

Eletrromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

4ª aula – 09/mar/2007

- Na última aula vimos: “Fator de Potência” (Circuito **RLC**): $\bar{P} = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \theta$
- Ressonância: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \text{frequência natural} \Rightarrow |Z| = R$ (mínima possível);
consequentemente, I é a máxima possível.

- Fator de Qualidade: $Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R}$
- Vamos agora retornar às **Equações de Maxwell**:

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	Lei de Gauss
2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Inexistência do monopolo magnético
3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de Faraday
4) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Lei de Ampère modificada

- Sendo que, para meios lineares: $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$; μ e ε independem do tempo.
- Além disso, vale relembrar:

1) **Teorema de Stokes**: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA$

2) **Teorema do divergente**: $\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV$

- Outra relação importante é a **Equação da Continuidade**: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
(expressa a *conservação da carga*)

- Vamos agora discutir dois importantes resultados previstos pelas equações de Maxwell:

- 1º) Existência das *Ondas Eletromagnéticas* ($\equiv$ Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ oscilando).
- 2º) *Conservação da Energia* em situações que envolvem $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variando no tempo.

- Podemos iniciar discutindo a questão da *conservação de energia* multiplicando (escalarmente) a 4ª equação de Maxwell por $\vec{E}$:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{sabendo que } \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5)$$

- Igualmente, multiplicando (escalarmente) a 3ª equação de Maxwell por $\vec{H}$:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

- Efetuada a subtração de (6) - (5):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \underbrace{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Assim: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}$ (7)

- Mas, observe que o termo: $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial (E^2)}{\partial t}$

$$\therefore \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \vec{D})}{\partial t}$$

- Da mesma forma, podemos escrever:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{H} \cdot \vec{B})}{\partial t}$$

- Então, substituindo em (7):

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right] + \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (8)$$

Densidade de Energia
Magnética u_M

Densidade de Energia
Elétrica u_E

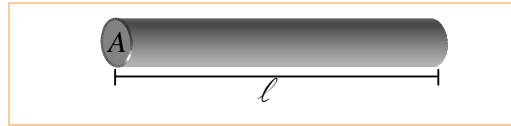
- Integrando esta equação no volume e aplicando o *Teorema da Divergência* no lado esquerdo:

$$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}] dV + \int_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV \quad (9)$$

- Chamando-se $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$ “*Vetor de Poynting*” como sendo a energia por unidade de área, por unidade de tempo, que atravessa a superfície $S \Rightarrow$

$$\Rightarrow \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dA \equiv \text{energia que atravessa (sai) a superfície } S \text{ por unidade de tempo.}$$

- Quanto ao lado direito da equação (9), a primeira parcela corresponde à *variação temporal de energia* armazenada pelos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ existentes no volume V .
- A segunda parcela corresponde à *potência dissipada por efeito Joule* ($\equiv$ trabalho realizado pelos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, às custas destes, para mover as cargas no condutor).
- Para demonstrar isso, tomemos um fio condutor de resistividade ρ , comprimento ℓ , corrente I (constante) e seção transversal A .



- $P_{dissipada} = RI^2 = \left(\frac{\rho \ell}{A} \right) (JA)^2 = \rho \ell AJ^2 \rightarrow \boxed{\frac{P_d}{\ell A} = \rho J^2} \equiv \text{Potência por unidade de volume.}$
- Mas como $\rho = \frac{1}{\sigma}$ e $J = \sigma E \Rightarrow \frac{P_d}{V} = \rho \vec{J} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} \cdot \vec{J}$.
- Assim, a equação (9) pode ser interpretada como expressando a Conservação de Energia em uma região do espaço, de volume V , delimitada pela superfície S .
- 2º Resultado (talvez o mais importante): Equação da propagação de ondas eletromagnéticas em um meio linear. $\left(\Rightarrow \text{vale: } \begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{cases} ; \mu \text{ e } \varepsilon \text{ independentes do tempo} \right)$.
- Tomando o rotacional da equação (4):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \vec{\nabla} \times \vec{J} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \text{usando } \begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_{=0(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})} - \nabla^2 \vec{H} &= \underbrace{\sigma (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\partial \vec{B} / \partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

- Assim: $-\nabla^2 \vec{H} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow (\vec{B} = \mu \vec{H}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \equiv \text{Equação da Onda para o Campo Magnético}$

- Igualmente, tomando o rotacional da equação (3):

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{=\vec{J}})$$

Supondo meio no qual a densidade de cargas livres: $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$.

- Usando a equação (4):

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

- Estes resultados regem a propagação do campo EM em um meio linear, no qual a densidade (líquida) de cargas livres é nula.
- Em tratando-se de *Ondas Monocromáticas* (frequência única) a análise das ondas EM torna-se razoavelmente simples.
- Para o campo $\vec{E}$, por exemplo, a solução da *Equação de Onda* (procedimento usual):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{E}(\vec{r})}_{\text{Dependência espacial}} e^{-i\omega t} \quad \nwarrow \quad \swarrow \quad \underbrace{\text{Dependência temporal}}$$

- Substituindo na *Equação de Onda*:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \epsilon\mu\omega^2 \vec{E}(\vec{r}) + i\omega\sigma\mu \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (10)$$

- Boa parte do curso envolverá a resolução desta equação, para situações específicas.
- Vamos agora analisar dois casos mais simples.

$$1^\circ) \text{ Meio de propagação } \equiv \text{ espaço vazio (v\u00e1cuo): } \begin{cases} \sigma = 0 \\ \epsilon = \epsilon_0 \\ \mu = \mu_0 \end{cases} \quad (\text{em } 1D)$$

- Na direção z ($1D$): $\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(z) = 0$; $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$

- Solução é do tipo: $\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{\pm iKz}$; $K = \frac{2\pi}{\lambda} = (\text{para diel\u00e9tricos}) = \frac{\omega}{c} \equiv \underline{\text{n\u00famero de onda.}}$

$$(\text{em meios condutores, como veremos, } K = \sqrt{\kappa} \frac{\omega}{c}; \quad n = \sqrt{\kappa})$$

$$\text{constante diel\u00e9trica: } \kappa = \epsilon/\epsilon_0$$

$$\text{\u00edndice de refra\u00e7\u00e3o}$$

- Ent\u00e3o $\kappa = \frac{n\omega}{c}$

- Assim: $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(Kz \pm \omega t)}$

Sinal indica o sentido da propaga\u00e7\u00e3o da onda.
(+) para a 'direita' e (-) contra o eixo z .

- Quero *grandeza f\u00edsica* $\Rightarrow$ tomo a *parte real*:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t \pm Kz) \equiv \text{Solu\u00e7\u00e3o de onda plana.}$$