INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

4ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Na aula passada vimos...

- "Potência Média" (Circuito RLC)

$$\overline{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos\theta$$

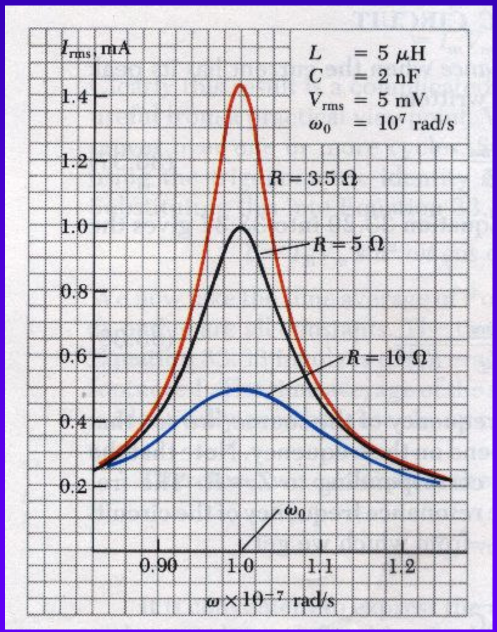
"Fator de Potência"

- Ressonância:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\equiv$ "Frequência Natural"

(minimiza $|Z| = R$ e $\therefore$ $I_{circ.}$ é a máx. Possível)



- Fator de Qualidade:

$$Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Equações de Maxwell

$1)\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ Lei de Gauss

$2)\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ Inexistência do Monopolo Magnético

$3)\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ Lei de Faraday

$4)\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ Lei de Ampère modificada

para ***meios lineares:***

$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{cases}$$

Importante lembrar também...

- Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dA$$

- Teorema do Divergente:

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV$$

- Equação da Continuidade:
  (conservação da carga)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Vejamos agora 2 importantes resultados previstos pelas Eqs. de Maxwell

1 - Conservação de Energia em sistemas que envolvem $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variando no tempo.

2 - Existência de Ondas EM $\equiv$ campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilantes.

1- Energia do campo eletromagnético

- multiplicando a eq. (4), escalarmente, por $\vec{E}$:

$$\vec{\mathrm{E}} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

e usando que: $\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right]$; $\begin{cases} \vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{H}} \\ \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{E}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} \times \vec{\mathrm{E}} \right) + \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} \right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \textbf{(5)}$$

- igualmente,multiplicando a eq. (3) escalarmente por $\vec{H}$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \qquad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathrm{E}} \times \vec{H} \right) + \vec{\mathrm{E}} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \textbf{(6)}$$

- Fazendo (6) – (5):

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}\right)+\vec{\mathrm{E}}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)=$$

$$=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}\right)+\underline{\vec{\mathrm{E}}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{E}}\right)}=$$

$$=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Comparar!

$$\nabla\cdot\left(\vec{\mathrm{H}}\times\vec{\mathrm{E}}\right) = -\nabla\cdot\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{\mathrm{H}}\right)$$

$$\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right]$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \boxed{\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}} - \vec{E}\cdot\vec{J} \qquad \textbf{(7)}$$

- Mas... $$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial(E^2)}{\partial t} = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{E})}{\partial t}$$

- Então: $$\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{D})}{\partial t}$$ da mesma forma: $$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\vec{H}\cdot\vec{B}\right)}{\partial t}$$

- Em (7): $$-\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = +\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right] + \vec{E}\cdot\vec{J} \qquad \textbf{(8)}$$

Densidade de energia Magnética u_M

Densidade de energia Elétrica u_E

- Integrando a equação (8) no volume e aplicando o *Teorema do Divergente* no lado esquerdo:

$$\left(-\vec{\nabla}\cdot\left(\underbrace{\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}}_{=\vec{F}}\right)=+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right]+\vec{E}\cdot\vec{J}\right)$$

$$\left(\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA=\int_V\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dV\right)$$

$$-\oint_S\left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\,dA=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\frac{1}{2}\left[\vec{H}\cdot\vec{B}+\vec{E}\cdot\vec{D}\right]dV+\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J})\,dV \qquad \textbf{(9)}$$

- Define-se $\boxed{\vec{E}\times\vec{H}=\vec{S}}$ ≡ ***"Vetor de Poynting"*** ≡ Energia por unidade de Tempo, por unidade de Área, que atravessa Superfície de área S

|||

Potência por unidade de área

- Portanto: $\oint_S \left(\vec{\mathrm{E}} \times \vec{H}\right) \cdot \hat{n}\, dA$ $\equiv$ ***Energia*** que atravessa a *superfície fechada S,* por unidade de tempo.

- Enquanto que o termo da eq. (9): $\dfrac{\partial}{\partial t}\int_V \dfrac{1}{2}\left[\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D}\right] dV$

corresponde à energia contida no volume V (abrangido pela superfície S) na forma de campos eletricos e magnéticos que variam no tempo

- Quanto ao termo: $\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\, dV$ $\equiv$ Energia correspondente ao efeito Joule!

- Para mostrar isso, supor fio condutor de resistividade ρ, comprimento ℓ, corrente I e seção transversal A.

$$P_d = RI^2 = \left(\frac{\rho\ell}{\cancel{A}}\right)\left(J\cancel{A}\right)^{\cancel{2}} = \rho\ell A J^2 \rightarrow \frac{P_d}{\ell A} = \rho J^2$$

$$Mas: \ \rho = \frac{1}{\sigma} \ e \ J = \sigma E \ \Longrightarrow \ \frac{P_d}{V} = \rho\vec{J}\cdot\vec{J} = \frac{1}{\cancel{\sigma}}\vec{J}\cdot\cancel{\sigma}\vec{E}$$

$$\boxed{\therefore \frac{P_d}{V} = \vec{J}\cdot\vec{E}}$$

$\Rightarrow$ ***Integrando no Volume,***
tenho a *P_{dis} Total:*

$$\boxed{P_\Omega = \int_V (\vec{E}\cdot\vec{J})\,dV}$$

c.q.d.

- Assim, a eq. (9):

$$-\oint_S \left(\vec{\mathrm{E}}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\,dA=\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left[\vec{H}\cdot\vec{B}+\vec{E}\cdot\vec{D}\right]dV+\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J})\,dV$$

estabelece a *Conservação de Energia* em uma região do espaço, de *volume V*, delimitada pela *superfície S*.

2 - Equação da onda para o Campo Magnético

- Estaremos considerando ondas EM em um meio linear, para o qual valem $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ *e* $\vec{B}=\mu\vec{H}$; ε *e* μ *independentes do tempo.*

- tomando o rotacional da equação (4) – *Lei de Ampère*:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{J}+\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad\rightarrow usando:\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

- e aplicando: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)}_{=0}-\nabla^2\vec{H}=\sigma\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=-\partial\vec{B}/\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$$

$$\therefore\quad -\nabla^2\vec{H}=-\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\quad\rightarrow\quad\left(\vec{B}=\mu\vec{H}\right)\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad\boxed{\nabla^2\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0}$$

$\equiv$ ***Eq. de Onda*** para o campo magnético

- Igualmente, tomando o *rotacional* da equação (3) – Faraday:

$$\vec{\nabla}\underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)}_{=0}-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad -\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\quad ;\ lembrando\ que:\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

- Então:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0}$$

$\equiv$ ***Eq. de Onda*** para o campo elétrico

- Estes resultados irão fornecer a propagação do campo EM em meios lineares, homogêneos, com dens. de cargas líquidas $\boldsymbol{\rho = 0}$.

• Supondo *ondas monocromáticas* (frequência única) a análise da propagação das ondas EM torna-se razoavelmente simples.

• Para o campo elétrico, por exemplo, a solução da Eq. de Onda é da forma (solução de *onda plana*):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Dependência espacial

Dependência temporal

• Derivando e subst. na Eq. de Onda: $\left(\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0\right)$

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon\mu\omega^2\vec{E}(\vec{r}) + i\omega\sigma\mu\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

• Esta equação rege a dependência espacial do campo elétrico; e o que vamos fazer agora é analisar um caso bastante simples:

Propagação no Espaço Vazio (em 1D)

• Vácuo: $\begin{cases} \sigma = 0 \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \\ \mu = \mu_0 \end{cases}$

$$\left[\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \vec{E}(\vec{r}) + i\omega\sigma\mu \vec{E}(\vec{r}) = 0\right]$$

Substituindo e supondo a onda propagando-se na direção do eixo z:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(z) = 0 \quad ; \quad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

• Solução: $\boxed{\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{\pm iKz}}$; $\boxed{K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}}$

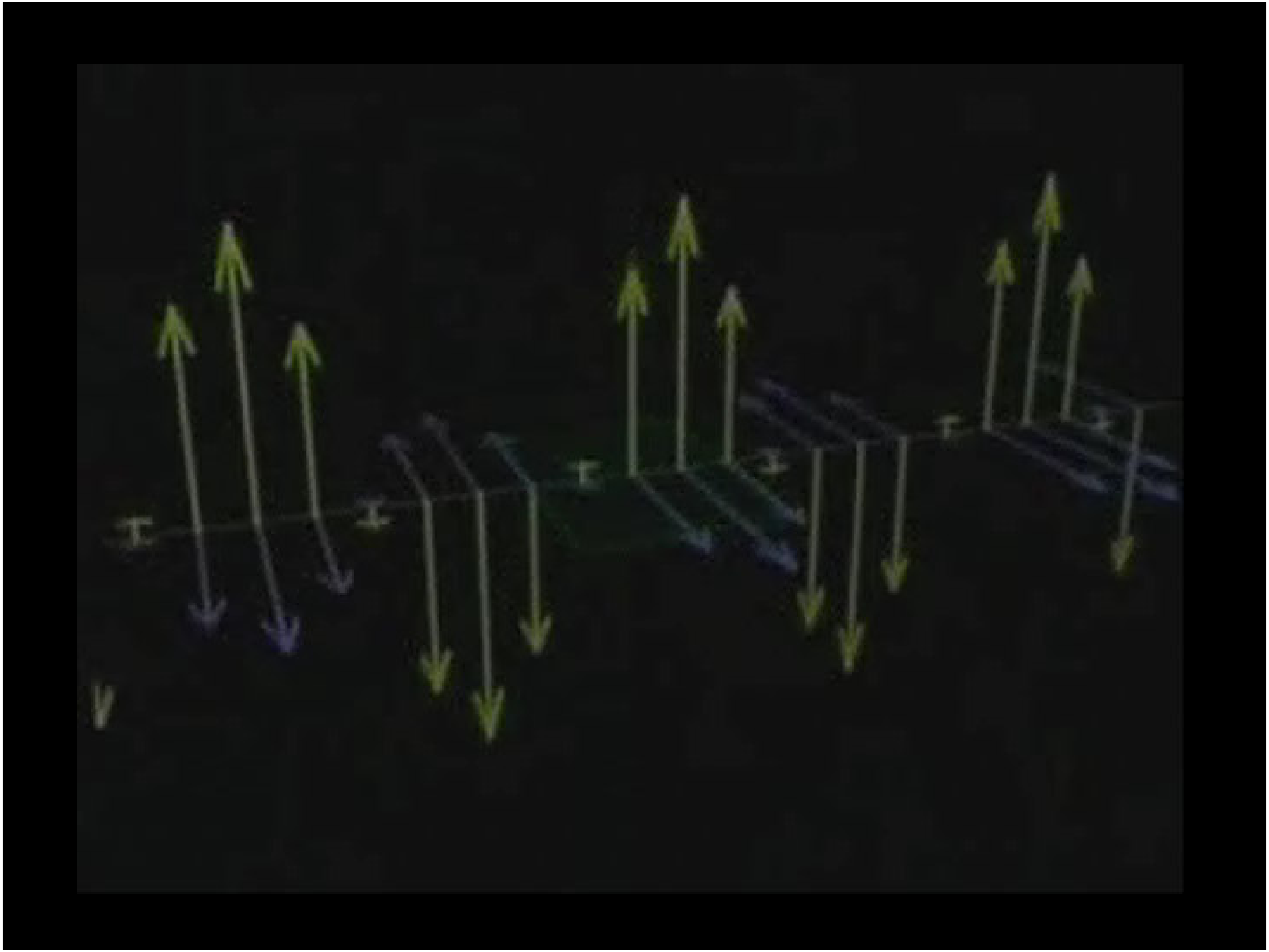
para dielétricos:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi f}{v}; (n = c/v)$$

$$\therefore \boxed{K = n\frac{\omega}{c}}$$

• Assim: $\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t \pm Kz)}$ → *Solução de Onda Plana*

Sentido de Propagação




DivX
VIDEO