INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

1º Semestre de 2007

Professor: Alvaro Vannucci

Livros-Texto: - Reitz-Milford

- Griffiths

Relembrando as 4 equações básicas do Eletromagnetismo:

- 1ª) **Lei de Gauss**:

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}} \qquad ; \quad q_{\text{int}} = \int \rho\, dV$$

Em meios materiais:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \;\Rightarrow Teo.Div.: \oint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \int \nabla\cdot\vec{F}\,dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho}$$

Cálculo de Fluxo !

$\equiv$ **1ª Equação de Maxwell**

- 2ª) **Lei do Fluxo Magnético**:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA = 0} \;\Rightarrow\; Teo.\ Div. \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

$\equiv$ **2ª Equação de Maxwell**

- 3ª) **Lei de Ampère**:

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}} \quad ; \quad I_{enl} = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\, dA$$

Em meios materiais:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \Rightarrow Teo.Stokes: \int (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\, dA = \oint \vec{F}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}} \equiv \text{3ª Equação de Maxwell}$$

Mas Falta a Corrente de Deslocamento!

- 4ª) **Lei de Faraday**:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}} \Rightarrow Teo.\ Stokes \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Lei de Lenz

$\equiv$ 4ª Equação de Maxwell


UNIVERSO
MECÂNICO

- Agora, só para lembrar, da eq. de Faraday:

Auto Indutância

$$\begin{cases} \phi_M = \int \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA \\ \dfrac{d\phi_M}{dt} = \dfrac{d\phi_M}{dI}\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$

- Também: $$\begin{cases} \vec{J} = n\,q\,\vec{v} \quad e \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} & \text{Lei de Ohm} \\ \nabla\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 & \text{Eq. da Continuidade} \end{cases}$$

- Armazenamento de energia elétrica e magnética:

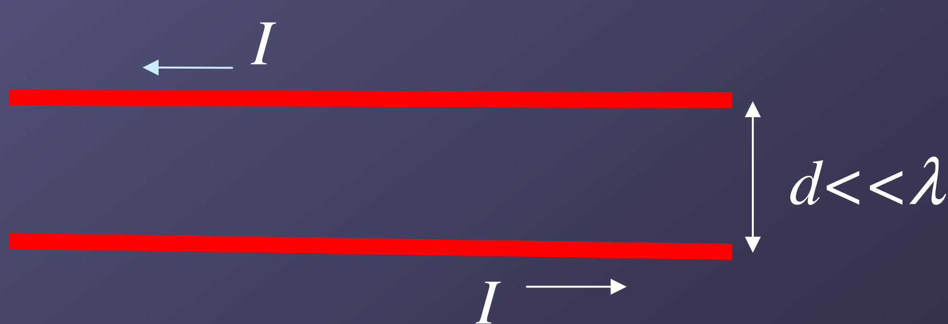
$$\begin{cases} U_C = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} \\ U_L = \dfrac{1}{2}LI^2 \end{cases}$$

- Circuitos: supondo correntes variando lentamente (ddp variável com $\omega = 2\pi f$)

- Estudaremos situações $\ell_{tipico} << \lambda_{rad.emitida}$; $\lambda_{rad.} = \dfrac{c}{f} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$

- Satisfeita esta condição $\Rightarrow$ para cada elemento $d\ell$ com corrente I haverá outro com -I

- Isto tende a produzir cancelamento dos campos por eles criados (não há dissipação de energia).

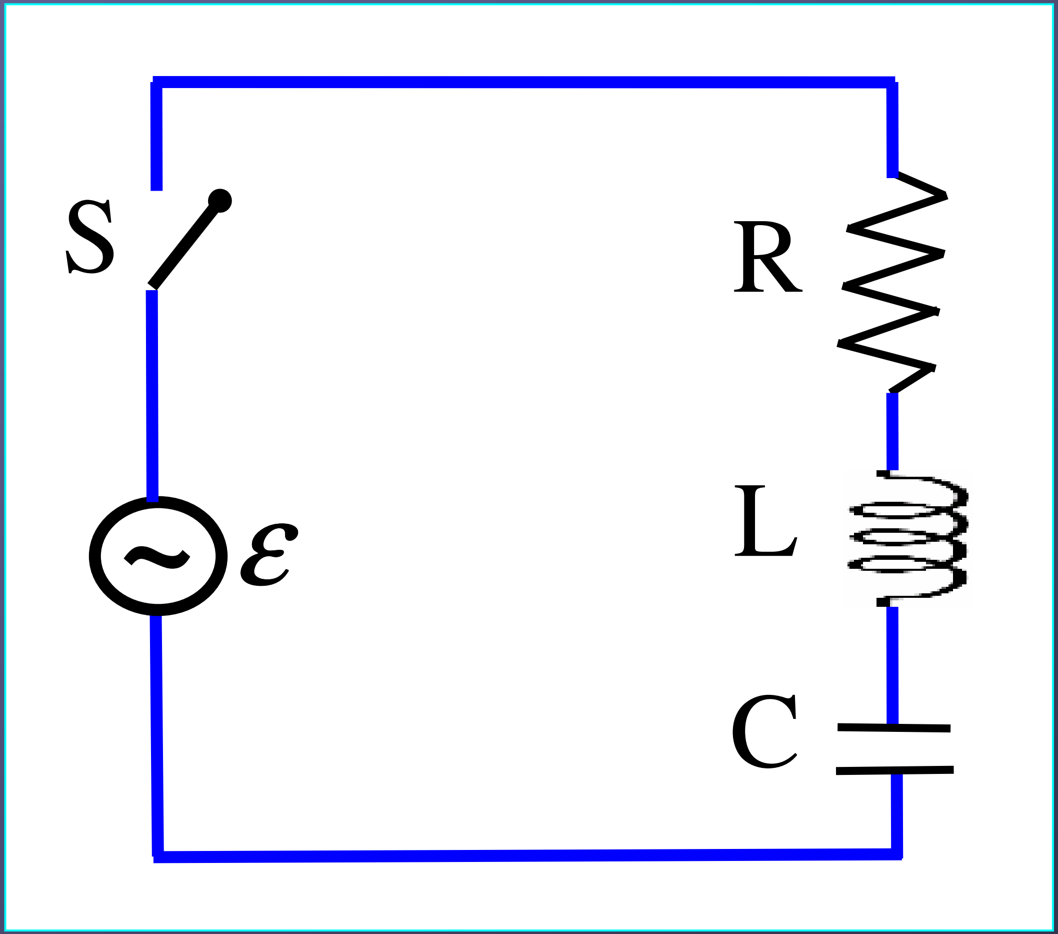


- Por exemplo, para satisfazer que $\lambda \geq 10\ \ell$

Radiação	f (Hz)	ω (rad/s)	λ (m)	ℓ (m)
Linhas de Transmissão	60	376	5×10^6	5×10^5
AM	10^6 (MHz)	$6,3\times10^6$	300	30
FM,TV	10^8 (100 MHz)	$6,3\times10^8$	3	0,3
Micro-Ondas	10^{11}(10 GHz)	$6,3\times10^{10}$	0,03	0,003

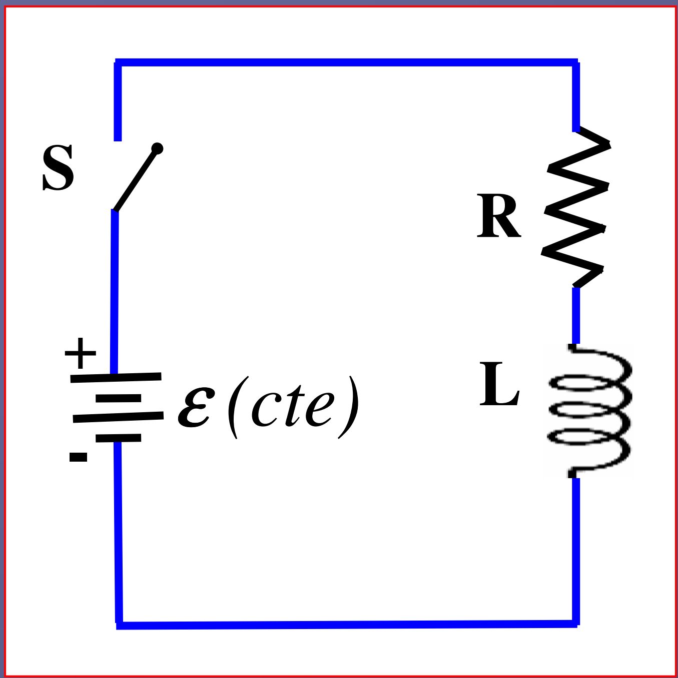
- Em frequencias altas, é importante circuitos “compactos” para evitar perdas significativas de energia.

- ***Circuitos RLC***



- Fechando S, *primeiro ocorre transiente* e depois tem-se *regime estacionário.*

- Por exemplo, circuito RL com tensão constante.



Pela conservação da energia (Potência):

$$P_{fonte} = P_{resistor} + P_{indutor}$$

$$\varepsilon \cancel{I} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = RI^{\cancel{2}} + L\cancel{I}\frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt}}$$

Eq. diferencial a ser resolvida (após o fechamento da chave S)

Podemos tentar solução do tipo:

$$I = \kappa\, e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \kappa\, \beta e^{\beta t}$$

Subst. na eq. diferencial: $\varepsilon = R\,(\overset{(I)}{\kappa e^{\beta t}}) + L\,(\overset{(dI/dt)}{\kappa \beta e^{\beta t}})$

$(\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt})$ (*)

derivando no tempo:

$$0 = R\,\cancel{\kappa}\,\cancel{\beta}\,\cancel{e^{\beta t}} + L\,\cancel{\kappa}\,\beta^{\cancel{2}}\,\cancel{e^{\beta t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = -\frac{R}{L}}$$

dividindo a eq. (*) por R, temos:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{L}{R}\kappa\,\beta\, e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R} + \kappa\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$

- Como vimos, a corrente é dada por: $$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} + \kappa\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$

- Agora, a chave **S** fechando em $t = t_0 = 0$, quando $I = I_0 = 0$:

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} + \kappa \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Substituindo: $$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}$$

- Finalmente: $$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

- Outra maneira de resolver:

$$\frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \longrightarrow \frac{R}{L}\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right)dt = dI$$

Ou seja:

$$\boxed{\int_0^t \frac{R}{L}dt = \int_0^I \frac{1}{\frac{\varepsilon}{R} - I}dI}$$

Chamando: $\frac{\varepsilon}{R} - I = i \longrightarrow \frac{di}{dI} = -1 \quad \therefore \quad di = -dI$

$$\text{quando} \begin{cases} I = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} \\ I = I \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} - I \end{cases} \Rightarrow \int_0^t \frac{R}{L}dt = \int_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} -\frac{di}{i}$$

- Resolvendo $$\int_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} -\frac{di}{i} = (-)\ln i\Big|_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} = (-)\ln\left(\frac{\frac{\varepsilon}{R}-I}{\frac{\varepsilon}{R}}\right)$$

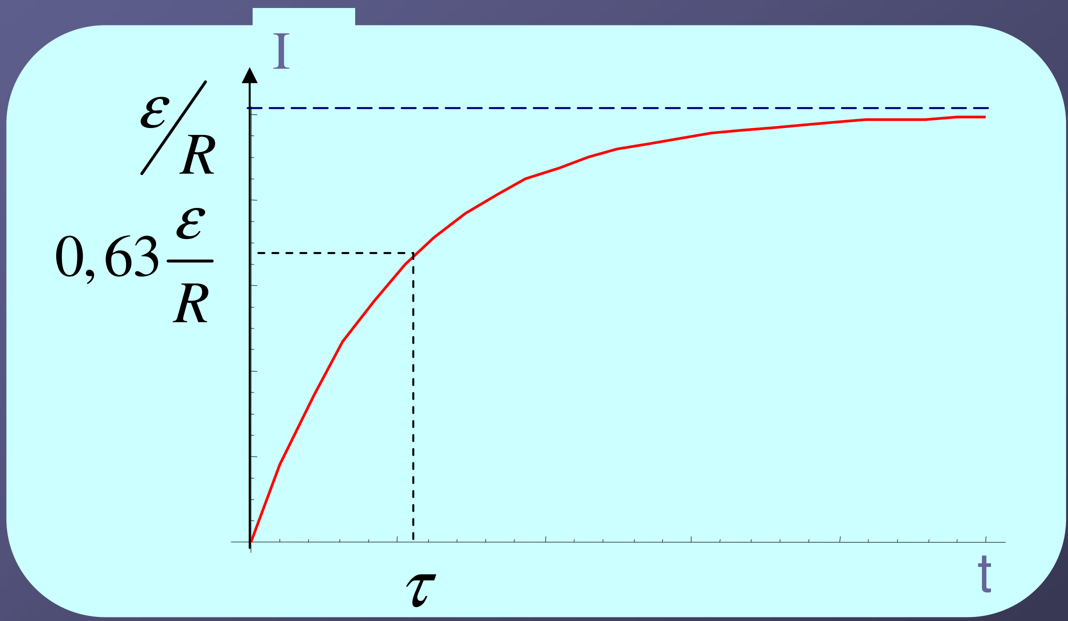
- Então a igualdade: $$\int_0^t \frac{R}{L}dt = \int_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} -\frac{di}{i}$$ resulta:

$$(-)\frac{R}{L}t = \ln\left(1-\frac{I}{\varepsilon/R}\right) \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{I}{\varepsilon/R} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Finalmente: $$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$ c.q.d.

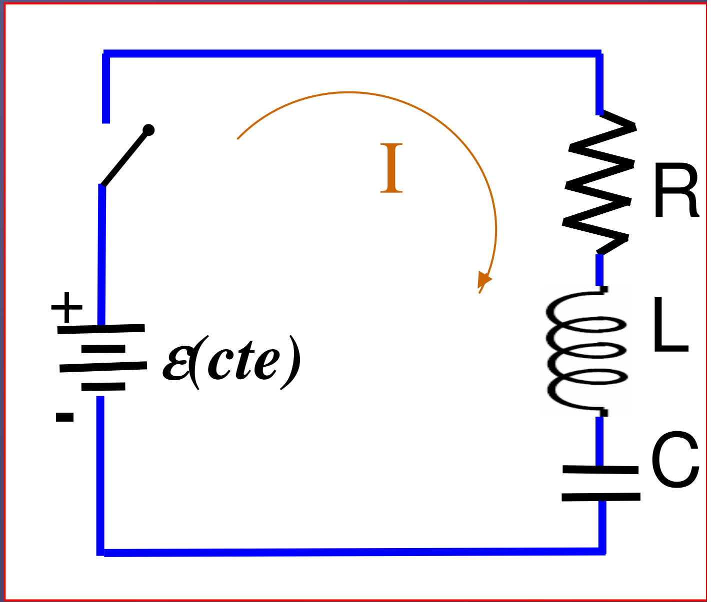
- Observe que

$$\left(I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \right) \begin{cases} \text{para } t = 0, \quad I = 0 \\ \text{para } t \to \infty, \ I \to \dfrac{\varepsilon}{R} \end{cases}$$



$$\tau = \frac{L}{R} \equiv \text{“}\textit{Constante de tempo}\text{”}$$

- 2º Exemplo: Circuito RLC subtamente conectado a uma tensão ε constante.



$$P_{fonte} = P_{resistor} + P_{indutor} + P_{capacitor}$$

$$\varepsilon \cancel{I} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) =$$

$$= RI^{\cancel{2}} + \frac{1}{2}L2\cancel{I}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{2C}2Q\cancel{\frac{dQ}{dt}}$$

Sendo $I = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad Q = \int I\,dt$

Então: $\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt$

Derivando no tempo:

$$0 = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I$$

Supondo, novamente: $I = \kappa e^{\beta t}$

Pode-se mostrar: $$I = \left(A e^{i\omega_n t} + B e^{-i\omega_n t} \right) e^{-\frac{R}{2L}t}$$

(faça!)

Amortecimento sub-crítico

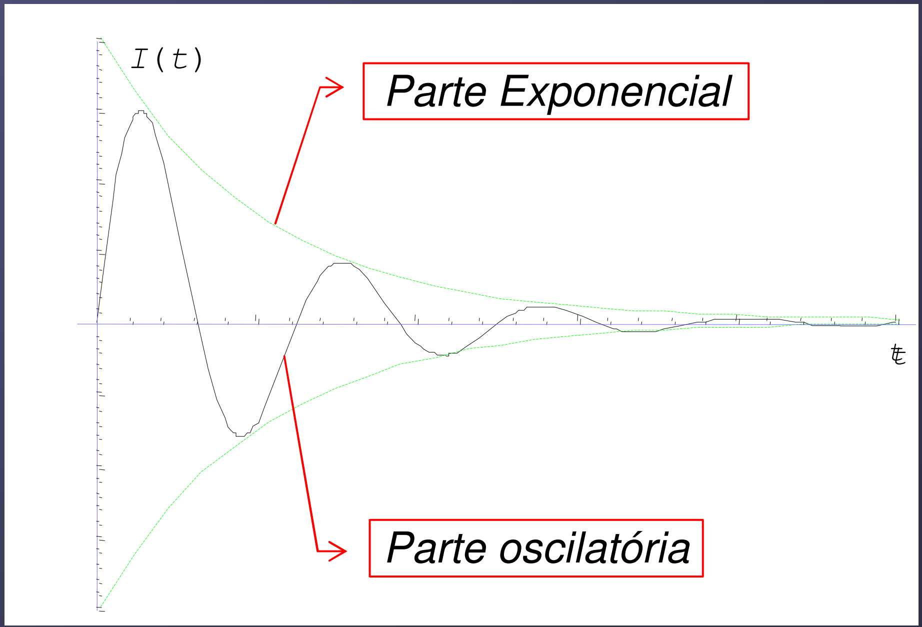
Sendo $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$; $para\ \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Agora, lembrando que:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$$

(substituindo e tomando parte *Real*)

$$I = D e^{-\frac{R}{2L}t} sen\left(\omega_n t + \delta\right)$$



Replay …