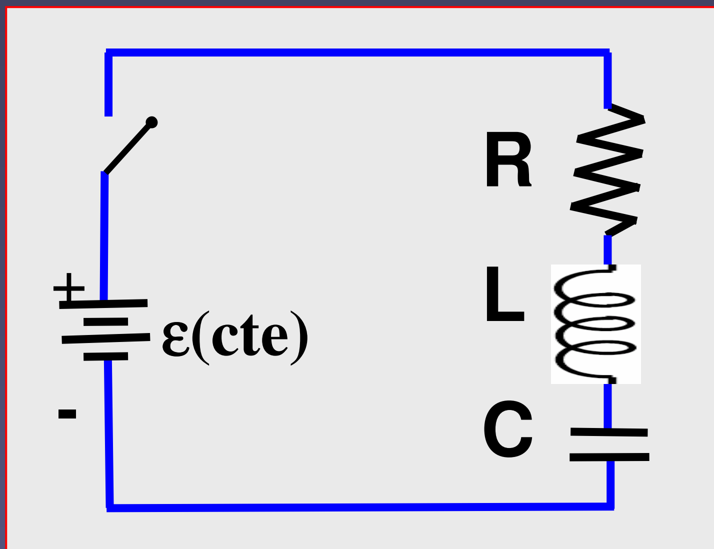
Eletromagnetismo II

2ª Aula

Professor Alvaro Vanucci

Na aula passada vimos...



Circuitos RLC com tensão constante

$$\cancel{\frac{d\varepsilon}{dt}} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I$$

= 0, para ε constante

- Solução:

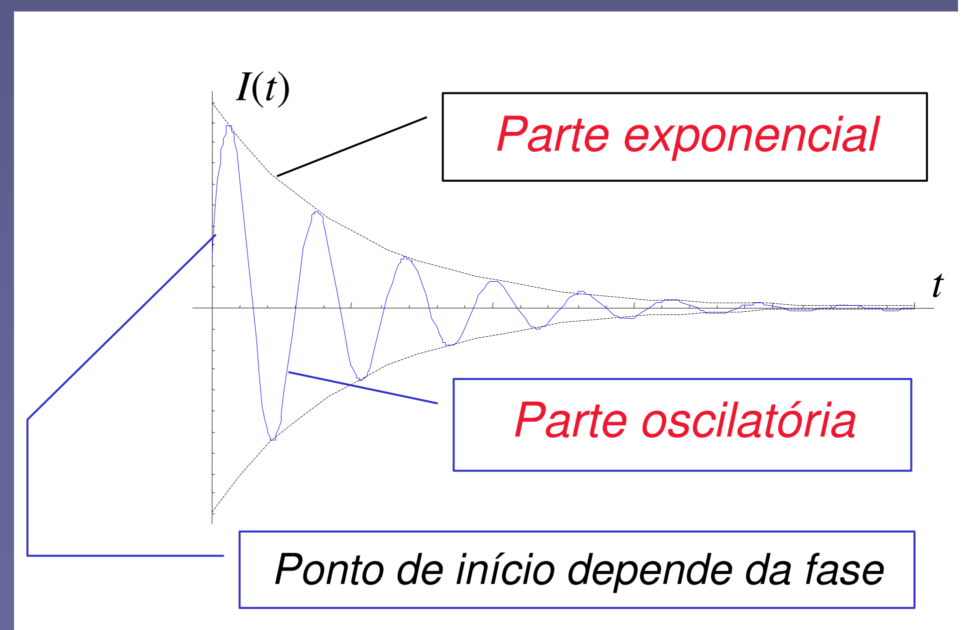
Amortecimento sub-crítico

$$I = \left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- Sendo: $$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

condições de contorno

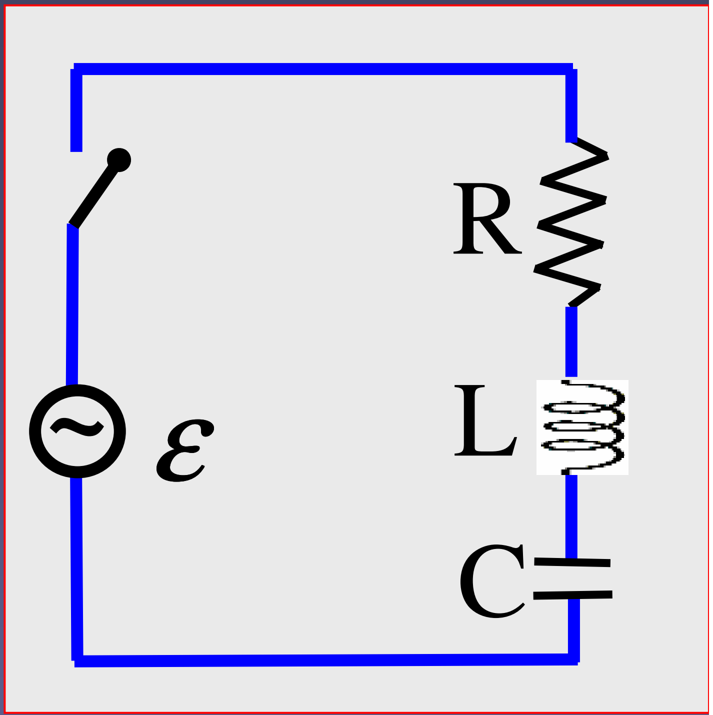
Ou: $$I(t) = D\,e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\omega_n t + \delta\right)$$



Circuito RLC com tensão periódica: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$

- Devemos lembrar:

1. L e C <u>ideais</u> não dissipam energia mas se opõem à variação de I.



2. Eq. do circuito é a mesma de antes; só que $\varepsilon = \varepsilon(t) \rightarrow d\varepsilon/dt \neq 0$

- Técnica interessante de resolução:

$$\begin{cases} \varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \ ; \ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t \ = \mathrm{Re}\left(\varepsilon_0 \, e^{i\omega t}\right) \\ I \rightarrow I_1 + iI_2 \ ; \ I = \mathrm{Re}\left(I_0 \, e^{i\omega t}\right) \end{cases}$$

Substituindo ε e I na equação diferencial: $\left(\frac{d\varepsilon}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I\right)$

$$i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} = RI_0 i\omega e^{i\omega t} - L\omega^2 I_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{C} I_0 e^{i\omega t}$$

(÷ tudo por $i\omega$): $\varepsilon_0 e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t} + i\omega L I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}_{=\,\varepsilon(t)} = \underbrace{I_0 e^{i\omega t}}_{=\,I(t)} \underbrace{\left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right)}_{=Z}$$

ε (t) I (t) $= Z \equiv$ *Impedância* (Ω)

$$\boxed{Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$\omega L = \chi_L \equiv$ *Reatância Indutiva*

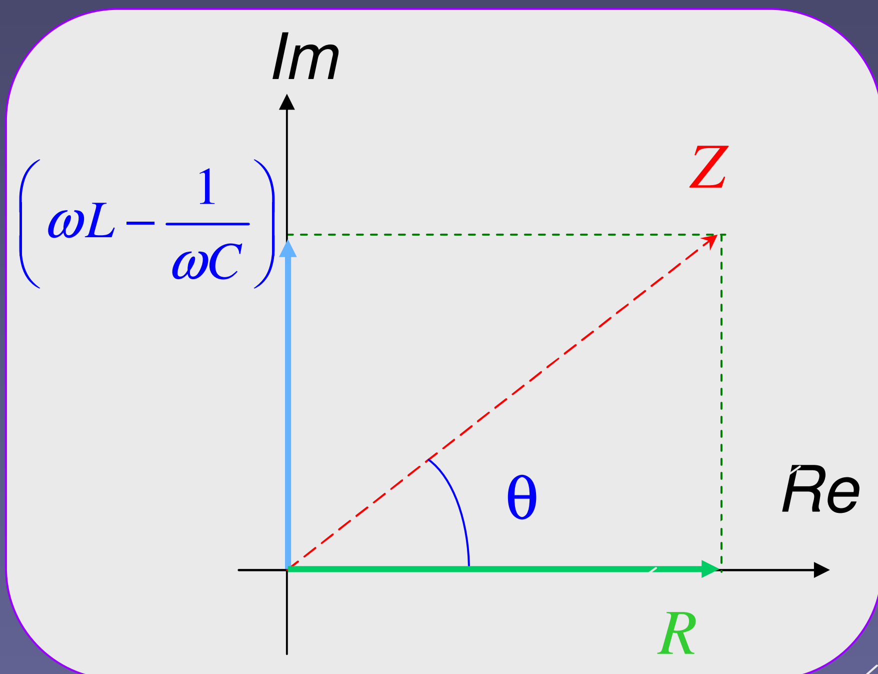
$\frac{1}{\omega C} = \chi_C \equiv$ *Reatância Capacitiva*

$$\therefore \quad \boxed{\varepsilon(t) = Z \cdot I(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{Z}\varepsilon_0 e^{i\omega t}}$$

grandeza complexa

- Devido ao seu caráter complexo, Z pode ser representada em um “*Diagrama de Fasores*” (na forma Z = a + ib) :

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|e^{i\theta} = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



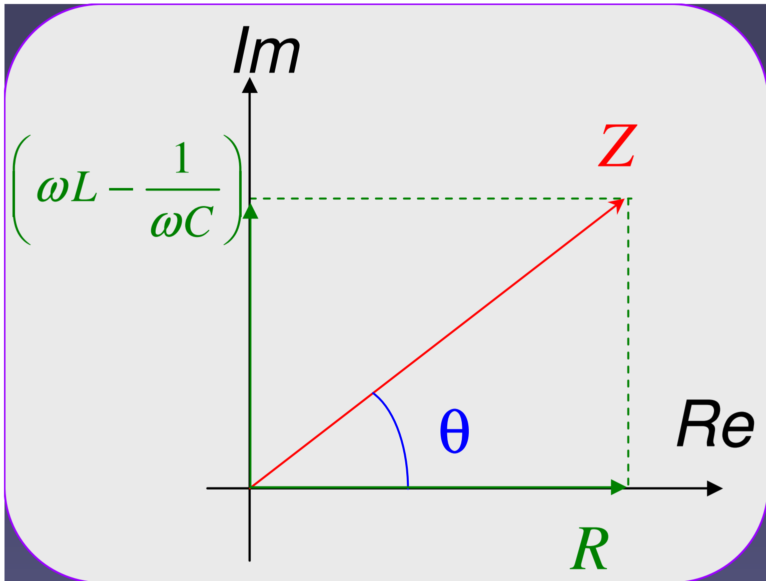
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{|Z|}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{|Z|}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z = \cancel{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left(\frac{R}{\cancel{|Z|}} + i\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\cancel{|Z|}}\right) = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

(cqd)



- **Do *Diagrama de Fasores*, também:**

$$tg\theta = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arc} tg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

- Podemos então expressar a corrente complexa da forma:

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{Z} = \frac{\varepsilon_0\, e^{i\omega t}}{|Z|\, e^{i\theta}} \rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)}}$$

$I_0 = I_{max}$

Corrente física (parte real):
$$\begin{cases} I(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \end{cases}$$

θ é a ≠ de fase entre I(t) e ε(t)

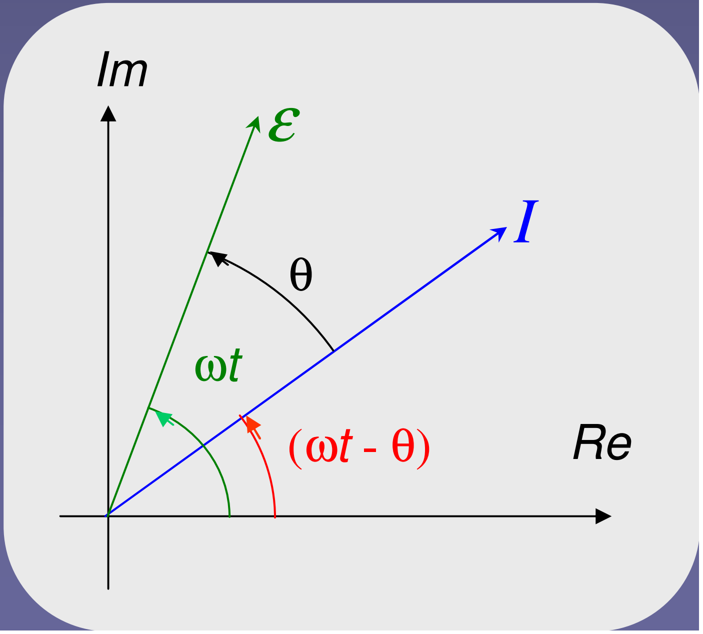
- Resumindo:

$$\begin{cases} tg\theta = \dfrac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}{R} \Rightarrow \theta = \mathrm{arc}\,tg\left(\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \\ I(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad ; \quad I_0 = \dfrac{\varepsilon_0}{|Z|} \end{cases}$$

1) Se $\theta > 0$ $\rightarrow$ Argumento do ***arctg*** tem que ser positivo

$$\therefore \quad \boxed{\omega L > \frac{1}{\omega C}} \rightarrow \boxed{\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

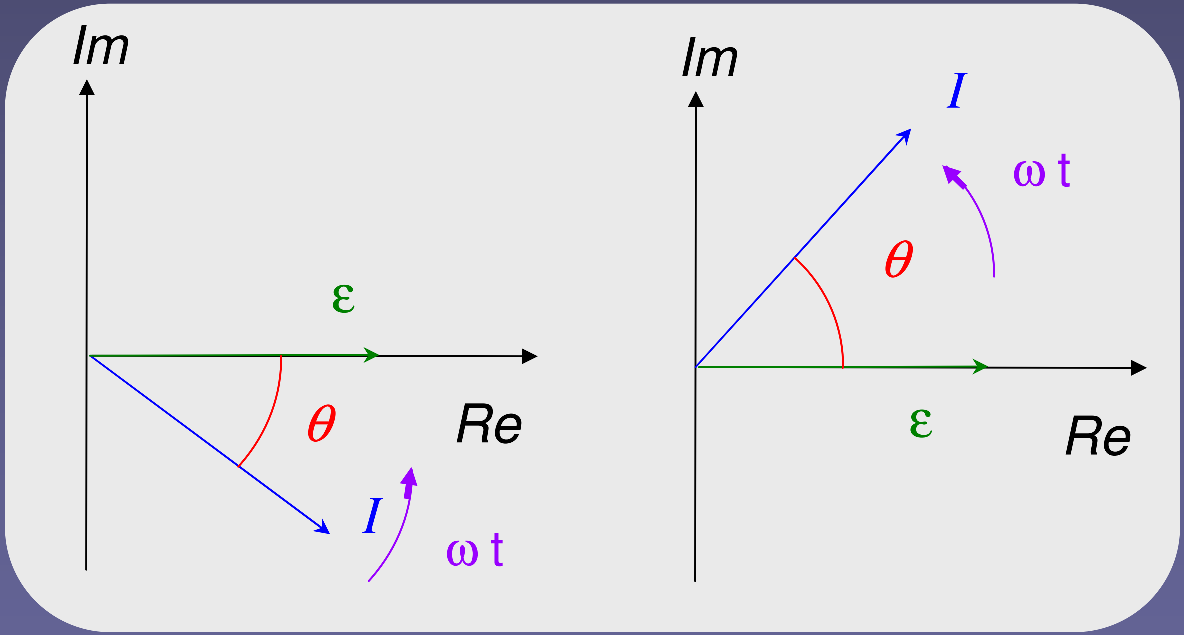
- Neste caso corrente atinge valor qq ***depois*** da voltagem (**I** se ***atrasa*** em relação a ε)



2) se $\theta < 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

- Ou seja, a corrente ***adianta-se*** em relação à tensão)

- Forma usual de representar estas condições (sem se preocupar com ωt):



Lembrar sempre que $\theta \equiv$ diferença de fase entre $I\,(t)$ e $\varepsilon\,(t)$

Exemplo:

Para um circuito *RLC* com tensão alternada e $R = 250\Omega$, $L = 0{,}6H$, $C = 3{,}5\mu F$, $\omega = 377 rad/s$, $\varepsilon_{máx} = 150V$, obtenha:

a) Módulo da impedância e a corrente máxima do circuito.
b) O ângulo de fase entre a tensão (aplicada) e a corrente no circuito.
c) Tensão de pico nas extremidades de cada componente (do circuito).

Dadosq

- $R = 250\ \Omega$
- $L = 0,6\ H$
- $C = 3,5\ \mu\text{F}$
- $\omega = 377\text{rad/s}$
- $\varepsilon_{máx} = 150\text{V}$

a) $|Z|$ e $I_{\max}$

$$\begin{cases} R = 250\Omega \\ \chi_L = L\omega = (0,6)(377) = 226\Omega \\ \chi_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{(377)(3,5\times10^{-6})} = 758\Omega \end{cases}$$

$$\therefore \quad |Z| = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} = 588\Omega$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \rightarrow I_{max} = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} = \frac{150}{588} = 0,255A$$

b) θ e $I(t)$

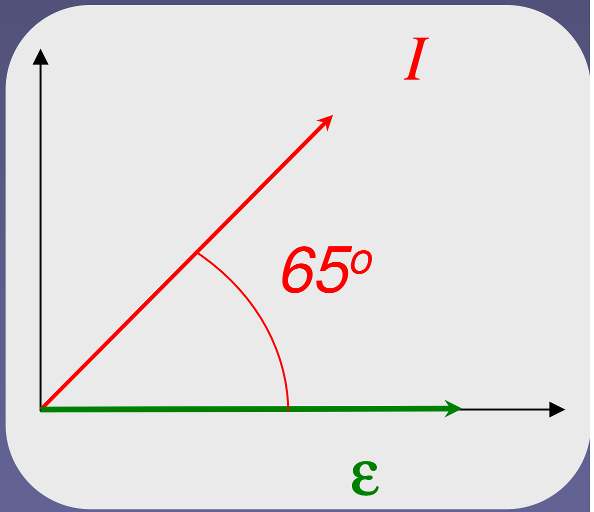
Dados

- $R = 250\Omega$
- $L = 0{,}6H$
- $C = 3{,}5\mu F$
- $\omega = 377 rad/s$
- $\varepsilon_{máx} = 150V$

$$\theta = \operatorname{arc} tg\left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) \Rightarrow \theta = -1{,}13 rad$$

$(\theta = -65^o)$

• Portanto I encontra-se adiantada em relação a ε:



$$\left(\ \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)\ ;\ I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta)\ \right)$$

• Quanto ao valor da corrente no circuito:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) = I_0 \cos(\omega t - \theta) = 0{,}255\cos(377\,t + 1{,}13)$$

c) ε^{max} (em cada componente do circuito)

$$\begin{cases} \varepsilon_R^{\;max} = RI_{max} \Rightarrow \varepsilon_R^{\;max} = 64V \\ \varepsilon_L^{\;max} = \chi_L I_{max} \Rightarrow \varepsilon_L^{\;max} = 58V \\ \varepsilon_C^{\;max} = \chi_C I_{max} \Rightarrow \varepsilon_C^{\;max} = 193V \end{cases}$$

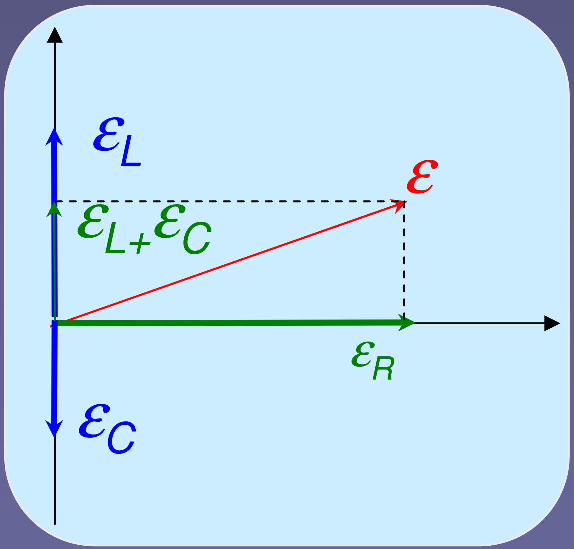
Dados

- $R = 250\Omega$
- $L = 0{,}6H$
- $C = 3{,}5\mu F$
- $\omega = 377 rad/s$
- $\varepsilon_{máx} = 150V$
- $I_{máx} = 0{,}255A$

A soma excede os 150V da fonte porque estes valores de máximo são atingidos em instantes diferentes.

- Na verdade:

$$\begin{cases} \varepsilon_R = RI = \varepsilon_{0R}^{\;max} \cos \omega t \\ \varepsilon_L = \chi_L I = \varepsilon_{0L}^{\;max} \cos(\omega t + \pi/2) \\ \varepsilon_C = \chi_C I = \varepsilon_{0C}^{\;max} \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$



- Num certo t: $\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_{0R}^{2} + \left(\varepsilon_{0L} - \varepsilon_{0C}\right)^2} = 150V$

Associação de impedâncias

- Em série (mesma corrente flui através delas): $\boxed{Z = Z_1 + Z_2 + \ldots}$

  Exemplo, no circuito RLC (em série): $Z = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$

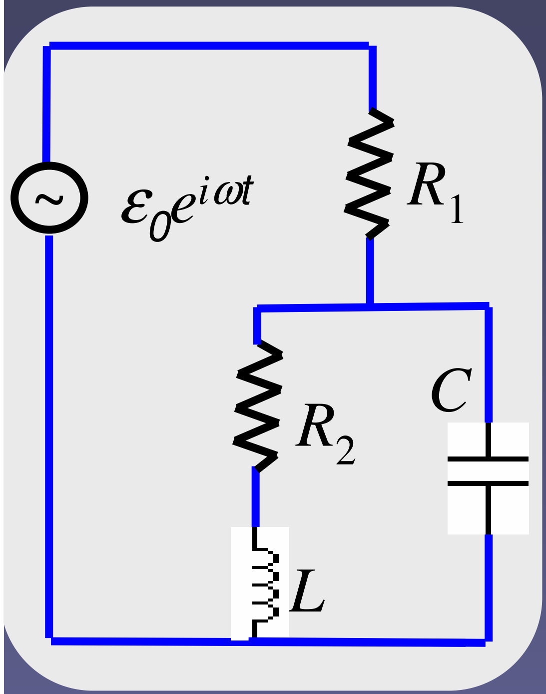
- Agora, é importante observar que impedâncias *se somam como números complexos*

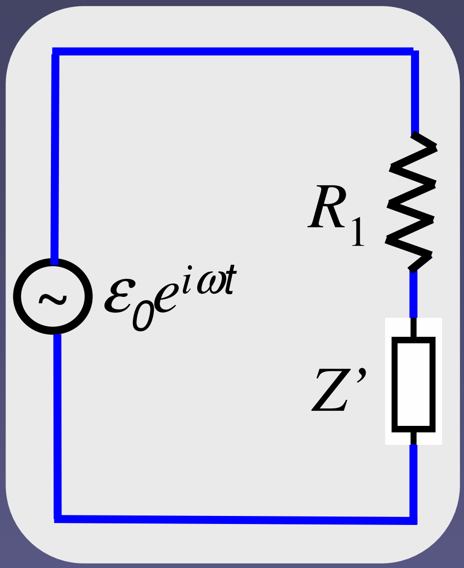
$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + i\chi_1 \\ Z_2 = R_2 + i\chi_2 \end{cases} \rightarrow Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(\chi_1 + \chi_2)$$

- Sendo: $Z = |Z| e^{i\theta} \rightarrow \begin{cases} |Z| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\chi_1 + \chi_2)^2} \\ \theta = arctg\left(\dfrac{\chi_1 + \chi_2}{R_1 + R_2}\right) \end{cases}$

- Em paralelo: $\boxed{\dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \ldots}$

Exemplo: Calcular a impedância do circuito:





Circuito equivalente

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{1/i\omega C} + \frac{1}{R_2 + i\omega L}$$

$$= i\omega C + \frac{1}{R_2 + i\omega L}$$

$$= \frac{(R_2 + i\omega L)\, i\omega C + 1}{R_2 + i\omega L}$$

$$\therefore\ Z = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C\,(R_2 + i\omega L)} = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C\, R_2 - \omega^2 L C}$$

Para eliminar a parte imaginária do denominador, lembrar:

$Z\,.\,Z^* = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$; $\left(Z = R_1 + \dfrac{R_2 + i\omega L}{1-\omega^2 LC + i\omega C R_2} \right)$

$$\therefore \quad Z = R_1 + \frac{\left(R_2 + i\omega L\right)\left(1 - i\omega C R_2 - \omega^2 LC\right)}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega C R_2\right)^2} =$$

$$= R_1 + \frac{R_2 - iR_2{}^2\omega C - \cancel{\omega^2 LCR_2} + i\omega L + \cancel{\omega^2 LCR_2} - i\omega^3 L^2 C}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + R_2{}^2\omega^2 C^2}$$

$$\boxed{Z = R_1 + \frac{R_2}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + R_2{}^2\omega^2 C^2} + i\left[\frac{\omega L - R_2{}^2\omega C - \omega^3 L^2 C}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + R_2{}^2\omega^2 C^2}\right]}$$

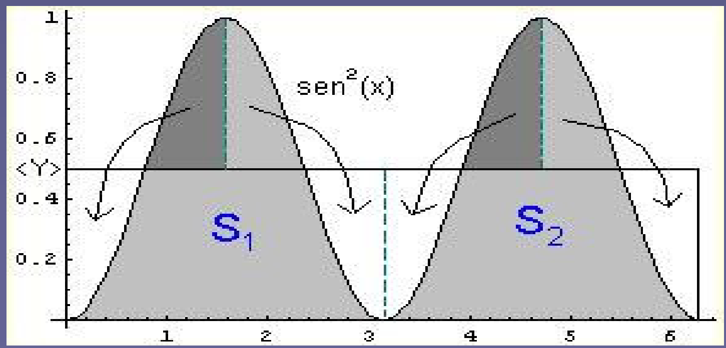
Potência e Fator de Potência

- Para um resistor simples: $P = \mathcal{E} I \left(= RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \right)$
- Mas quando lidamos com C.A. que valor de corrente usamos? Que potência queremos? Máxima? Média?

$$\overline{P} = R\overline{I^2} = R\,I_0^2\,\overline{\cos^2 \omega t} \quad ; \quad \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \cos^2 \omega t\, dt = \frac{1}{2}$$

(igualmente: $\overline{sen^2 \omega t} = \frac{1}{2}$)

$$\therefore \quad \overline{P} = \frac{1}{2} R I_0^2 = R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$$



Corrente efetiva
I_{ef} = 0,707 I_0

$$\boxed{\overline{P} = R\,I_{ef}^2}$$

Da mesma forma: $\boxed{V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}}$