



Eletromagnetismo II

3ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Vimos na aula passada ...

- Circuitos **RLC** com **tensão alternada**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{i\omega t}) \\ \text{Re}(I(t)) = I_0 \cos(\omega t - \theta) = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \end{array} \right.$$

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad ; \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



*Reatâncias indutiva
e capacitiva*

Diferença
de Fase:

$$\theta = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

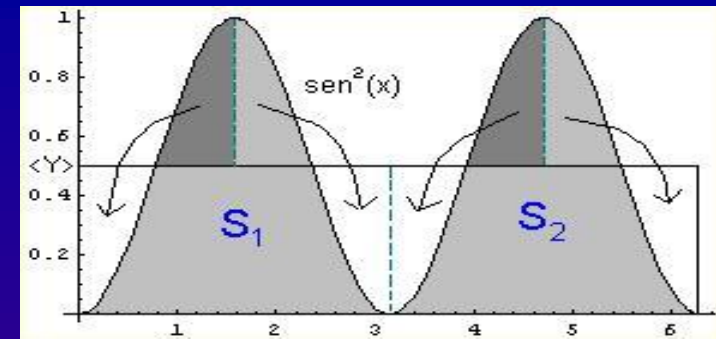
- Para um resistor simples:

$$\bar{P} = R \overline{I^2} = R I_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} ;$$

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$$

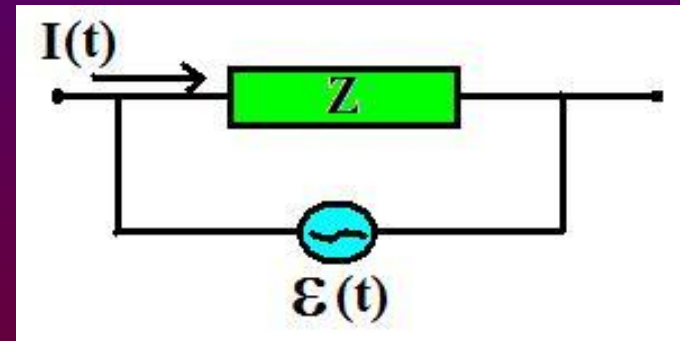
$$\therefore \bar{P} = \frac{1}{2} R I_0^2 = R \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 = R I_{ef}^2 \longrightarrow \text{corrente eficaz}$$

ou seja: $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0$ e, da mesma forma: $\mathcal{E}_{ef} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$



$$\left(\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} \right)$$

- Com relação a uma *impedância*:



- Potência Instantânea: $P(t) = [\text{Re } \mathcal{E}(t)][\text{Re } I(t)]$

- De forma que a Potência Média:

$$\bar{P} = [\operatorname{Re} \varepsilon(t)] [\operatorname{Re} I(t)]$$

- Sendo: $\varepsilon(t) = Z I(t)$; $Z = |Z| e^{i\theta}$ e $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\theta}} = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} = I_0 e^{i(\omega t - \theta)}$$

- Então:
$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\varepsilon(t)] = \operatorname{Re}\left[\cancel{|Z|} e^{i\theta} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\cancel{|Z|}} e^{i(\omega t - \theta)}\right] = \varepsilon_0 \cos \omega t \\ \operatorname{Re}[I(t)] = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \end{cases}$$
 (substituindo)

- Então: $\overline{P} = \varepsilon_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \Rightarrow$
 $\left(\overline{P(t)} = [\text{Re } \varepsilon(t)][\text{Re } I(t)] \right)$ $\parallel I_0$

$$\Rightarrow \overline{P} = \varepsilon_0 I_0 \cdot \overline{\cos(\omega t) [\cos(\omega t) \cos(\theta) + \sin(\omega t) \sin(\theta)]}$$

$$= \varepsilon_0 I_0 \left[\overline{\cos^2(\omega t)} \cos(\theta) + \overline{\cos(\omega t) \sin(\omega t)} \sin(\theta) \right]$$

$$\parallel \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \overline{\sin 2\omega t} = 0$$

- Portanto:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta ; \cos \theta \equiv \text{“fator de potência”}$$

- Em termos da tensão e corrente eficazes:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \sqrt{2} I_{ef} \cdot \sqrt{2} \varepsilon_{ef} \cos(\theta) \Rightarrow \bar{P} = I_{ef} \varepsilon_{ef} \cos(\theta)$$

- Observe que:

$\begin{cases} \cos \theta = 1 \rightarrow \bar{P} \text{ é máximo} \\ \cos \theta = 0 \rightarrow \bar{P} \text{ é mínimo} \end{cases}$	$\left(\begin{array}{l} \cos \theta < 0 \text{ implicaria} \\ \mathbf{P} < 0 \Rightarrow \text{haveria} \\ \text{absorção de energia} \\ \text{pelo circuito, em} \\ \text{vez de dissipação!} \end{array} \right)$
	

- Legal! É só dar um jeito para que $\cos \theta$ { $\theta = \arctg (\chi_L - \chi_C / R)$ } se anule e não se paga mais a conta elétrica, certo? Não!

- Observe que se $\cos \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow \pi/2$ e $tg \left(\frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \infty$

- Portanto, como $tg \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \Rightarrow \mathbf{R} \rightarrow 0$! (e não haveria trabalho útil sendo realizado) !

- Mas então por que se preocupar com o *Fator de Potência*?
- Na verdade, são as companhias elétricas que exigem $\cos \theta \cong 1$ pois senão pode haver desperdício de energia!

Ex: Um motor monofásico com potência média 15CV (1CV = 736W), tensão eficaz (tomada) 220 V e FP = 92% ($\cos \theta = 0,92$), trabalha em plena carga (rendimento 100%). Ache a corrente que circula pela rede de alimentação deste motor. Faça o mesmo considerando FP = 51%.

$$\overline{P} = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos \theta = (15\cancel{CV})(736\cancel{W} / \cancel{CV}) = 11.040\text{W}$$

a)
$$I_{ef} = \frac{11040}{220 \cdot 0,92} = 54,5\text{A}$$

b)
$$I_{ef} = \frac{11040}{220 \cdot 0,51} = 98,5\text{A}$$

- Para gerar uma mesma potência (mesmo valor da conta), corrente circulando no motor é menor no 1º caso! Porisso, industria com Fator de Potência menor que 92% pode ser multada!

Ressonância

- Como vimos, em um circuito RLC:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad ; \quad \theta = \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/R]$$

- Pergunta: para determinados valores de **R**, **L** e **C**, qual é a frequência (ω da fonte) que irá **minimizar** $|Z|$?

- Para ver isso, faço: $\frac{\partial |Z|}{\partial \omega} = 0$; obtendo: $\omega L - 1/\omega C = 0$



- Substituindo:

$$\omega = 1/\sqrt{LC}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\frac{L^2}{LC}} - \sqrt{\frac{LC}{C^2}} \right)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

Impedância (carga) é puramente resistiva!

- A este valor de ω :

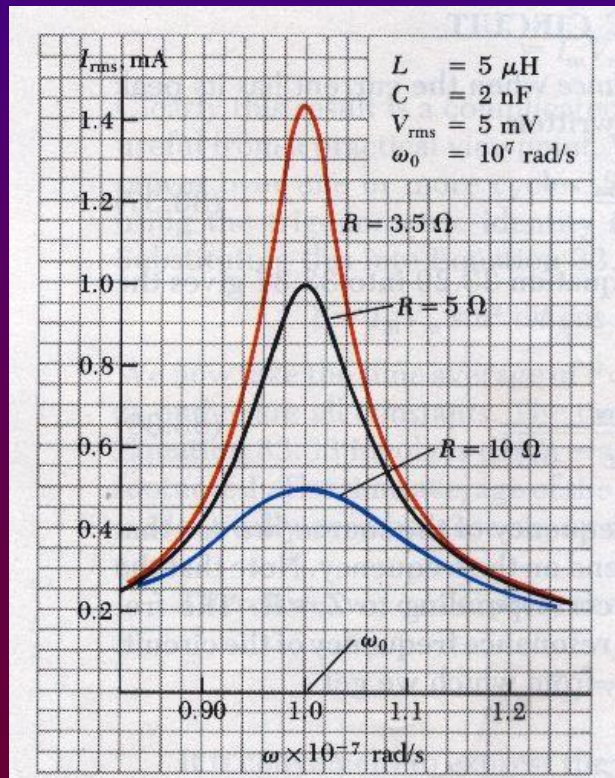
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

*Frequência
Natural de
Oscilação*



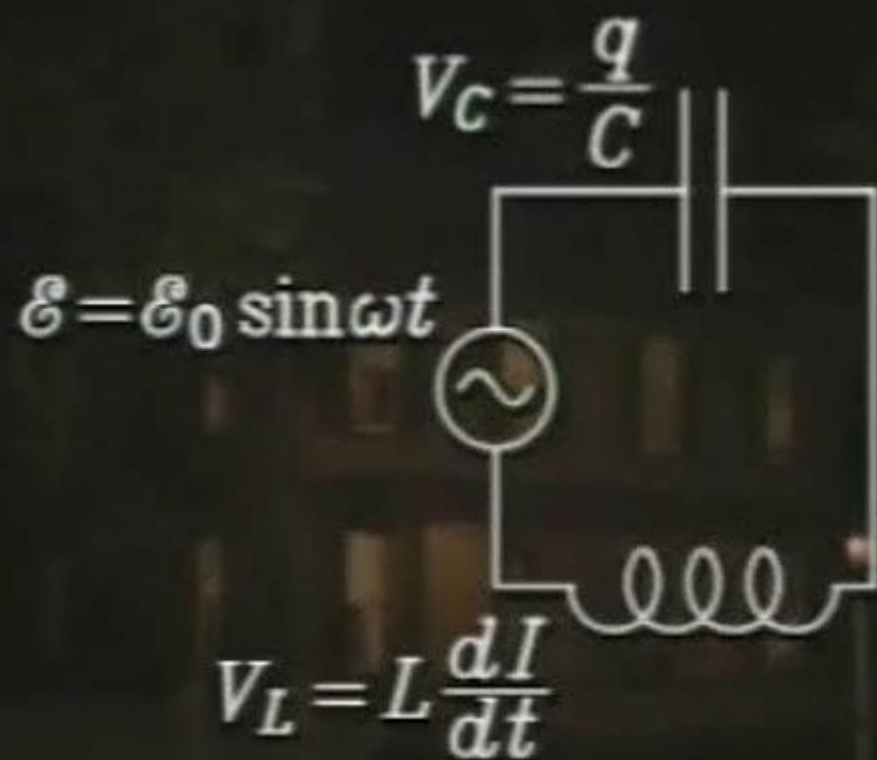
- Como $I_0 = \varepsilon_0 / |Z| \Rightarrow$ sendo $|Z|$ mínimo,
 I_0 (no circuito) é maximizada!

$|Z|$ é mínimo



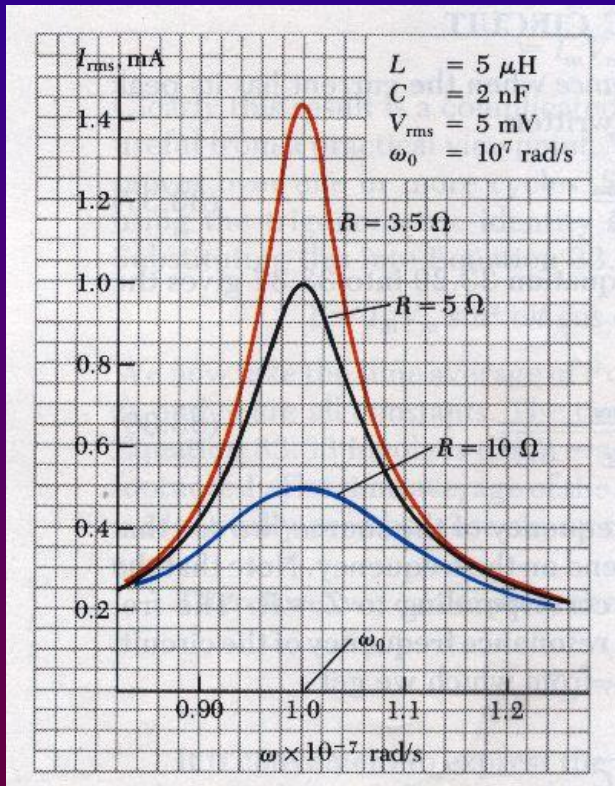
Como $\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta \Rightarrow$ para um
dado valor de tensão (ε_0), $\bar{P} \propto I_0$.

Portanto, para $\omega_0 \sim \omega \Rightarrow$ temos o
fenômeno da **ressonância**!





- Retomando a discussão anterior, vimos que $|Z|$ sendo mínimo $\Rightarrow I_0$ (no circuito) é maximizada!



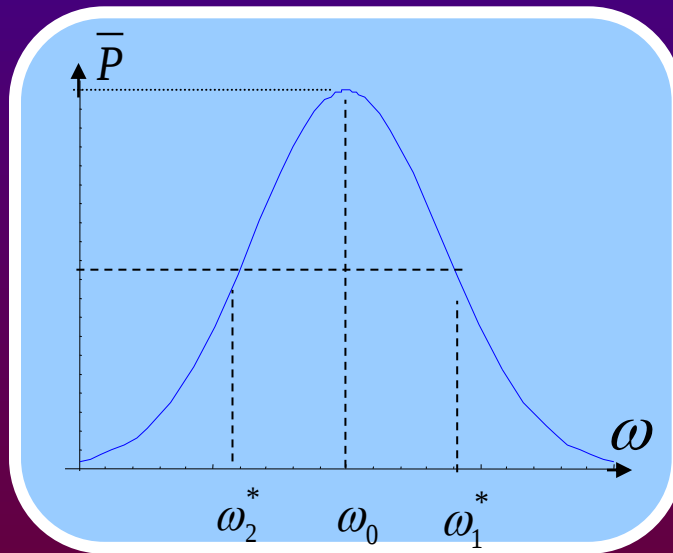
Ou seja, para $\omega_0 \sim \omega \Rightarrow$ ressonância!

E este é o princípio da **sintonização**:
recepção de ondas eletromagnéticas!

- Agora, como fazer para obter sinal “limpo”?

Fator de qualidade

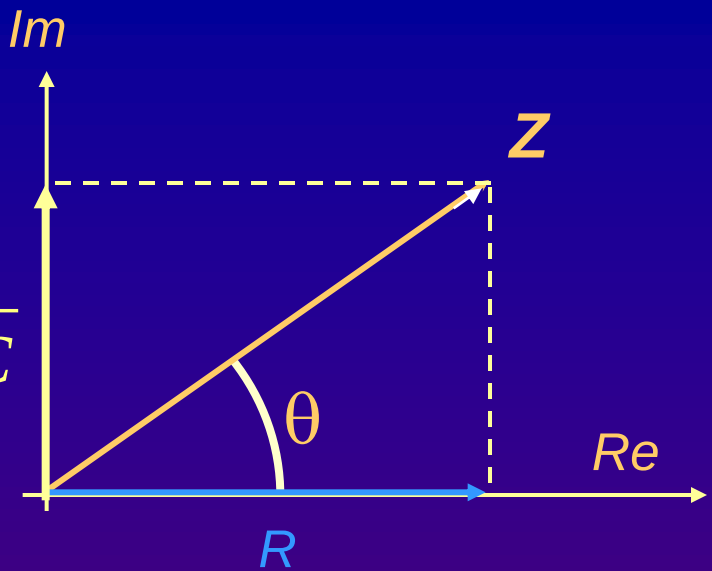
- Avaliação da ‘performance’ de um circuito ressonante (o quanto a curva de ressonância é pronunciada) é feita calculando-se o seu “**Fator de Qualidade**” (**Q**).
- Supor ω_1^* e ω_2^* próximos de ω_0 de forma que a potência dissipada seja a metade da potência máxima:



$$\bar{P}(\omega^*) = \frac{1}{2} \bar{P}(\omega_0) ; \text{ lembrando : } \bar{P}(\omega) = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta \quad (e \quad I_0 = \frac{\varepsilon_0}{|Z|})$$

- Agora:

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



- Então:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta$$

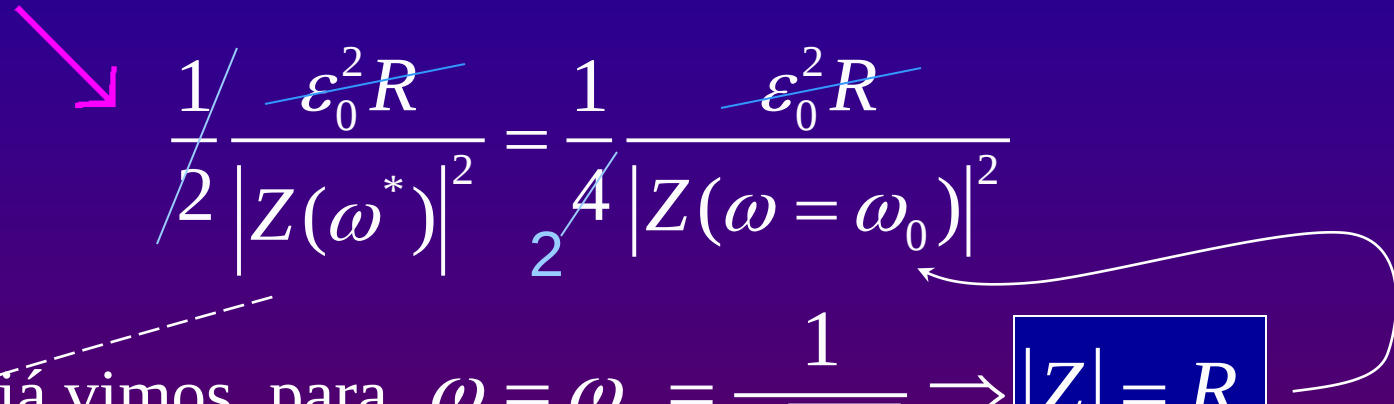


$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \varepsilon_0 \frac{R}{|Z|} = \frac{1}{2} R \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|^2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{R}{|Z|} \\ |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{cases}$$

- Ou seja, na situação :

$$\bar{P}(\omega^*) = \frac{1}{2} \bar{P}(\omega_0) \quad ; \quad \left(\bar{P} = \frac{1}{2} R \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|^2} \right)$$



$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 R}{|Z(\omega^*)|^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 R}{|Z(\omega = \omega_0)|^2}$$

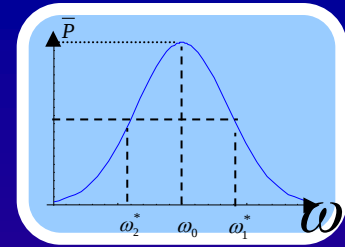
- Porém, como já vimos, para $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z| = R$



- Como: $|Z(\omega^*)|^2 = R^2 + \left(\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} \right)^2$

- Substituindo: $2R^2 = R^2 + \left(\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} \right)^2 \therefore \left| \omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} \right| = R$

- Em situações nas quais as curvas de potência são relativamente pronunciadas, ω^* não é muito diferente de ω_0 , então, da figura:



$$\omega^* = \omega_0 + \Delta\omega \rightarrow \text{substituindo em } \left| \omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} \right| = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)} \right| = R \quad (*)$$

- Expandindo $\frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)} \approx 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad \left((1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx \right)$

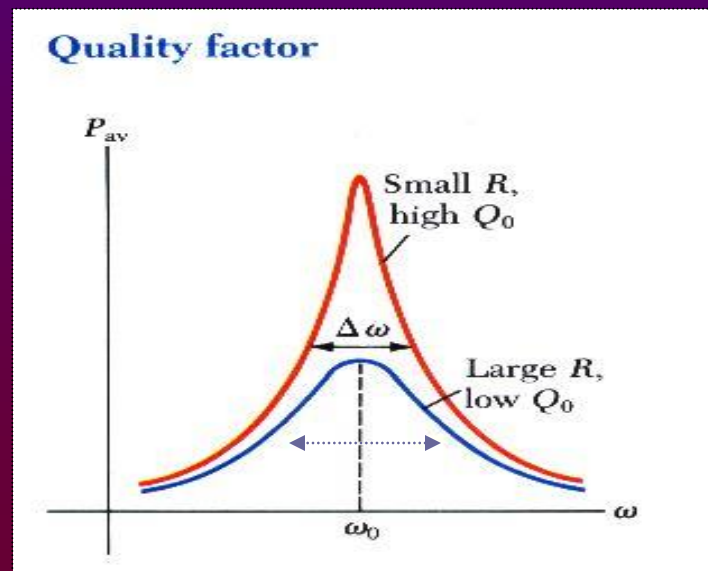
e fazendo (eq. $(*)$) $\div$ por $\mathbf{L}$): $\left| \omega_0 + \Delta\omega - \frac{1}{\omega_0 \mathbf{L} C} \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right| = \frac{R}{\mathbf{L}}$

- Reescrevendo: $\left| \cancel{\omega_0} + \Delta\omega - \frac{1}{\cancel{\omega_0} LC} \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right| = \frac{R}{L} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \cancel{\omega_0} + \Delta\omega - \cancel{\omega_0} + \Delta\omega \right| = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} 2|\Delta\omega| = \frac{R}{L} \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

- Ou seja: $Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R} \equiv \text{“Fator de Qualidade” do circuito RLC}$

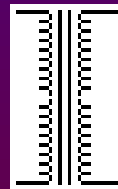
- Indica variação % entre ω_0 (pico) e $2|\Delta\omega| \equiv$ largura a $\frac{1}{2}$ altura.



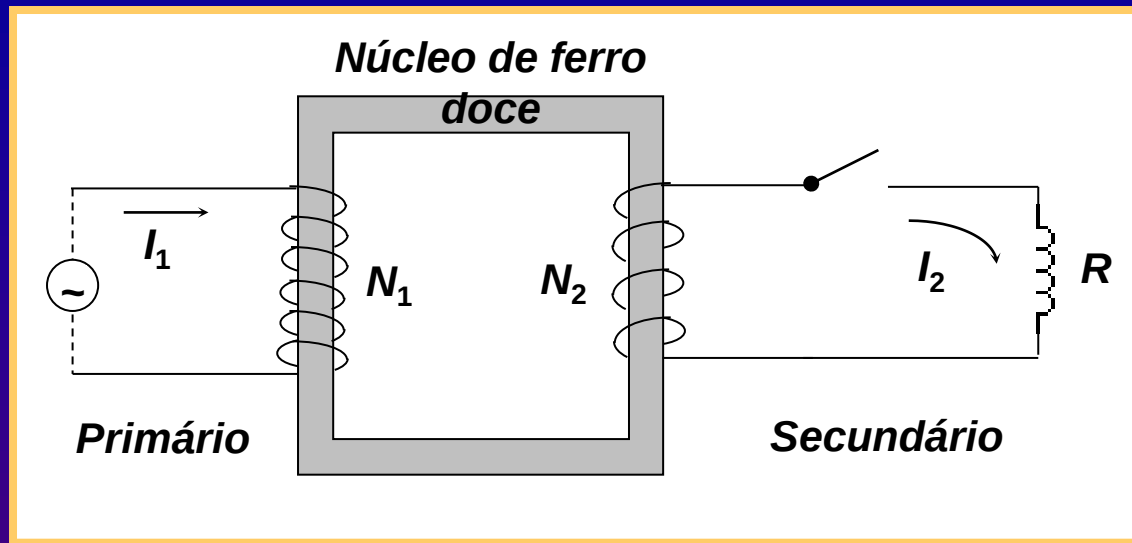
O Transformador

- Potência dissipada em uma carga resistiva:
$$\begin{cases} P = \varepsilon I \text{ (C.C.)} \\ \bar{P} \propto \varepsilon_{ef} I_{ef} \text{ (C.A.)} \end{cases}$$
- No dia a dia, não é prudente lidar com altas tensões; porém, numa linha de transmissão, I_{ef} deve ser baixa (evita perdas!).
- Dai a função do Transformador de Corrente Alternada.

Símbolo:



- Basicamente $\equiv$ 2 enrolamentos (primário e secundário)



- Circuito Primário gera fluxo ϕ : $\mathcal{E}_1^{ef} = -\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^{ef} = -N_1 \left(\frac{d\phi_{1esp}}{dt}\right)^{ef} \quad (1)$
- Admitindo-se que não ocorra perda de fluxo, o mesmo fluxo magnético atravessa a região do 2º enrolamento:

$$\mathcal{E}_2^{ef} = -N_2 \left(\frac{d\phi_{1esp}}{dt}\right)^{ef} \quad (2) \quad \therefore \quad \frac{\mathcal{E}_1^{ef}}{\mathcal{E}_2^{ef}} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \mathcal{E}_2^{ef} = \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1^{ef}$$

Comparando (1) e (2)

