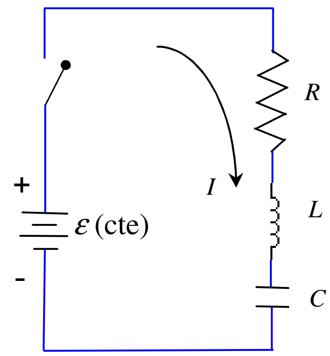
Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

2ª aula – 02/mar/2007

- Na aula passada vimos Circuito **RLC**



- Equação diferencial característica: $$\boxed{\cancel{\frac{d\varepsilon}{dt}} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I} \qquad (1)$$

(= 0, para ε constante).

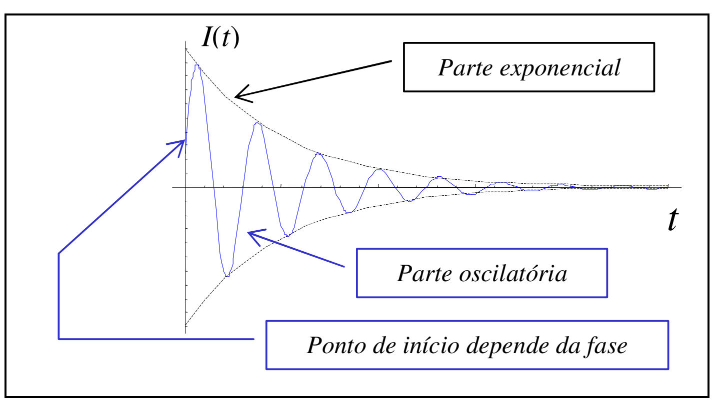
Solução: $I = \left(Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\right)e^{-\frac{R}{2L}t}$; $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Obtida das condições de contorno

Amortecimento sub-crítico (1/LC < $R^2/4L^2$)

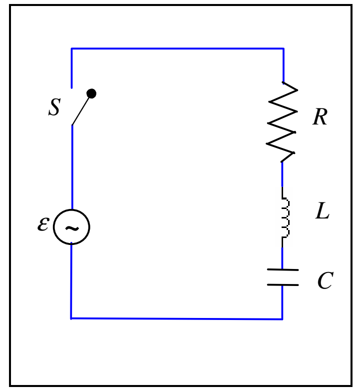
$$\Downarrow$$

$$I(t) = De^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\omega_n t\right),$$



- Vejamos agora um circuito RLC com tensão variando periodicamente com o tempo:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$



- Devemos lembrar:
  - L e C ideais não dissipam energia; mas atuam de forma a se oporem a qualquer variação de I.
  - A corrente I, em cada instante t, é a mesma em qualquer ponto do circuito.

- A equação do circuito é a mesma de anteriormente (eq. 1) só que, agora, $\varepsilon = \varepsilon(t) \Rightarrow (d\varepsilon/dt \neq 0)$.

- Uma técnica interessante de resolvê-la é considerar todas as grandezas envolvidas como sendo complexas (com componentes real e imaginária):

$$\text{Exemplo: } \begin{cases} \varepsilon \to \varepsilon_1 + i\,\varepsilon_2 \\ I \to I_1 + i\,I_2 \end{cases}$$

- E, no final, tomamos a ***parte real*** da solução obtida (é esta parte real que possui significado físico). Veja que esta proposta é interessante, pois $\varepsilon_0 \cos\omega t \equiv$ parte real de $\varepsilon_0\, e^{i\omega t}$. Igualmente usaremos $I = I_0\, e^{i\omega t}$.

- Substituindo na equação diferencial (1):

$$\varepsilon_0 i\omega e^{i\omega t} = RI_0 i\omega e^{i\omega t} - LI_0\omega^2 e^{i\omega t} + \frac{1}{C} I_0 e^{i\omega t}$$

- Dividindo tudo por $i\omega$:

$$\varepsilon_0 e^{i\omega t} = RI_0 e^{i\omega t} + i\omega LI_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0}{i\omega C} e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}_{\varepsilon(t)} = \underbrace{I_0 e^{i\omega t}}_{I(t)} \underbrace{\left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right)}_{Z}$$

$\equiv$ (**impedância** do circuito)

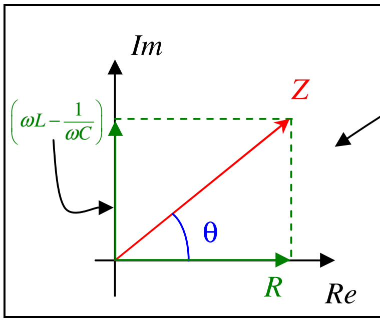
- Ou seja: $\boxed{Z = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$ $\longrightarrow$ Unidade : Ohm (Ω). Indica qual a "resistência" do circuito; e é uma grandeza complexa.

- Sendo que: $\begin{cases} \omega L = \chi_L \equiv \textit{Reatância Indutiva} \\ \dfrac{1}{\omega C} = \chi_C \equiv \textit{Reatância Capacitiva} \end{cases}$

- Então: $\boxed{\varepsilon(t) = Z \cdot I(t)} \rightarrow \boxed{I = \dfrac{1}{Z}\varepsilon_0 e^{i\omega t}}$

- Devido ao seu caráter complexo, podemos representar a impedância em um diagrama de fasores, na forma polar:

$$Z = |Z|e^{i\theta} = |Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



De forma que: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{R}{|Z|} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{|Z|}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) \\ |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \end{cases}$

- Então: Z = |Z| e$^{i\theta}$ $= \cancel{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \left(\dfrac{R}{\cancel{|Z|}} + i\dfrac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\cancel{|Z|}} \right) = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$ ✓

- Note que: $tg\theta = \dfrac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \Rightarrow \boxed{\theta = \text{arc}\, tg\left(\dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}$

- Desta forma, podemos expressar a corrente complexa como:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{\underbrace{|Z|e^{i\theta}}_{=Z}} \quad \rightarrow \quad I(t) = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{|Z|}}_{I_0 \equiv I_{\max}} e^{i(\omega t - \theta)},$$

- Sendo que a <u>corrente física</u> no circuito (<u>parte real</u>) será:

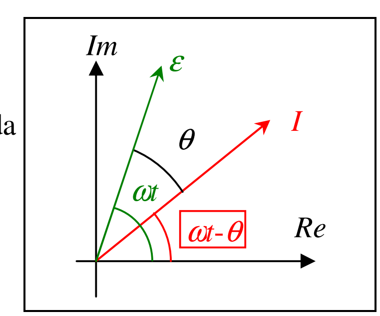
$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta); \quad \text{enquanto que } \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

- Portanto, θ ≡ diferença de fase entre ε (t) e I(t)

- Para θ maior que zero, para que o argumento do arco tangente seja positivo: $\omega L > \dfrac{1}{\omega C} \Rightarrow$

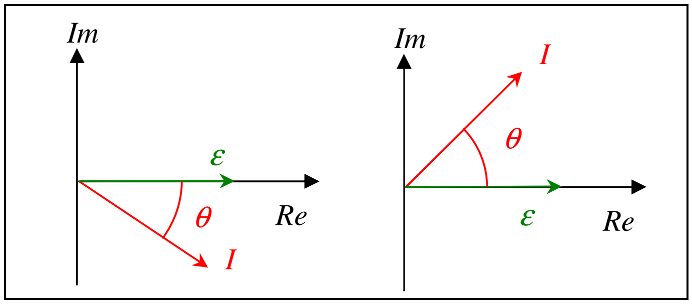
$$\Rightarrow \boxed{\omega > \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- Neste caso, a corrente atinge um certo valor <u>depois</u> da voltagem (a corrente está **atrasada** em relação à tensão).



- Para $\theta < 0 \rightarrow \boxed{\omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}} \Rightarrow$ a corrente **adianta-se** em relação à tensão.

- A forma usual de representar estas condições (sem nos preocuparmos com ωt) é mostrada na figura abaixo.



- Exemplo: Para um circuito *RLC* com tensão alternada e $R = 250\Omega$, $L = 0{,}6H$, $C = 3{,}5\mu F$, $\omega = 377 rad/s$, $\varepsilon_{máx} = 150V$, obtenha:

  a) Módulo da impedância e a corrente máxima do circuito.
  b) Ângulo de fase entre a tensão (aplicada) e a corrente no circuito.
  c) Tensão de pico nas extremidades de cada componente (do circuito).

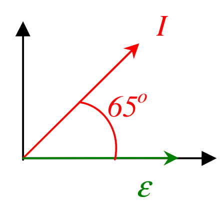
a) $|Z| = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2}$; sendo que: $\begin{cases} R = 250\Omega \\ \chi_L = L\omega = (0,6)(377) = 226\Omega \\ \chi_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{(377)(3,5\times 10^{-6})} = 758\Omega \end{cases}$

- Assim: $|Z| = \sqrt{250^2 + 532^2} \rightarrow \boxed{|Z| = 588\Omega}$

- Sendo $I(t) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \rightarrow I_{max} = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} = \frac{150}{588}; \boxed{I_{max} = I_0 = 0,255A}$

b) $\theta = \text{arc}\,tg\left(\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) \Rightarrow \boxed{\theta = -1{,}13 \text{ rad} \Rightarrow \theta = -65^{\circ}}$

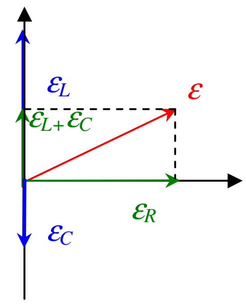
corrente I estará **adiantada** com relação à tensão.



c) $\begin{cases} \varepsilon_R^{\max} = RI_{\max} = (250)(0,255) \Rightarrow \varepsilon_R^{\max} = 64V \\ \varepsilon_L^{\max} = \chi_L I_{\max} = (220)(0,255) \Rightarrow \varepsilon_L^{\max} = 58V \\ \varepsilon_C^{\max} = \chi_C I_{\max} = (758)(0,255) \Rightarrow \varepsilon_C^{\max} = 193V \end{cases}$

- Ou seja, a soma excede os 150V da fonte porque estes valores de máximo são atingidos em instantes diferentes.

- Na verdade, temos $\begin{cases} \varepsilon_R = \varepsilon_{R0}{}^{\max} \cos \omega t \\ \varepsilon_L = \varepsilon_{L0}{}^{\max} \cos(\omega t + \pi/2) \\ \varepsilon_C = \varepsilon_{C0}{}^{\max} \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$



- Vamos discutir agora os tipos de associações (série ou paralelo) de impedâncias.

- Se duas impedâncias foram conectadas em série, a mesma corrente flui através delas, e a impedância resultante será:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots \quad \rightarrow \quad \text{ligação em série.}$$

- Por exemplo:

$$\boxed{Z = \underbrace{R}_{Z_1} + \underbrace{i\omega L}_{Z_2} + \underbrace{\frac{1}{i\omega C}}_{Z_3}}$$

- Agora, é importante observar que as impedâncias somam-se como números complexos.

- Por exemplo, se:

$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + i\chi_1 \\ Z_2 = R_2 + i\chi_2 \end{cases} \Rightarrow \quad Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(\chi_1 + \chi_2).$$

- De forma que este novo resultado, na forma polar $Z = |Z| e^{i\theta}$, sendo que:

$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\chi_1 + \chi_2)^2} \\ \theta = arctg\left(\dfrac{\chi_1 + \chi_2}{R_1 + R_2}\right) \end{cases}.$$

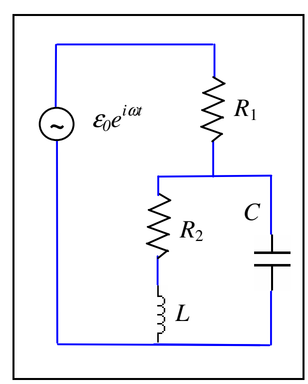
- Se as impedâncias forem associadas em paralelo:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots \quad \rightarrow \text{(Ligação em paralelo),}$$

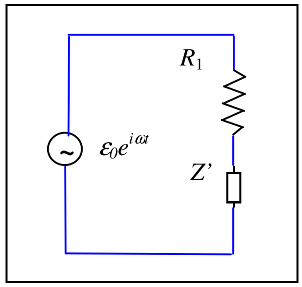
- sendo que a adição, novamente, envolve números complexos.

- Exemplo: Calcular a impedância do circuito ao lado:

- Temos então R_2 e L em paralelo com C, e isto tudo em série com R_1.



- Circuito Equivalente:



sendo que $\dfrac{1}{Z'} = \dfrac{1}{1/i\omega C} + \dfrac{1}{R_2 + i\omega L} = i\omega C + \dfrac{1}{R_2 + i\omega L} = \dfrac{(R_2 + i\omega L)\, i\omega C + 1}{R_2 + i\omega L}$

- Portanto: $Z = R_1 + \dfrac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C\,(R_2 + i\omega L)} = R_1 + \dfrac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C R_2 - \omega^2 LC}$

- Para colocarmos em uma forma mais apropriada, de número complexo, é conveniente multiplicar e dividir a 2ª parcela pelo complexo conjugado do denominador (para sumir com o *i* no denominador).

- Isto porque $Z\,Z^* = (a+ib)\,(a-ib) = a^2+b^2$, apenas.

- Portanto: $Z = R_1 + \dfrac{(R_2 + i\omega L)(1 - i\omega C R_2 - \omega^2 LC)}{(1-\omega^2 LC)^2 + (R_2 \omega C)^2} =$

$$= R_1 + \frac{R_2 - iR_2^{\,2}\omega C \cancel{- \omega^2 LCR_2} + i\omega L \cancel{+ \omega^2 LCR_2} - i\omega^3 L^2 C}{(1-\omega^2 LC)^2 + R_2^{\,2}\omega^2 C^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Z = R_1 + \frac{R_2}{(1-\omega^2 LC)^2 + R_2^{\,2}\omega^2 C^2} + i\left[\frac{\omega L - R_2^{\,2}\omega C - \omega^3 L^2 C}{(1-\omega^2 LC)^2 + R_2^{\,2}\omega^2 C^2}\right]$$

parte real

parte imaginária

<u>Potência e Fator de Potência</u>

- Para um resistor simples, Potência ≡ tensão nos terminais multiplicada pela corrente que o atravessa:

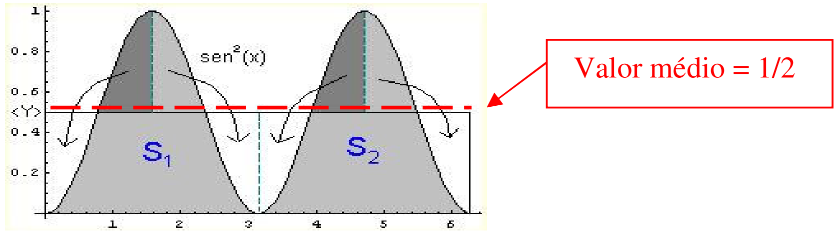
$$P = UI\left(= RI^2 = \frac{U^2}{R}\right)$$

- Mas, quando lidamos com corrente alternada, que valor da corrente usamos para calcular a Potência? Aliás, que Potência queremos? a máxima? a média?

- Para calcular *Potência Média*:

$$\overline{P} = R\overline{I^2} = RI_0^2\overline{\cos^2 \omega t}\,; \quad \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \cos^2 \omega t \; dt = \frac{1}{2} \text{ e, igualmente: } \overline{\operatorname{sen}^2 \omega t} = \frac{1}{2}$$

- Graficamente:



- Então: $\overline{P} = \frac{1}{2}RI_0^2 = R\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$,

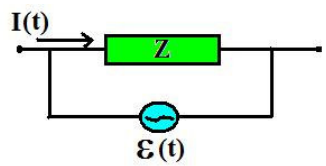
$\boxed{\textit{Corrente efetiva } I_{ef.} = 0{,}707 I_0}$

- De forma que a Potência Média dissipada por um resistor, em circuitos com corrente AC:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}RI_{ef}^2 \,.$$

- Da mesma forma, $V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

- Com relação a uma impedância Z:



- Potência instantânea:

$$P(t) = [\operatorname{Re} I(t)][\operatorname{Re} \varepsilon(t)]$$

.

- Potência Média:

$$\overline{P} = \overline{\{\operatorname{Re} I(t)\}\{\operatorname{Re} \mathcal{E}(t)\}}$$

$$\varepsilon(t) = Z\; I(t)\,; \quad Z = |Z|e^{i\theta}$$

- Então:

$$\overline{P} = \overline{\{\operatorname{Re} I(t)\}\{\operatorname{Re}\left[|Z|\; e^{i\theta}\; I(t)\right]\}} = |Z|\cos\theta\; \overline{[\operatorname{Re} I(t)][\operatorname{Re} I(t)]}\,\cdot\cdot$$

$$= |Z|\cos\theta I_0 I_0 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} I_0 \cos\theta |Z| I_0$$

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos\theta}$$

cos θ ≡ "Fator de Potência"