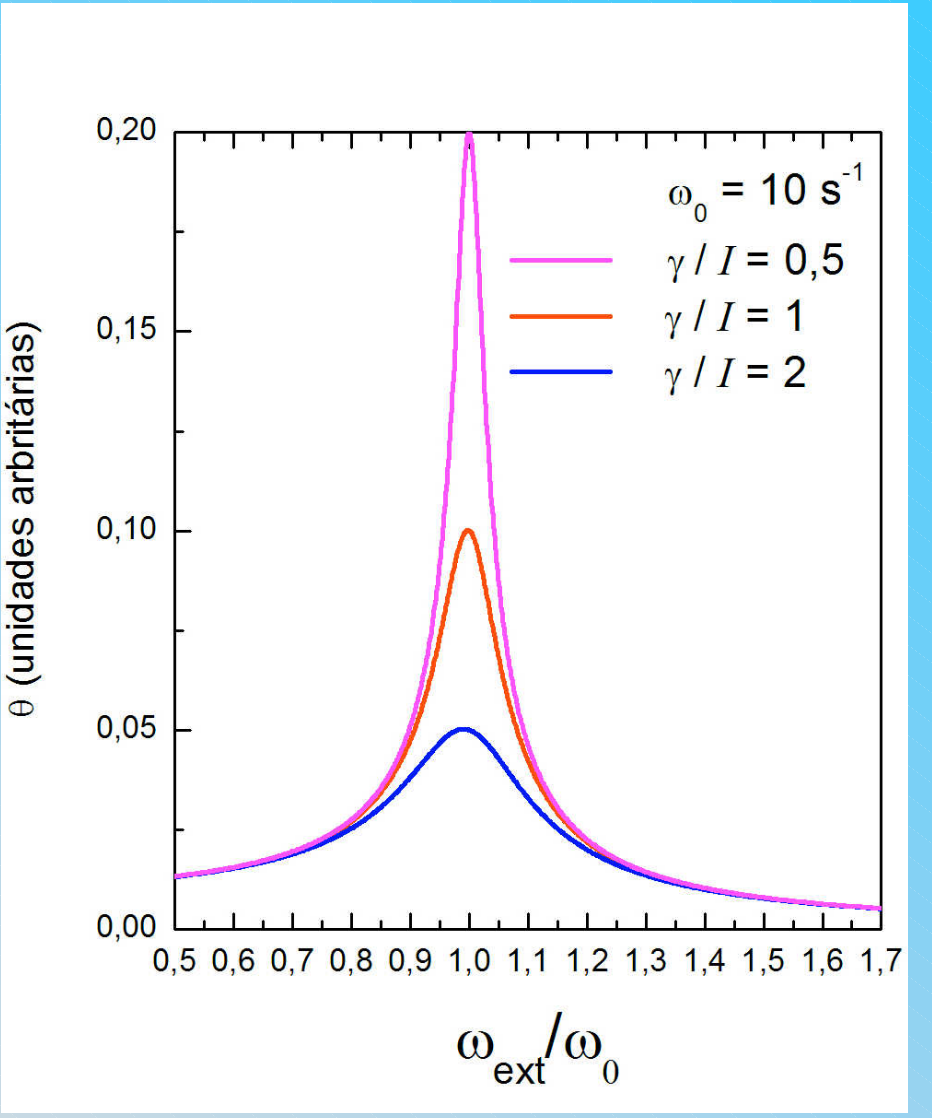
$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{I} B$$

Movimento forçado e ressonância

- A amplitude de oscilação depende da freqüência do campo externo

$$\theta_0 = \frac{\mu B}{I} \frac{1}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 \right)^2 + \frac{\gamma^2}{I^2} \omega_{ext}^2 \right]^{1/2}}$$

- E possui um valor máximo
  - Ressonância



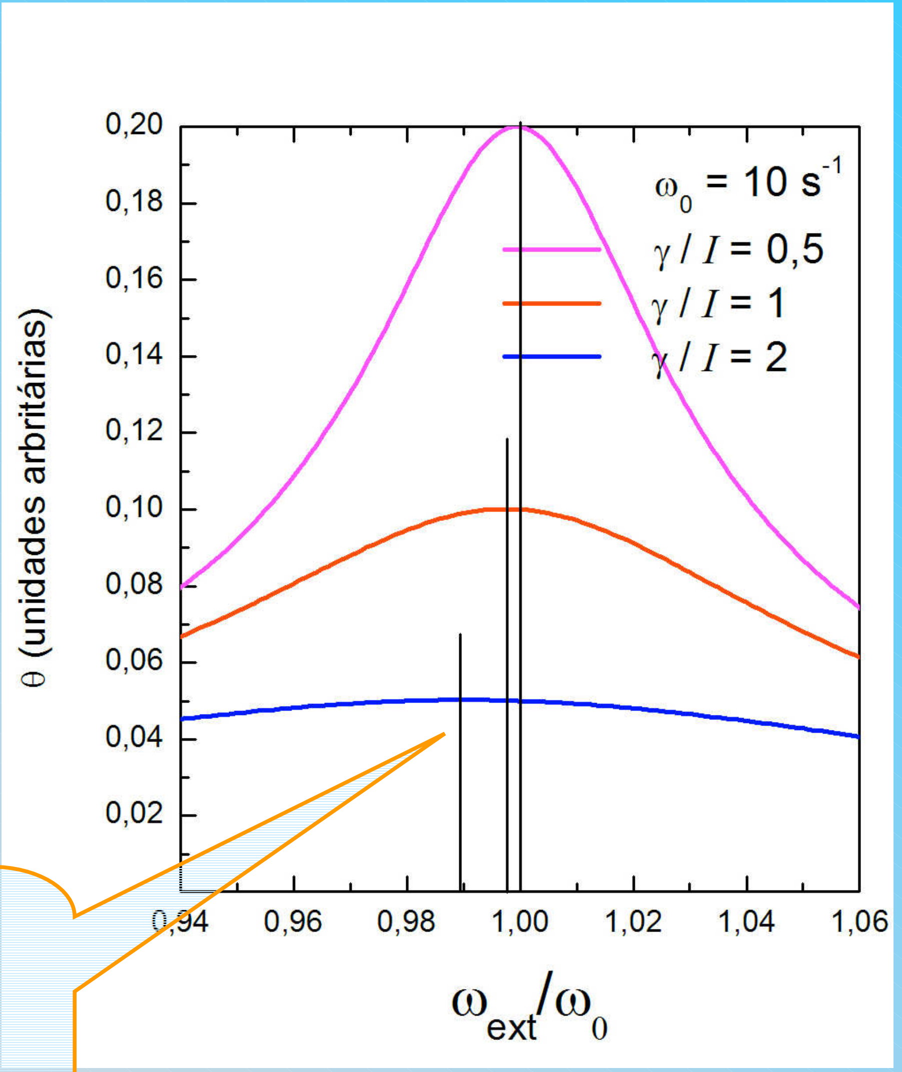
Movimento forçado e ressonância

- A freqüência de máximo de amplitude é dada por

$$\frac{d}{d\omega_{ext}}\theta_0 = 0$$

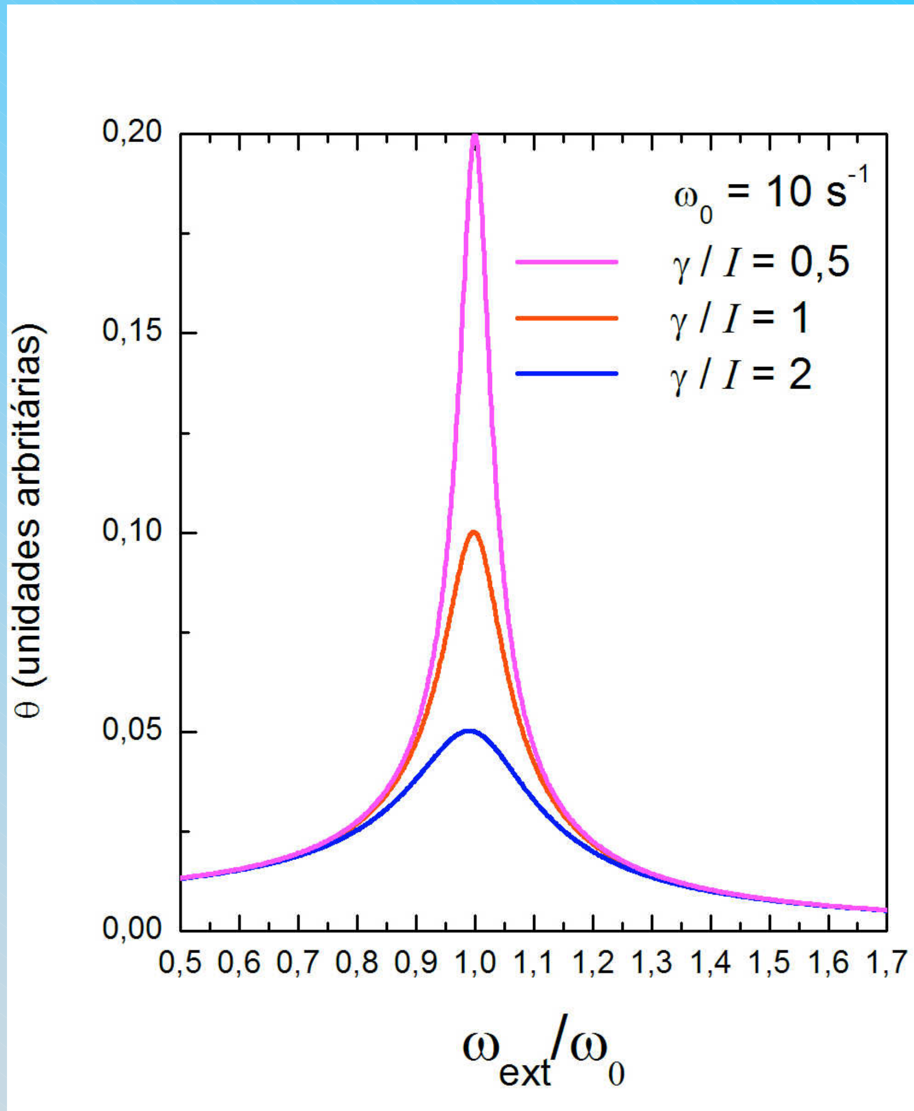
- E vale:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2I^2}$$



note que a freqüência de ressonância depende de γ

- **Fator de qualidade** (*fator-Q*) da ressonância
- Quanto maior a dissipação (γ),
  - menor a amplitude de oscilação
  - Maior a dispersão (largura) do pico de ressonância



Movimento forçado e ressonância

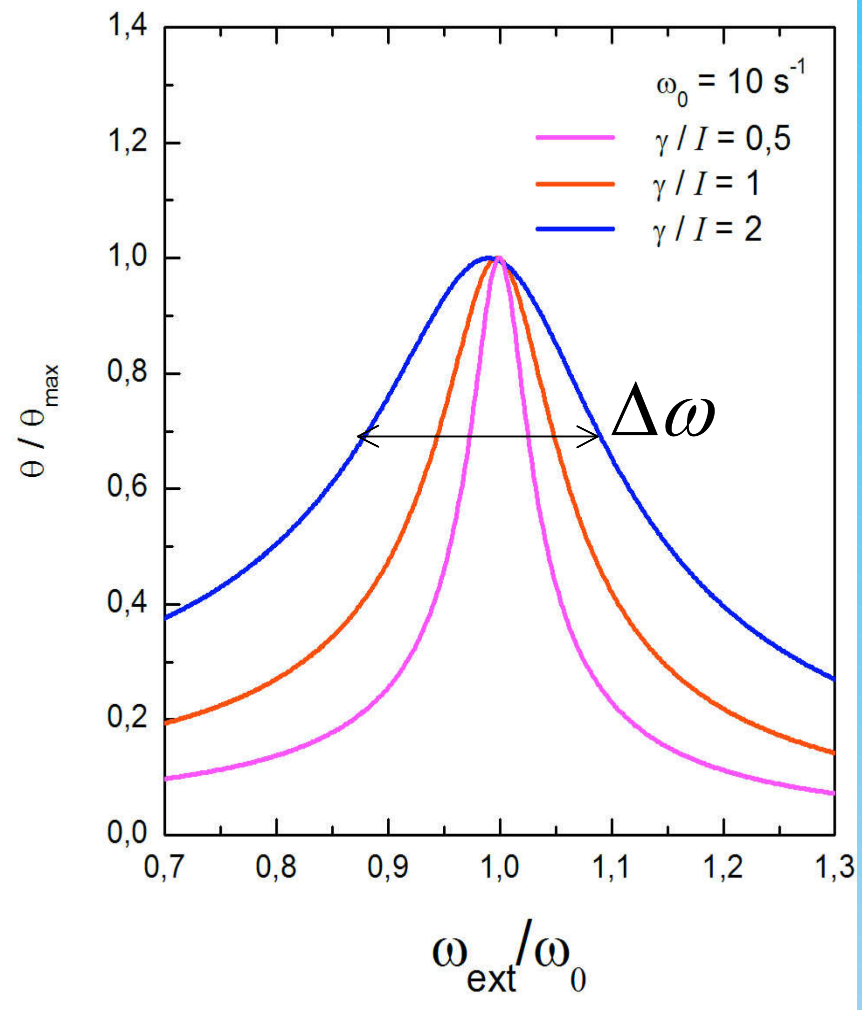
- O *fator-Q* é definido como:

$$fator - Q \sim \frac{\omega_1}{\Delta\omega}$$

- Onde ω_1 é a largura do pico de ressonância para

$$\theta \sim \frac{\theta_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

  - Nós vamos ver isto em detalhes em Lab IV

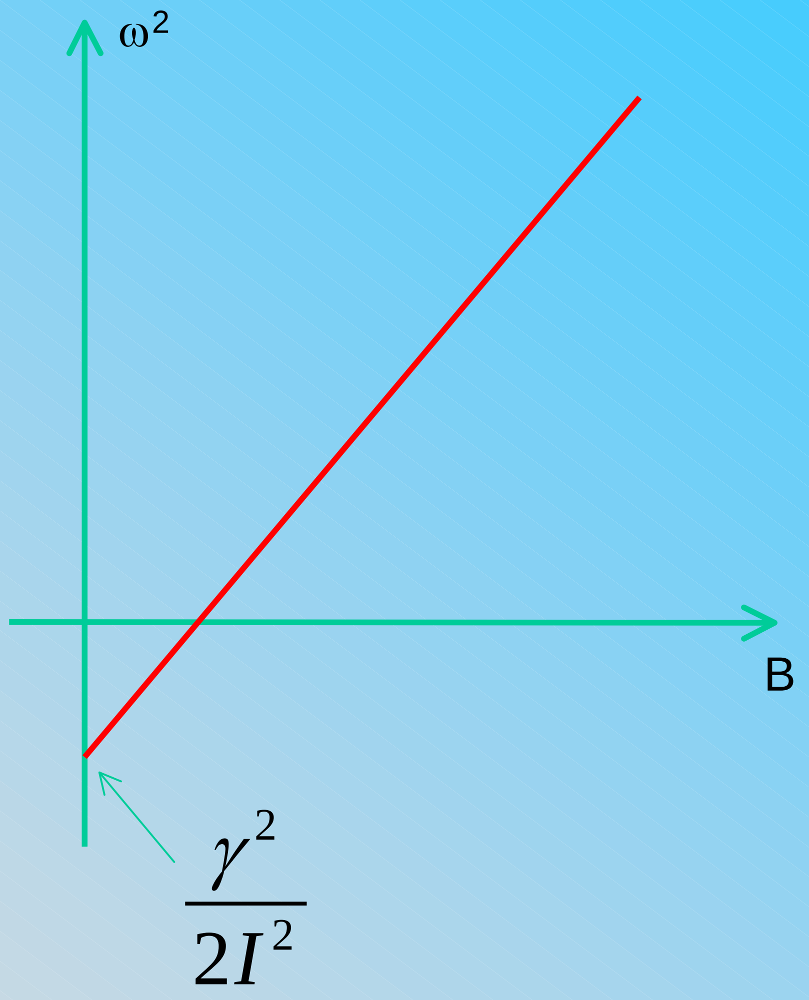


O que nós sabemos?

- A freqüência de ressonância é dada por

$$\omega_1^2 = \frac{\mu}{I} B - \frac{\gamma^2}{2I^2}$$

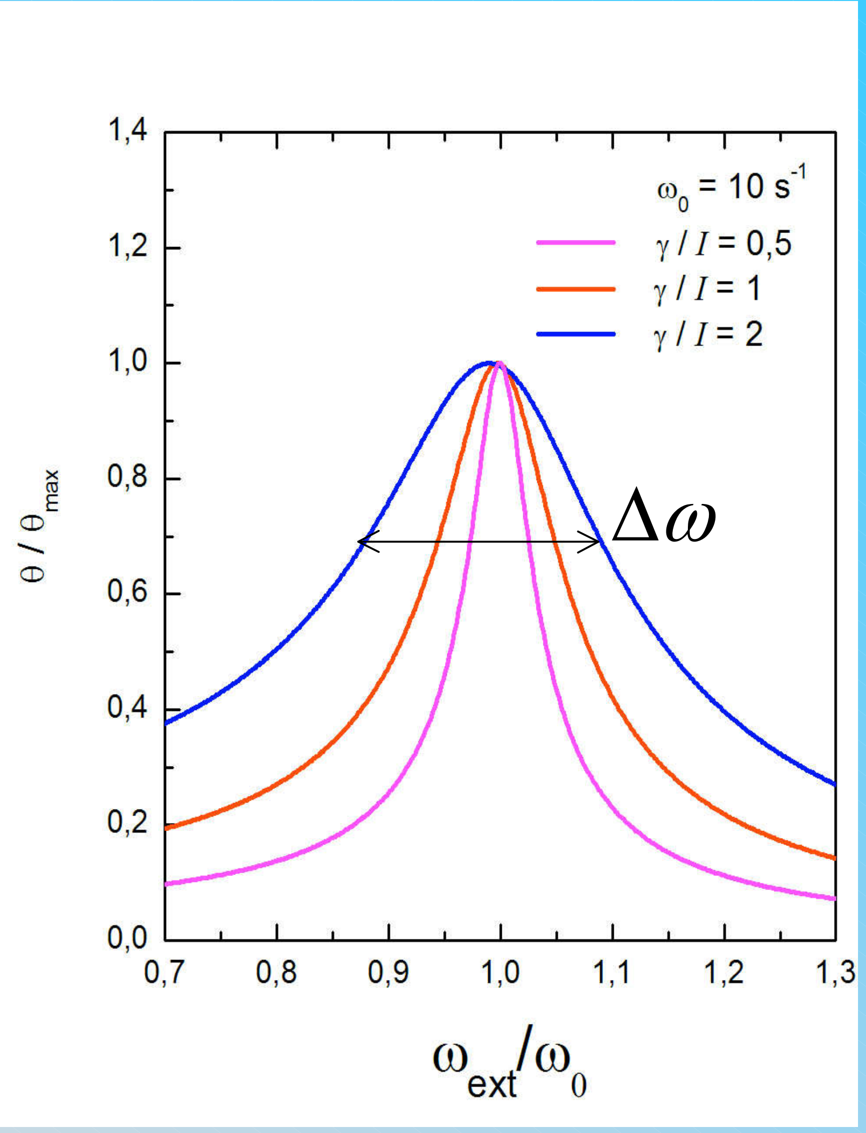
- Ou seja, um gráfico da freqüência ao quadrado em função do campo magnético dá uma reta



O que nós sabemos?

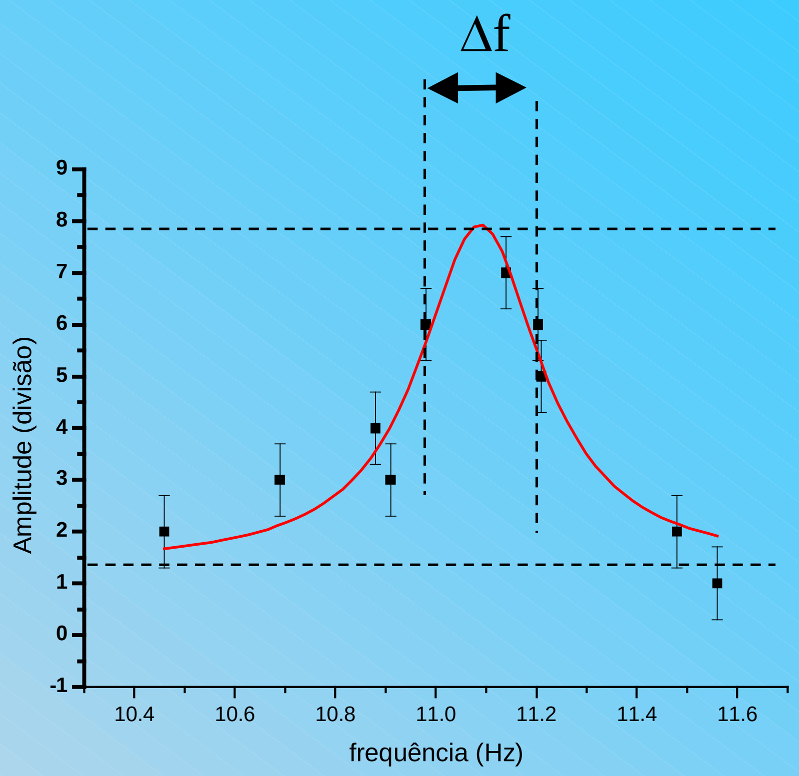
- A largura do pico de ressonância depende do coeficiente de dissipação
  - Fator de qualidade

$$fator - Q \sim \frac{\omega_1}{\Delta\omega}$$



Com Δω medido quando $\theta \sim \frac{\theta_{MAX}}{\sqrt{2}}$

Oscilações magnéticas amortecidas
Um exemplo



Bússola com agulha brilhante
Bobina com 1000 espiras, $I_1 = 3A$
B_2 em bobina de Helmholtz, 2V

Objetivos da semana

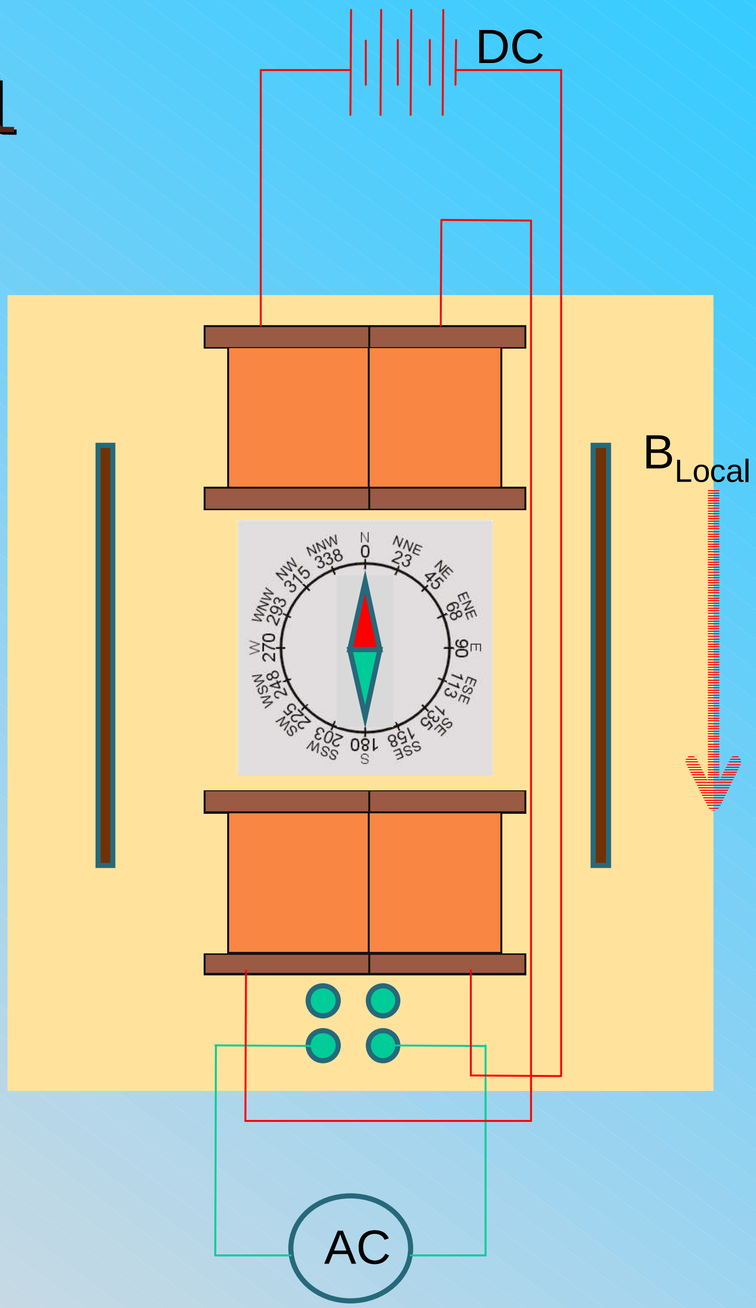
- Estudar o efeito de ressonância magnética em uma bússola
  - Estudar como a freqüência de ressonância depende do campo magnético aplicado
    - Gráfico de ω^2 *x B*.
  - Verificar a forma da curva de amplitude em função da freqüência e determinar o fator de qualidade da ressonância
    - Gráfico de *Amplitude x* ω.
- Como?

Arranjo experimental

- Requerimentos para o arranjo
  - Precisamos criar o campo principal B
    - Campo constante e intenso
      - Usar corrente contínua nas bobinas
      - Usar bobinas de muitas espiras
        - Utilizar bobinas de 1000 espiras APENAS!
  - Precisamos criar o campo perturbador
    - Campo oscilante no tempo de freqüência bem definida
      - Usar corrente alternada.
      - Não precisa ser intenso
        - Usar bobina de Helmholtz por questões de acesso ao experimento

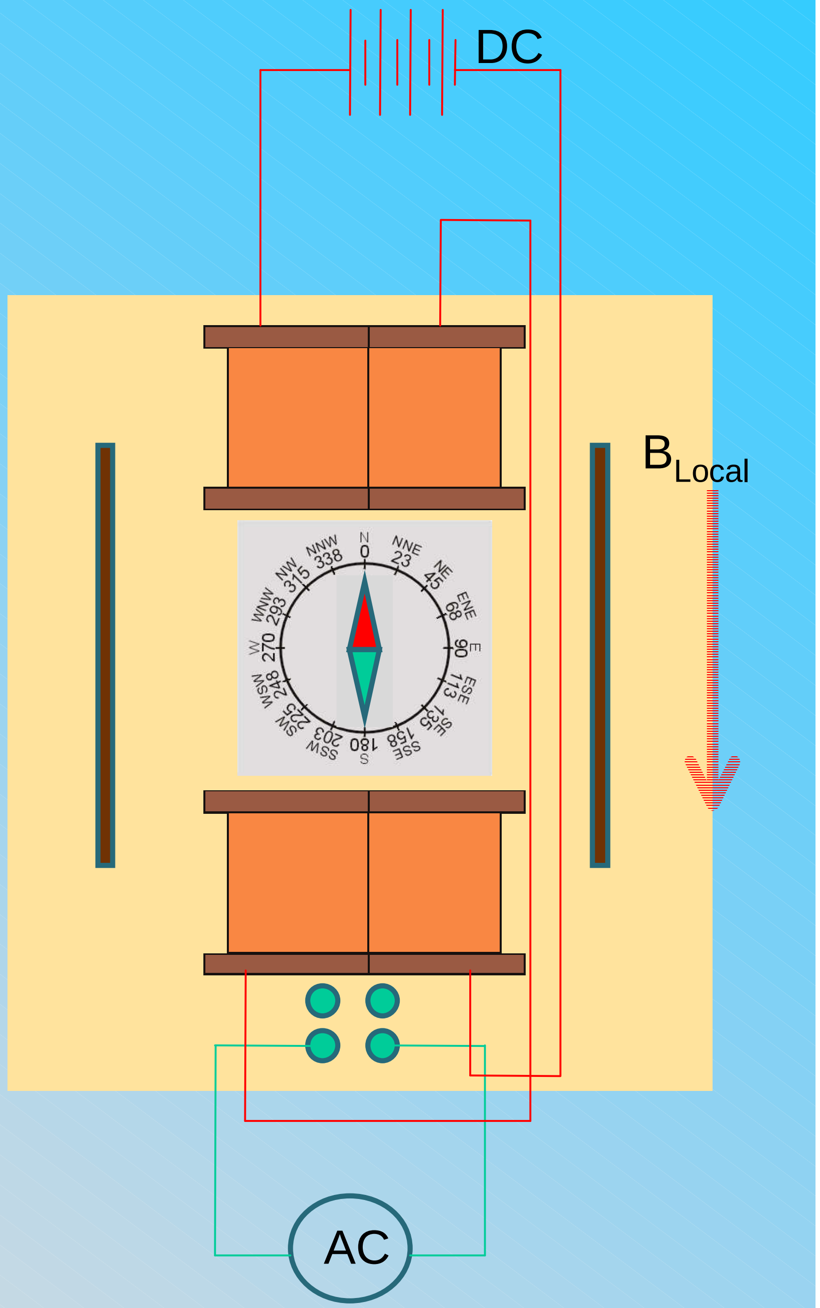
Arranjo experimental

- Alinhar bússola com campo local
- Montar as bobinas de 1000 espiras em série para formar campo uniforme na mesma direção de B_{local}.
  - Posicionar as bobinas o mais próximo possível uma da outra para que o campo gerado seja o mais intenso
  - Ligar as bobinas na fonte DC
- Posicionar a Bonina de Helmholtz 90º em relação às bobinas
  - Ligar a bonina no gerador de áudio (fonte AC)
  - Selecionar sinal senoidal com amplitude máxima



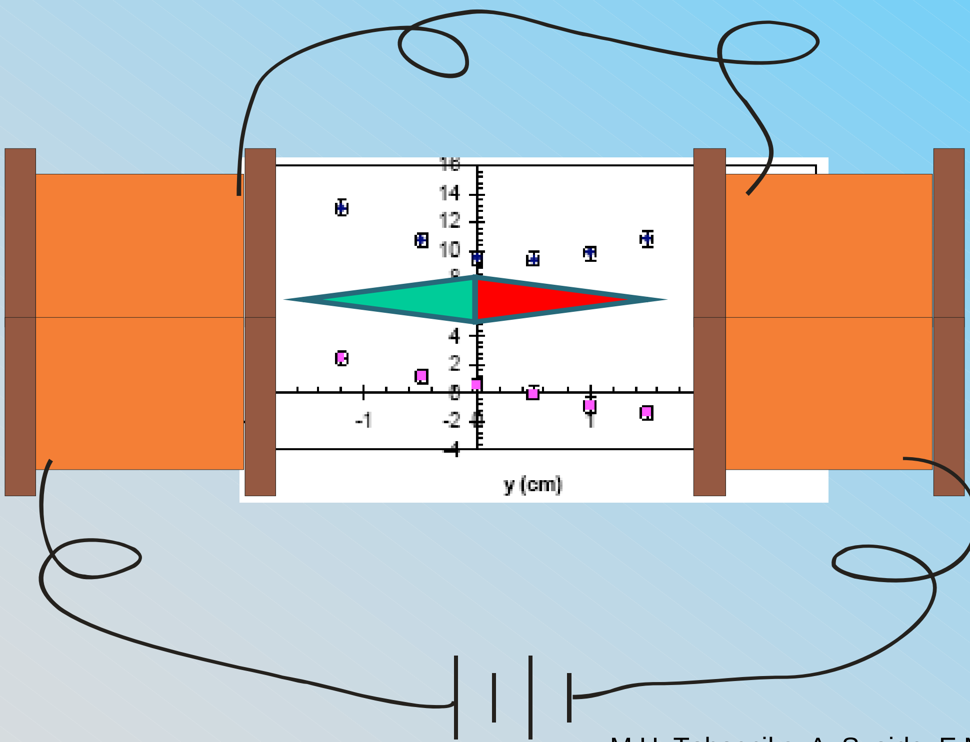
Procedimento experimental

- Ajuste a corrente DC nas boninas
- Meça o campo magnético com o sensor Hall
  - Detalhe importante sobre o campo
- Variar lentamente a freqüência da bobina de Helmholtz até obter a ressonância
  - Detalhe importante sobre a medida de freqüência
- Para a medida de Q, meça a amplitude em função da freqüência em torno da freqüência de ressonância.



Sobre a medida do campo

- O campo entre as bobinas não é constante
  - Lembre-se da experiência anterior
- O campo B é o valor médio ao longo da agulha da bússola
  - E a incerteza em B pode ser estimada como metade da variação
- Para cada medida de campo com o sensor Hall, verificar o máximo e mínimo de campo sobre a agulha, estimar a média e incerteza



Sobre a medida de freqüência

- Em geral, procuramos a freqüência de ressonância aumentando lentamente a freqüência no gerador de áudio.

- Este procedimento introduz erros sistemáticos pois sempre temos a tendência de medir valores menores que a freqüência de ressonância de fato

- Para eliminar estas incertezas sistemáticas, faça o seguinte procedimento
  - Determinar a freqüência de ressonância pelo lado de baixas freqüências e altas freqüências, SEM OLHAR PARA O GERADOR. OLHE APENAS PARA A BÚSSOLA
  - A freqüência de ressonância é a média dos valores obtidos e a incerteza pode ser estimada como o desvio entre os valores.

Atividades

- Fazer o gráfico de ω^2 em função de B
  - Medir uns 5-7 pontos, variando a corrente nas bobinas entre 0,1 e 1,0 A.
  - Isto faz com que as freqüências de ressonância fiquem entre 2 e 25 Hz.
  - Ajustar o modelo apropriado e determinar as constantes da bússola

- Medir a curva de amplitude para uma dada ressonância
  - Ajustar o campo para uma freqüência de ressonância entre 8-10 Hz
  - Medir a amplitude de oscilação da bússola em função da freqüência em torno da ressonância
  - Fazer o gráfico de amplitude em função da freqüência
  - Ajustar o modelo adequado com os parâmetros obtidos no item anterior
  - Determinar o valor do fator-Q.