Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

1ª aula – 27/fev/2007

- Livros-Texto: Reitz-Milford
  Griffiths

- Vamos relembrar as **4 equações básicas do Eletromagnetismo**

1ª) **Lei de Gauss**: O Fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada corresponde à carga interna a esta superície.

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}; \qquad q_{\text{int}} = \int \rho dV\ .$$

- Considerando meios materiais ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$), e aplicando o *Teorema do Divergente* ($\oint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \int \nabla\cdot\vec{F}\,dV$):

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$ $\equiv$ ***1ª Equação de Maxwell*** na forma diferencial

2ª) **Lei do Fluxo Magnético**: Corresponde à lei de Gauss para o magnetismo. Reflete o fato de não existirem monopolos magnéticos.

- Igualmente: $\oint \vec{B}\cdot\hat{n}\ dA = 0 \iff \nabla\cdot\vec{B} = 0$ $\equiv$ ***2ª Equação de Maxwell***

3ª) **Lei de Ampère**: Permite o cálculo do campo magnético devido a uma corrente elétrica, enlaçada por uma circuitação fechada:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\, I_{enl.};\quad I_{enl.} = \int \vec{J}\cdot\hat{n}\ dA$$

- Em meios materiais ($\vec{B} = \mu\vec{H}$), e aplicando o *Teorema de Stokes*: ($\int (\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA = \oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$):

$\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$ $\equiv$ ***3ª Equação de Maxwell***

Falta acrescentar a *Corrente de Deslocamento*: $+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

4ª) **Lei de Faraday**:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \equiv \quad \textit{4}^{a} \textit{ Equação de Maxwell}$$

- Vale lembrar também: $\begin{cases} Fluxo\ Magn\acute{e}tico: \ \phi = \int \vec{B}\cdot\hat{n}dA \\ Sendo\ que: \dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{d\phi}{dI}\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$

Auto-indutância

- E ainda: $\begin{cases} \vec{J} = nq\vec{v}\,; \ \vec{J} = \sigma\vec{E} \ (Lei\,de\,Ohm) \\ \nabla\cdot\vec{J} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \ (Eq.Continuidade) \end{cases}$

- No semestre passado estudamos o armazenamento de energia elétrica e magnética através de **Capacitores** e **Indutores**, respectivamente, de forma que:

$$\boxed{U_C = \frac{1}{2}CV^2} \ \text{ou} \ \boxed{U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

$$\text{e} \quad \boxed{U_L = \frac{1}{2}LI^2}$$

<u>Circuitos que variam lentamente</u> (podemos desprezar a radiação emitida).

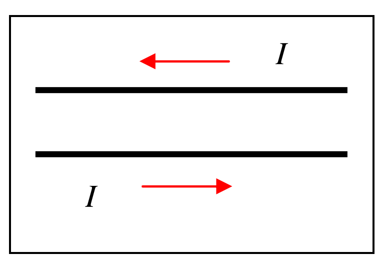
- Alguma coisa sobre circuitos com tensões constantes (C.C.) já foi estudada no semestre anterior. Veremos agora circuitos submetidos a uma diferença de potencial (*ddp*) variável (C.A.) com freqüência angular $\omega=2\pi f$.

- Ficaremos restritos aos casos em que a corrente varia lentamente, ou seja, as dimensões típicas dos circuitos elétricos l seguem a regra:

$$\boxed{l << \lambda \ ; \ \lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}}$$

sendo λ o *comprimento de onda* da radiação emitida.

- Satisfazendo-se esta condição para todo elemento $d\vec{l}$ do circuito (com corrente I), haverá um outro $-d\vec{l}$ a uma distância pequena, muito menor que λ. Isto produz um cancelamento dos campos produzidos por estes elementos a partir de alguns λ's. Ou seja, os campos criados pelo circuito ficam restritos às imediações dos circuitos e não há dissipações significativas de energia por radiação.

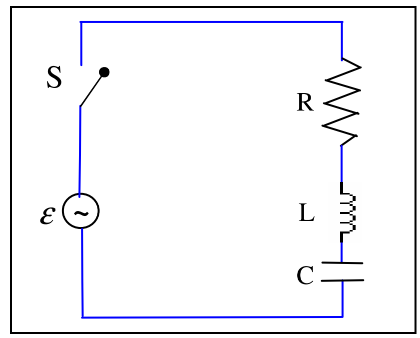


Por exemplo:

Radiação	f (Hz)	ω (rad/s)	λ (m)	l (m)
Linhas de Transmissão	60	376	5×10^6	5×10^5
AM	10^6 (1 MHz)	$6{,}3\times10^6$	300	30
FM,TV	10^8 (100 MHz)	$6{,}3\times10^8$	3	0,3
Micro-Ondas	10^{11} (10 GHz)	$6{,}3\times10^{10}$	0,03	0,003

- Veja que no último caso, para que não haja perdas significativas de energia, o circuito deve estar bem "compactado" (veja o caso de um micro-processador de 3 GHz!).

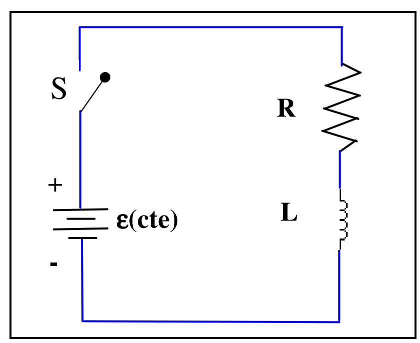
Circuito RLC



- Quando a chave S é fechada, ocorre inicialmente um transiente e, somente depois, o circuito entra em regime estacionário.

- Ambos os estados (transiente e estacionário) são regidos pelas mesmas equações diferenciais básicas. Somente as técnicas de resolvê-las são geralmente diferentes.

- Como exemplo do comportamento transitório, supomos um circuito RL com tensão constante.



- Pela conservação da Potência:

$$P_{fonte} = P_{resistor} = P_{indutor}$$

- Ou seja:

$$\varepsilon I = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = RI^2 + LI\frac{d}{dt}I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt}} \quad \text{(Após fechamento da chave)}$$

- Esta é uma equação diferencial de primeira ordem em I e a solução depende apenas de uma constante arbitrária.

- Tentando uma solução do tipo: $I = \kappa e^{\beta t} \Rightarrow \frac{dI}{dr} = \kappa\beta e^{\beta t} \Rightarrow$ substituindo na equação para a f.e.m. ε acima:

$$\varepsilon = R\kappa e^{\beta t} + L\kappa\beta e^{\beta t} \quad \Rightarrow \text{ diferenciando } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 = R\kappa\beta e^{\beta t} + L\kappa\beta^2 e^{\beta t} \; ; \text{ de onde obtemos: } \boxed{\beta = -\frac{R}{L}}.$$

- Assim:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{L}{R}\kappa\beta e^{\beta t} = \frac{\varepsilon}{R} + \kappa e^{-\frac{R}{L}t}.$$

- Se a chave for fechada em $t = t_0 = 0$, quando $I = I_0 = 0$, então da última equação temos:

$$0 = \frac{\varepsilon}{R} - \kappa \quad \Rightarrow \quad \kappa = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\therefore \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$$

- Outra maneira de resolver (por integração direta): $\frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$

- Da equação do circuito: $\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{R}{L}\left(\frac{\varepsilon}{R} - I\right)dt = dI$

- Integrando os dois lados:

$$\int_0^t \frac{R}{L}dt = \int_0^I \frac{1}{\frac{\varepsilon}{R} - I}dI,$$

- Agora, chamando $\frac{\varepsilon}{R} - I = i \rightarrow \frac{di}{dI} = -1 \rightarrow di = -dI$ e como $\begin{cases} para\ I = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} \\ para\ I = I \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} - I \end{cases}$

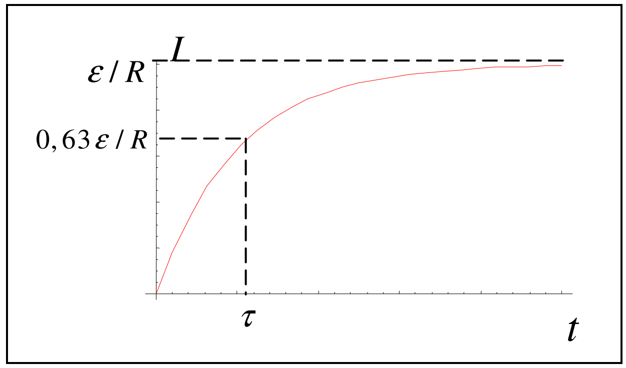
$$\text{Então:} \quad \int_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} -\frac{di}{i} = (-)\ln i \Big|_{\frac{\varepsilon}{R}}^{\frac{\varepsilon}{R}-I} = -\ln\left(\frac{\frac{\varepsilon}{R} - I}{\frac{\varepsilon}{R}}\right)$$

- Portanto: $(-)\frac{R}{L}t\ln\left(1 - \frac{I}{\varepsilon / R}\right) \Rightarrow 1 - \frac{I}{\varepsilon / R} = e^{-\frac{Rt}{L}} \Rightarrow$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)} \quad \text{c.q.d.}$$

- Observe que

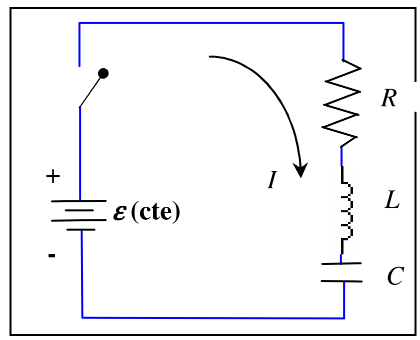
$$\begin{cases} \text{para } t = 0 \Rightarrow I = 0 \\ \text{para } t = \infty \Rightarrow I = \dfrac{\varepsilon}{R} \end{cases} \quad \Rightarrow$$



- Definimos $\tau = \dfrac{L}{R}$ ≡ "*Constante de tempo*"≡ Tempo necessário para que a corrente atinja ~63% do seu valor final. Em t ~ 5τ, por exemplo, I ~ 0,993 I_{final}.

2º Exemplo: <u>Circuito RLC subitamente conectado a uma tensão ε constante</u>.

- Equação diferencial do circuito:



$$P_{fonte} = P_{resistor} + P_{indutor} + P_{capacitor}$$

$$\varepsilon I = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right), \text{ onde}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int Idt$$

$$\varepsilon = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int Idt .$$

- Derivando no tempo, temos

$$0 = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I .$$

- Supondo novamente $I = \kappa e^{\beta t}$, obtemos (*ver apêndice**)

$$\boxed{I = \left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}}, \text{ onde } \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

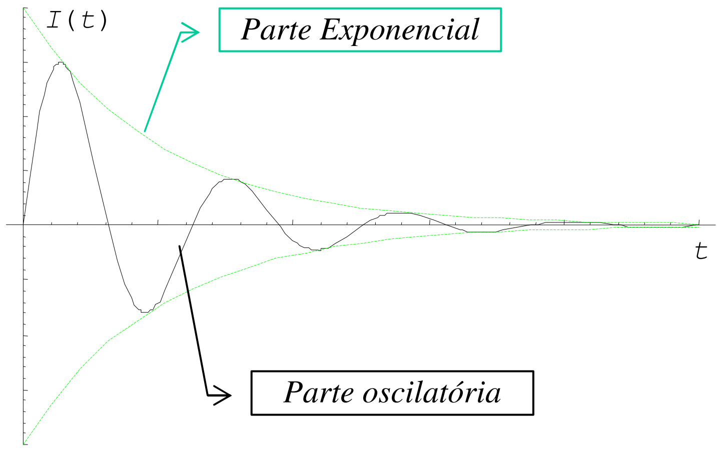
- Lembrando que $e^{i\theta} = cos\theta + i\, sen\theta$ e pegando a parte real da expressão acima, temos (*ver apêndice***):

$$\boxed{I = De^{-\frac{R}{2L}t} sen\left(\omega_n t\right)};$$

sendo D uma constante a ser determinada segundo condições iniciais do problema.

- Na verdade, seriam duas constantes, sendo que a segunda seria a constante de fase, de forma que deveríamos escrever $sen\left(\omega_n t + \delta\right)$

- O gráfico correspondente, da corrente em função do tempo é:



Apêndice

(*)

- Equação do circuito RLC:

$$0 = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C}; \quad \text{sendo que} \begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \kappa\beta e^{\beta t} \\ \dfrac{d^2I}{dt^2} = \kappa\beta^2 e^{\beta t} \end{cases}$$

- Então: $0 = R\kappa\beta e^{\beta t} + L\kappa\beta^2 e^{\beta t} + \dfrac{1}{C}\kappa e^{\beta t} \Rightarrow 0 = R\beta + L\beta^2 + \dfrac{1}{C} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \frac{R}{L}\beta + \beta^2 + \frac{1}{LC} \Rightarrow \beta = \frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

- Mas: $\sqrt{\dfrac{R^2}{L^2} - \dfrac{4}{LC}} = 2\sqrt{(-1)\left(\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}\right)} = 2i\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$ (supondo-se $\dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{LC}$)

- Portanto: $\beta = -\dfrac{R}{2L} \pm i\underbrace{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}_{(=\omega_n)} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -\dfrac{R}{2L} + i\omega_n \\ \beta_2 = -\dfrac{R}{2L} - i\omega_n \end{cases}$; então: $\begin{cases} I_1 = \kappa\beta e^{-\frac{R}{2L}t} e^{+i\omega_n t} \\ I_2 = \kappa\beta e^{-\frac{R}{2L}t} e^{-i\omega_n t} \end{cases}$

- Solução Geral: Combinação linear das duas soluções:

$$I = \left(\underbrace{A'k}_{=A} e^{i\omega_n t} + \underbrace{B'k}_{=B} e^{-i\omega_n t}\right) e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- Finalmente: $\boxed{I = \left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right) e^{-\frac{R}{2L}t}}$, onde $\boxed{\omega_n = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$

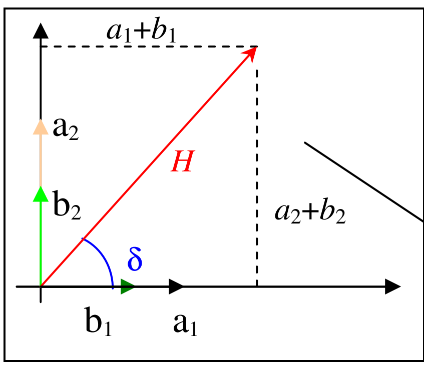
(**)

- Usando $e^{i\theta} = cos\theta + i\,sen\theta \;\Rightarrow \left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right) = A(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) +$
  $+B(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t)$; sendo A e B constantes complexas: $\begin{cases} A = a_1 + ia_2 \\ B = b_1 + ib_2 \end{cases}$

- Portanto: $\left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right) = (a_1 + i\,a_2)\,cos\omega_n t + i\,(a_1 + i\,a_2)\,sen\omega_n t +$
  $+(b_1 + i\,b_2)\cos\omega_n t + i\,(b_1 + i\,b_2)\,sen\omega_n t \;=\; (a_1 + b_2)\cos\omega_n t - (a_2 + b_2)sen\omega_n t + i\,(\;...\;)$

  Parte Imaginária

- Mas:



$$\cos\delta = \frac{a_1 + b_1}{H} \text{ e } \sin\delta = \frac{a_2 + b_2}{H}$$

- Finalmente: $\left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right) = H\left[\cos\delta\cos\omega_n t - \sin\delta\sin\omega_n t\right] = H\,\cos(\omega_n t + \delta)$