Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

3ª aula – 06/mar/2007

- Na aula passada vimos: Circuito RLC com tensão alternada.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0\, e^{i\omega t} \quad \text{(uma grandeza complexa)}$$

- De forma que $I = I_0\, e^{i\omega t}$; sendo que a parte real é: $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta) = \dfrac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$.

- Então: $\boxed{Z = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$ e $\boxed{|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$;

Reatâncias indutiva e capacitiva.

- Sendo que $\boxed{\theta = \text{arc}\, tg \left(\dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \right)}$.

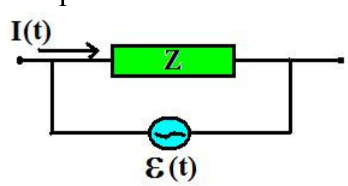
- Sabemos que a potência dissipada por um resistor: <u>P = RI²</u> $\Rightarrow$ se corrente varia no tempo:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t),$$

- Então a potência média: $\overline{P} = R\,\overline{I^2} = R\, I_0^2\, \underbrace{\overline{\cos^2 \omega t}}_{=1/2} \;\Rightarrow\; \overline{P} = R\left(\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2$; $\underbrace{\left(I_{ef} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_0 \right)}_{\text{corrente eficaz}}$

- Sendo $I_{ef} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ então podemos fazer, igualmente, $\boxed{V_{ef} = \dfrac{V_0}{\sqrt{2}}}$.

- Vamos agora calcular a potência em relação a uma impedância Z:



- Neste caso, a <u>potência instantânea</u>:

$$P(t) = \varepsilon I = \left[\text{Re}\, \varepsilon(t)\right]\left[\text{Re}\, I(t)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P(t)} = \overline{\left[\text{Re}\, \varepsilon(t)\right]\left[\text{Re}\, I(t)\right]}$$

- Mas: $\boxed{\varepsilon(t) = Z\, I(t)}$; ($Z = |Z|\, e^{i\theta}$ e $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\, e^{i\omega t}$) $\Rightarrow$ $\boxed{I(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{|Z|}\, e^{i(\omega t - \theta)} = I_0\, e^{i(\omega t - \theta)}}$

- Então: $\overline{P} = \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|}\overline{\cos(\omega t).\cos(\omega t - \theta)} =$

$$= \varepsilon_0 I_0 \overline{\cos(\omega t).(\cos(\omega t)\cos(\theta) + \sin(\omega t)\sin(\theta))} =$$

$$= \varepsilon_0 I_0 \overline{(\cos^2(\omega t)\cos(\theta) + \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin(\theta))} =$$

$$= \varepsilon_0 I_0 \left(\underbrace{\overline{\cos^2(\omega t)}}_{=1/2}\cos(\theta) + \underbrace{\overline{(\cos(\omega t)\sin(\omega t))}}_{=0}\sin(\theta) \right)$$

Fator de potência

$$\therefore \quad \boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos(\theta)}$$

(Em termos da tensão e corrente eficazes: $\overline{P} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{2}} I_{ef} \cancel{\sqrt{2}} \varepsilon_{ef} \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{\overline{P} = I_{ef}\varepsilon_{ef}\cos(\theta)}$)

- Ou seja, quando $\begin{cases} \cos\theta = 1 \rightarrow \overline{P} \text{ é máximo} \\ \cos\theta = 0 \rightarrow \overline{P} \text{ é mínimo} \end{cases}$ (*Não podemos ter cosθ < 0 pois $\overline{P}$ seria negativo e o circuito passaria a absorver energia, ao invés de dissipar!*)

- Legal! Então é só alguém dar um jeito para conseguir que $\cos\theta$ se anule, lembrando que { $\theta = acrtg\left[(\omega L - 1/\omega C)/R\right]$ }, e eu não tenho mais que pagar conta de luz, certo?

- Não! 1º porque kW-hora≡ medida de energia consumida, e não de potência.
  2º porque se $\cos\theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$, e $tg\ \pi/2 = tg\left[(\omega L - 1/\omega C)/R\right] \rightarrow \infty$,
  Ou seja, R$\rightarrow$ 0 e não haverá nenhum trabalho útil sendo realizado!

- Mas, então por que se preocupar com o "*fator de potência*"?

- Na verdade, são as companhias elétricas que exigem $\cos\theta$ ~1, pois senão vai haver desperdício de energia.

- Exemplo: Supor um motor monofásico com potência média 15CV (1CV=736W), tensão 220 V (eficaz, na tomada) e Fator de Potência FP = 92% ($\cos\theta$=0,92) está trabalhando em plena carga (rendimento 100%). a) determine a corrente eficaz que circula pela rede de alimentação devido a este motor. b) faça o mesmo considerando FP = 51%.

a) Como vimos, $\overline{P} = \varepsilon_{ef} I_{ef} \cos\theta = (15\,CV)(736\ W/CV) = 11040W$;

$$I_{ef} = \frac{11040}{220 \cdot 0,92} \Rightarrow \boxed{I_{ef} = 54,5A}$$

b) Da mesma forma: $I_{ef} = \frac{11040}{220 \cdot 0,51} \Rightarrow \boxed{I_{ef} = 98,5A}$

- Ou seja, o motor funcionando na mesma potência consome uma corrente menor no 1º caso (no 2º caso, 90A de corrente é "perdida"!).

- Indústrias com fator de potência menor que 92% são multadas!

Ressonância

- Como visto na aula passada, o módulo da impedância de um circuito RLC é dado por:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \text{ ; com } \theta = acrtg\left[(\omega L - 1/\omega C)/R\right] \neq \text{ ângulo de fase}$$

- Observe que |Z| e θ dependem de ω ≡ freqüência da variação de tensão (produzida pela fonte) e da corrente induzida no circuito.

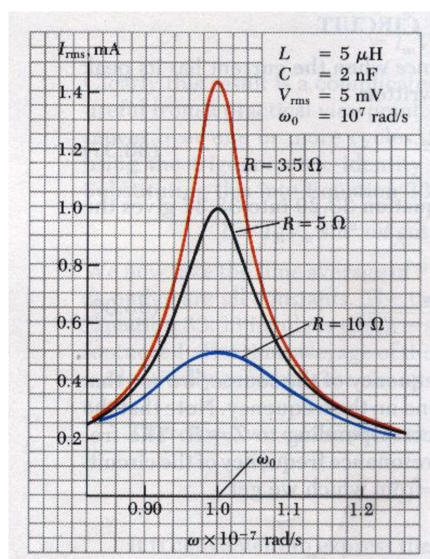
- Pergunta: Para dados valores de R, L e C, qual freqüência de oscilação da fonte vai minimizar o valor de |Z|?

- Para descobrir isto, faço $\frac{\partial |Z|}{\partial \omega} = 0$ (ver apêndice), ou então, simplesmente eu noto que sendo $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$, eu obtenho $|Z|_{min}$ quando $\omega L = 1/\omega C \Rightarrow \boxed{\omega = 1/\sqrt{LC}}$

- Neste caso: $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\sqrt{\frac{L^2}{LC}} - \sqrt{\frac{LC}{C^2}}\right)^2} = \sqrt{R^2} = R$ *impedância puramente resistiva*

- A este valor de $\boxed{\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0}$ chamamos de **Freqüência natural de oscilação**, para a qual |Z| é mínimo.

- Como $I_0 = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}$, sendo $|Z|_{min} \rightarrow$ corrente I_0 resultante (no circuito) é maximizada.



- Na figura ao lado é mostrado o gráfico da corrente no circuito, em função de ω, para diferentes valores de R.

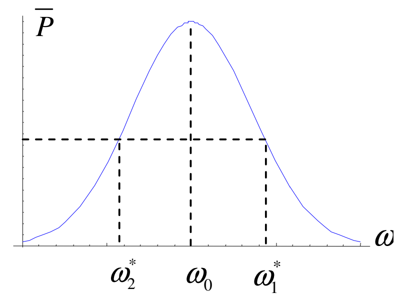
- O funcionamento de sistemas de recepção de ondas eletromagnéticas (*EM*) tal como telefone celular, aparelhos de rádio, de TV, etc., baseia-se neste princípio.

- Ou seja, para que um determinado sinal EM - com freqüência ω - seja captado, é preciso ajuste os valores de LC do circuito para que o ω_0 do circuito seja igual a ω.

- Por outro lado, para se ter um sinal "limpo" (sem ruídos ou interferências), é interessante que a curva de ressonância seja *a mais pronunciada possível.*

- Uma forma de avaliar a "performance" de um circuito é calcular o "*Fator de Qualidade*" do circuito que indica justamente o quanto a curva de ressonância é pronunciada.

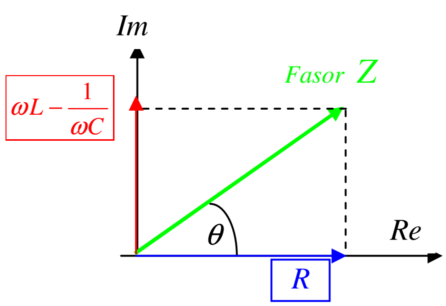
- Para fazermos isto, vamos supor duas freqüências ω_1^* e ω_2^*, próximas de ω_0, de forma que estes valores correspondam a uma potência dissipada no circuito que é a metade daquela dissipada no circuito com freqüência ω_0; ou seja:



$$\boxed{\overline{P}(\omega^*) = \frac{1}{2}\overline{P}(\omega_0)},$$

sendo que $\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos\theta}$ e, como já vimos, $\boxed{\varepsilon_0 = |Z| I_0}$.

- Vou reescrever $\overline{P}$ lembrando que $\boxed{Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$ (circuito RLC)



$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{R}{|Z|} \\ \text{e } |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \end{cases}$$

- Então (substituído I_0): $\overline{P} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\frac{R}{|Z|}$

- Assim, $\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0^2 R}{|Z(\omega^*)|^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0^2 R}{2R^2}$, pois quando $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow |Z| = R$

- De forma que, sendo $|Z(\omega^*)|^2 = 2R^2 \Rightarrow R^2 + \left(\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C}\right)^2 = 2R^2 \Rightarrow$ (tirando a raiz quadrada) $\Rightarrow \left|\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C}\right| = R$ (*)

- Para situações nas quais as curvas são relativamente pronunciadas, ω^* não são muito diferentes de $\omega_0 \Rightarrow$ podemos escrever que:

$$\omega^* = \omega_0 + \Delta\omega.$$

- Substituindo na equação anterior (*):

$$\left|\omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}\right| = R\,.$$

- Expandindo $\dfrac{1}{\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)} \approx 1 - \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$ e, dividindo tudo por L:

$$\left|\omega_0 + \Delta\omega - \frac{1}{\omega_0 LC}\left(1-\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right| = \frac{R}{L}\,;\ (LC = \omega_0^2)\quad \Rightarrow\quad \left|\cancel{\omega_0} + \Delta\omega - \cancel{\omega_0} + \Delta\omega\right| = \frac{R}{L}\quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2\frac{|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}\,.$$

Ou seja, $\boxed{Q = \dfrac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \dfrac{\omega_0 L}{R}}$ $\equiv$ ***"Fator de Qualidade"***

Indica a <u>variação percentual</u> entre ω_0 **(pico)** e **$2|\Delta\omega|$ (largura a meia-altura)**

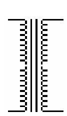
O Transformador

- Potência dissipada em uma carga resistiva: $\begin{cases} P = \varepsilon I & \text{(C.C.)} \\ P\,\alpha\,\varepsilon_{ef} I_{ef} & \text{(C.A.)} \end{cases}$

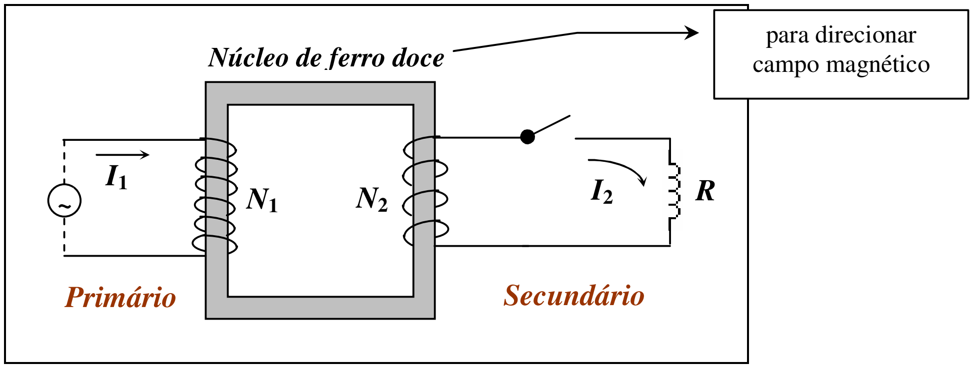
- Em tratando-se de uma distribuição de energia elétrica (tanto na estação geradora quanto no ambiente de recepção), é conveniente lidar com valores relativamente baixos de tensão (imagine, por exemplo, uma torradeira elétrica funcionando a 1kV!).

- Por outro lado, na transmissão de energia de um ponto para outro há potência dissipada pela Linha de Transmissão: sendo $\overline{P} = RI_{ef}^2 \Rightarrow I_{ef}$ deve ser a mais baixa possível de forma a se evitar perdas; e como $\boxed{\overline{P} = \varepsilon_{ef} I_{ef}} \Rightarrow$ conclui-se que o ideal seria trabalhar com tensões elevadas e correntes baixas!

- Daí a função do ***transformador de corrente alternada***.

símbolo: 

- Basicamente, um transformador corresponde a dois enrolamentos (primário e secundário) na forma mostrada abaixo:



- Funcionamento: circuito primário gera fluxo ϕ: $\varepsilon_1^{ef} = -\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^{ef} = -N_1\left(\dfrac{d\phi_{1,esp}}{dt}\right)^{ef}$.
- Admitindo-se que não ocorra perda de fluxo $\Rightarrow$ o mesmo fluxo magnético criado no primeiro enrolamento atravessa a região do segundo enrolamento:

$$\varepsilon_2^{ef} = -N_2\left(\frac{d\phi_{1,esp}}{dt}\right)^{ef}$$ (Tomando valores eficazes, não preciso me preocupar com diferenças de fase nos 2 circuitos)

- Comparando: $\dfrac{\varepsilon_1^{ef}}{\varepsilon_2^{ef}} = \dfrac{N_2}{N_1} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2^{ef} = \dfrac{N_2}{N_1}\varepsilon_1^{ef}}$

- Observe que, quando $\begin{cases} N_2 > N_1 \rightarrow \varepsilon_2^{ef} > \varepsilon_1^{ef} & \text{Transformador Levantador de Tensão} \\ N_2 < N_1 \rightarrow \varepsilon_2^{ef} < \varepsilon_1^{ef} & \text{Transformador Abaixador de Tensão} \end{cases}$

APÊNDICE

- Potência dissipada:

$$P_{dissipada} = \mathrm{Re}(I(t))\ \mathrm{Re}(\varepsilon(t)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\varepsilon_0\, e^{i\omega t}\right)\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0\, e^{i\omega t}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{|Z|\, e^{i\theta}}\varepsilon_0 e^{i\omega t}\right)\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0 e^{i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{|Z|}\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t-\theta)}\right)\varepsilon_0\ \mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right) = \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|}\cos(\omega t-\theta)\cos(\omega t)$$

- Valor médio: $\overline{P_d} = \dfrac{\varepsilon_0^2}{|Z|}\left[\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta\right]\cos\omega t =$

$$= \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|}\left[\overline{\cos^2\omega t}\cos\theta + \sin\theta\,\overline{\sin\omega t\cos\omega t}\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|}\left[\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta\left(\frac{1}{2}\underbrace{\overline{\sin 2\omega t}}_{=0}\right)\right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{|Z|}}_{=I_0}\cos\theta$$

$$\therefore\ \boxed{\overline{P_d} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 I_0\cos\theta}$$

(integrando de um t inicial até um período T completo subseqüente)

$$\overline{\sin(2\omega t)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin(2\omega t)\,dt = -\frac{1}{2\omega T}\cos(2\omega t)\Big|_t^{t+T} =$$

$$= -\frac{1}{2\omega T}\left[\cos 2\omega(t+T) - \cos 2\omega(t)\right]$$

agora, como $\cos 2\omega(t+T) = \cos 2\omega(t) \Rightarrow$ a integral se anula!