INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

5ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Na aula passada, das Equações de Maxwell, vimos:

1º) Conservação de Energia

$$-\oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\hat{n}\,dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left[\vec{H}\cdot\vec{B}+\vec{E}\cdot\vec{D}\right]dV \; + \; \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

$\vec{S}$ (Vetor de Poynting)

Densidade de Energia EM

Dissipação Joule

2º) Propagação de Ondas Eletromagnéticas

(meios lineares, $\rho = 0$)

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

*Espaço vazio: $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$; em **1D** (eixo z):*

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(z) = 0 \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Solução:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \, e^{-i(\omega t \pm Kz)} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t \pm Kz)$$

$$\left(K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \right)$$

Onda caminhando para a "direita" ou para a "esquerda".

Para dielétricos ...

- $\sigma = 0$, $\mu \cong \mu_0$; mas só que agora $c \rightarrow v$

$$K = \frac{2\pi f}{v} = \frac{n\omega}{c} \quad ; \quad n = \frac{c}{v}$$

- *Como:*

$$\begin{cases} v = \dfrac{c}{n} \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_R \varepsilon_0 \mu_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_R}} \end{cases} \rightarrow \quad n = \sqrt{\varepsilon_R}$$

e $\therefore$ $K = \sqrt{\varepsilon_R}\,\dfrac{\omega}{c}$

Sendo que: $\varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \equiv$ Cte Dielétrica

Para dielétricos ...

- $\sigma = 0$, $\mu \cong \mu_0$; mas só que agora $c \rightarrow v$

$$K = \frac{2\pi f}{v} = \frac{n\omega}{c} \quad ; \quad n = \frac{c}{v}$$

- *Como:* $$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_R \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_R}} \rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_R}$$

e ∴ $$K = \sqrt{\varepsilon_R}\,\frac{\omega}{c}$$

Sendo que: $$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \equiv \text{Cte Dielétrica}$$

Potenciais - Elétrico e Magnético

No semestre passado, vimos que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ***estáticos*** podiam ser calculados através dos potenciais:

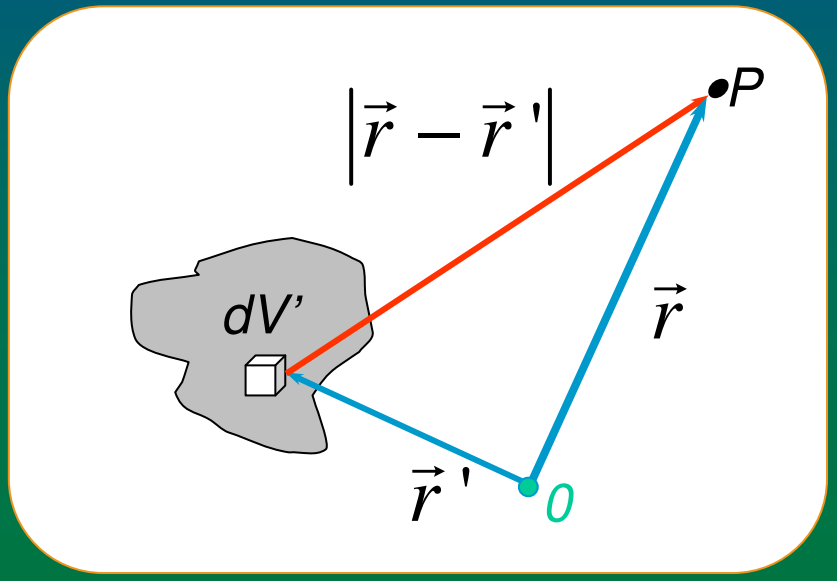
- escalar...

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad (1)$$

- ... e vetor

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \\ \vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \end{cases}$$



- Maneira alternativa para o cálculo dos potenciais, também já vista anteriormente:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \end{cases} \rightarrow \textit{Equação de Poisson}$$

- No entanto, estes resultados foram obtidos para campos estáticos.

- A pergunta é: eles continuariam válidos para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variando no tempo?

- Por exemplo, a 2ª Eq. ($\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$) satisfaz diretamente a 2ª Eq. de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = 0$$ ***Sempre!***

(Div do Rot é *SEMPRE* zero!)

- Este resultado indica, a princípio, que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ vale, mesmo para campos magnéticos variando no tempo

- Por outro lado é fácil verificar que a outra expressão: $\left(\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \right)$ é inconsistente com a 3ª Eq. de Maxwell !

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \varphi \right) = 0$$ ***Sempre!***

(Rot do Grad é *SEMPRE* zero!)

resultando $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$!

- Para contornar esta dificuldade podemos pensar em introduzir um ***termo extra*** (desconhecido) à Eq. $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{N} \implies \text{(tomando o } \textit{Rot} \text{ dos 2 lados)} \implies$$

$$\implies \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\nabla\varphi) + \vec{\nabla}\times\vec{N} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$\vec{\nabla}\times(\nabla\varphi) = 0$

- Usando a Eq. (2) $\left(\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{N} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \implies \vec{N} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Comparando:

- Substituindo: $\left(\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{N} \;;\; \vec{N} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (3)

- Devemos agora verificar que eq. (3) e eq. (2) : $\left(\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$ (2) satisfazem as duas eqs. de Maxwell restantes.

- Subst. Eq. (3) na *1ª Eq. de Maxwell*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \quad \therefore \quad -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (4)$$

- Agora, subst. eqs. (2) e (3) na *Lei de Ampère*:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)}_{\text{(Rot do Rot)}} = \mu \vec{J} - \mu\varepsilon \frac{\partial \left(\vec{\nabla}\varphi\right)}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

- Substituindo o *Rot do Rot*:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}-\mu\varepsilon\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{-\nabla^2\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\mu\vec{J}}\qquad(5)$$

$$\left(-\nabla^2\varphi-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

- Ou seja, eqs. (4) e (5) – que só dependem das incógnitas $\vec{A}$ e φ – precisam ser simultaneamente satisfeitas.

- De forma que, resolvendo-se (4) e (5), obtem-se $\vec{A}$ e φ e, depois:

$$\begin{cases}\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

- Mas, antes de passarmos à resolução das eqs. (4) e (5), talvez fosse interessante tentar simplificá-las um pouco.

- Além disso, como veremos, para um determinado problema com $\vec{E}$ e $\vec{B}$ específicos, não existe um único par $\vec{A}$ e φ que satisfaça $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (2) e $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (3)

- Ou seja, é possível escolher um par $\vec{A}'$ e φ' que seja o mais adequado, para uma determinada situação, de forma que (4) e (5) sejam satisfeitas e (2) e (3) continuem válidas

- Para ilustrar isso, supor 2 conjuntos $(\vec{A}, \varphi)$ e $(\vec{A}', \varphi')$ que correspondam aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

- Vejamos como eles diferem para que isto seja verdade.

Equivalência de soluções

- Vamos supor que os potenciais difiram entre si por parâmetros $\vec{\alpha}$ e β da forma:

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi + \beta \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \end{cases}$$

; sendo que os 2 conjuntos correspondem aos mesmos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

- Então:

$$\text{i)} \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A} + \vec{\alpha} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} \Rightarrow$$

($\vec{A}'$)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = 0 \quad (6)$$

Ou seja, $\vec{\alpha}$ pode ser escrito como o grad de algum escalar:

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \lambda} \quad (7) \qquad \boxed{\therefore \ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda}$$

ii) $$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi' - \dfrac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \left(\varphi' = \varphi + \beta \; ; \; \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi - \vec{\nabla}\beta - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\beta + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Usando (7):} \left(\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\lambda\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Resolvendo:} \quad \beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = cte = 0$$

Solução + simples: $\therefore \; \beta = -\dfrac{\partial \lambda}{\partial t}$

e, então: $$\boxed{\varphi' = \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}} \qquad (8)$$

- Assim: $\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} \end{cases}$

i.e., dada uma função escalar λ qualquer, podemos acrescentar $\vec{\nabla}\lambda$ em $\vec{A}$ e, ao mesmo tempo, subtrair $\partial\lambda/\partial t$ de φ, que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não se alteram!

- Transformações em $\vec{A}$ e φ deste tipo, são denominadas ***'Transformações de Gauge'*** ou ***'de Calibre'***

- Há vários ***'calibres'*** possíveis e a escolha depende do problema que se pretende resolver.

- Dois destes ***'calibres'*** são mais frequentemente utilizados: o de Coulomb e o de Lorentz.

Transformações de "Gauge"

1º) Gauge de Coulomb: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

- Subst. na eq. (4) …

$$\left(-\nabla^2\varphi-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon}\right)\Rightarrow\boxed{\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Equação de Poisson

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Só o cálculo de φ não mais nos fornece $\vec{E}$!

… e (5): $\left(-\nabla^2\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t})=\mu\vec{J}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ -\nabla^2\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\underbrace{\mu\vec{J}-\varepsilon\mu\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{\text{termo independente de }\vec{A}}$$

≡ *'eq. de onda'* não homogênea p/ $\vec{A}$

2º) Gauge de Lorentz: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

É o mais interessante no estudo das ondas EM

- Subst. nas eqs. (4): $\left(-\nabla^2\varphi - \dfrac{\partial\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}\right)$

e (5): $\left(-\nabla^2\vec{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \mu\vec{J}\right)$

- Temos:

$$\begin{cases} +\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} & (9) \\ +\nabla^2\vec{A} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} & (10) \end{cases}$$

Eqs. Desacopladas! (do mesmo tipo)

- Ou seja, escolhendo o ***gauge de Lorentz***, tanto $\vec{A}$ qto φ obedecem ao mesmo tipo de eq. diferencial não-homogênea.

- Em termos do *d'Alembertiano* $\left(\Box^2 = \nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$

$$\left(\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \right) \; e \; \left(\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \right)$$

$$\begin{cases} \Box^2 \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \Box^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \end{cases}$$

e, no *limite estático*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \end{cases}$$

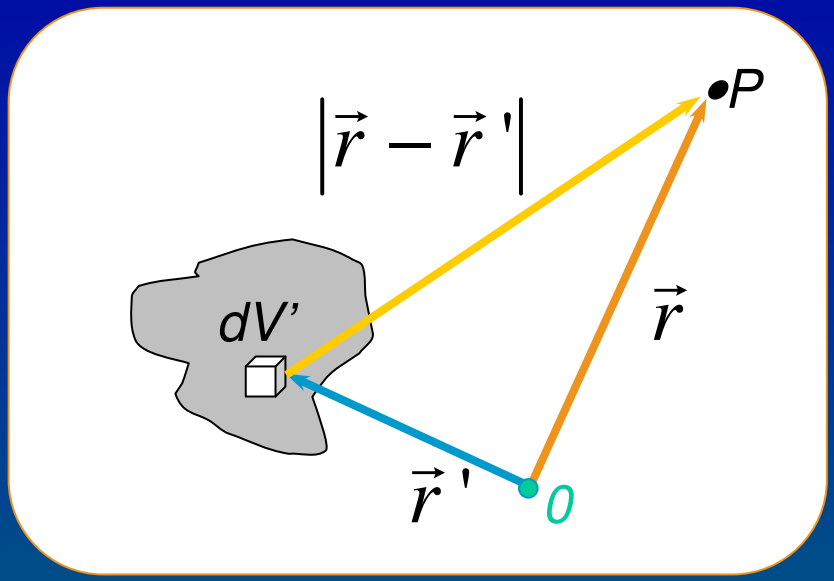
Como já visto antes,

e cujas soluções já foram obtidas em Eletromagnetismo I:

- Finalmente:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \quad \text{e} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

- Novamente, lembrar que $|\vec{r}-\vec{r}'| \equiv$ ***distância*** *da fonte ao ponto P* onde o potencial é calculado



- Mas, e no caso não estático?

- Mostraremos que as eqs. mantêm as formas acima; só que agora surge um problema!

- Ao se calcular os potenciais em P, em um dado instante t, qual a configuração de cargas e correntes que se deve considerar? As correspondentes ao mesmo instante t?

- Considerando-se que o 'sinal' propaga-se com velocidade $c \Rightarrow$ deve-se utilizar as <u>configurações de cargas e correntes</u> relativas a um <u>*instante anterior*</u>:

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$$

' tempo retardado '

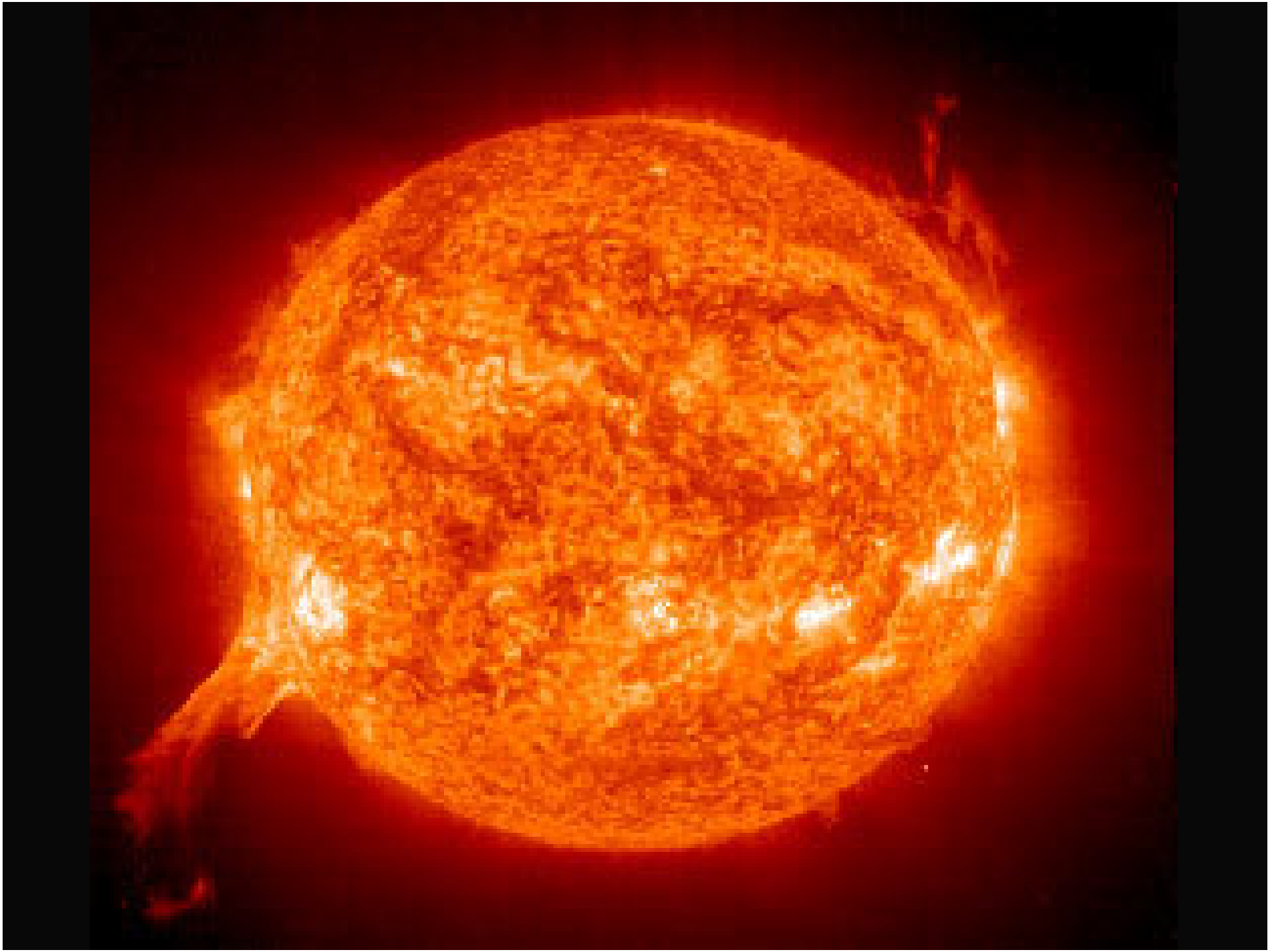
- assim:

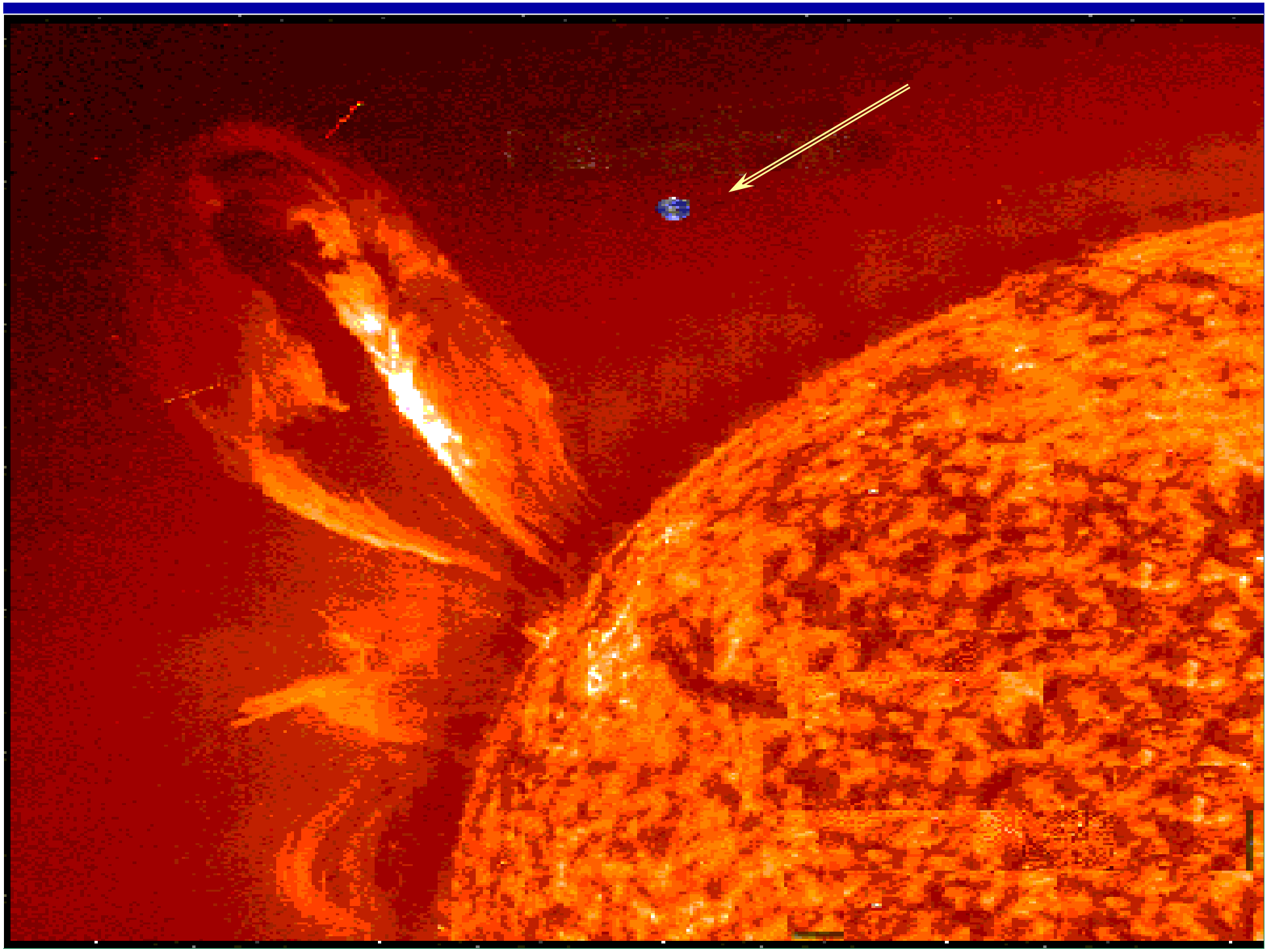
$$\begin{cases} \varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,dV' \\ \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,dV' \end{cases} \equiv \textit{'Potenciais Retardados '}$$

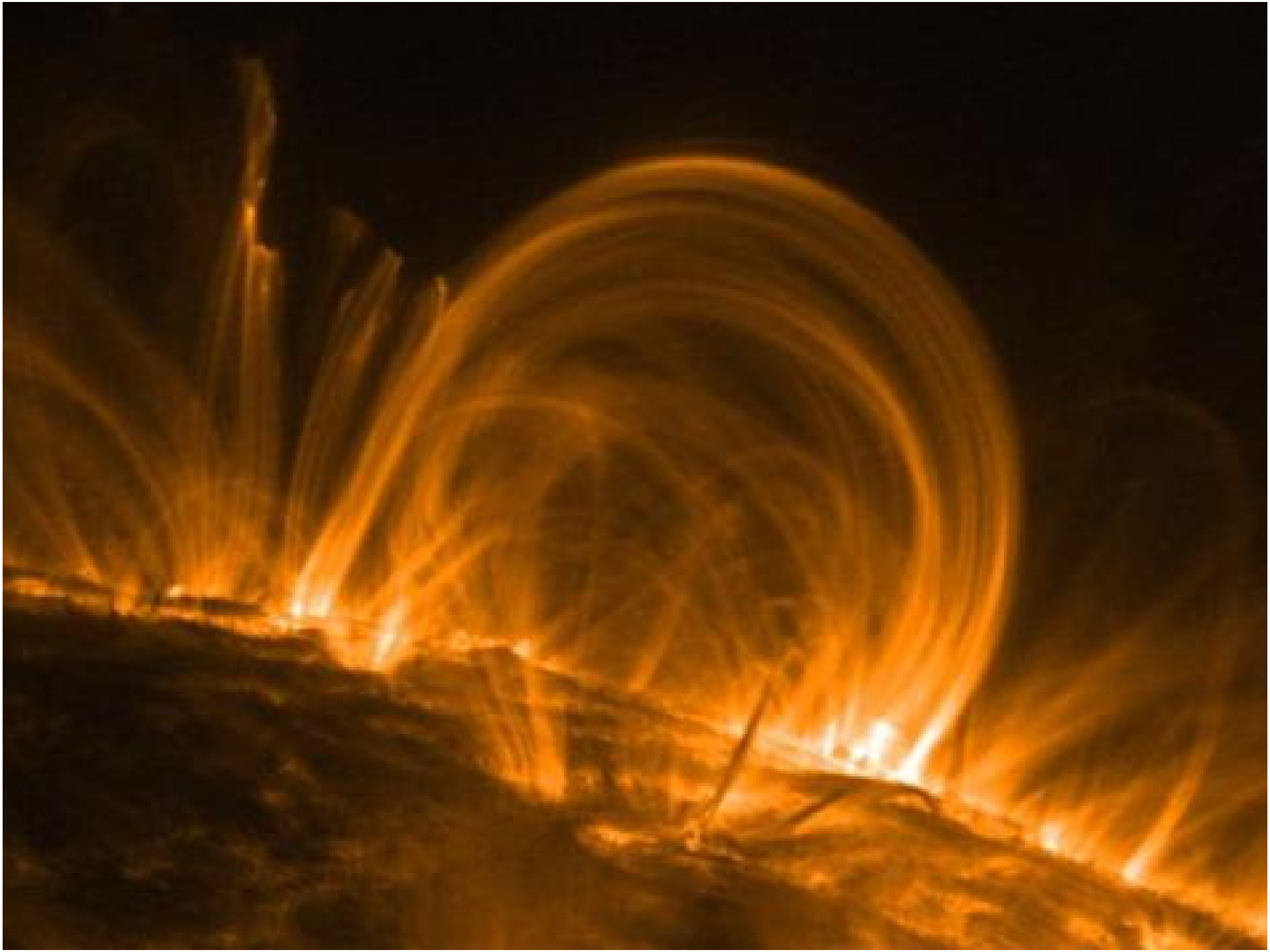
- Notar que para pontos P <u>próximos das fontes</u>:

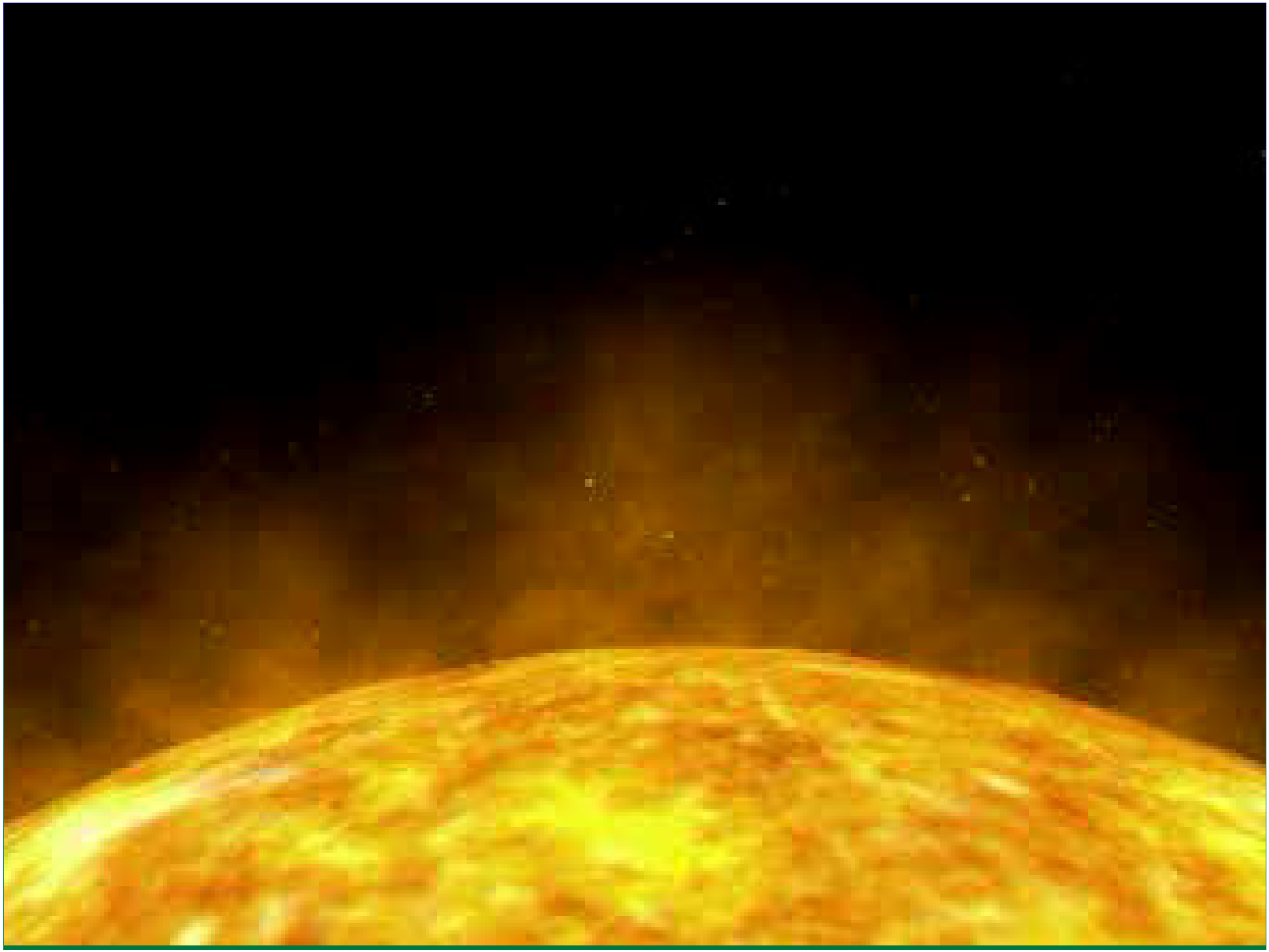
$$\frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \to 0 \Rightarrow t_r \to t$$

resta mostrar que os potenciais retardados <u>são soluções</u> das eqs. diferenciais (caso não estático)







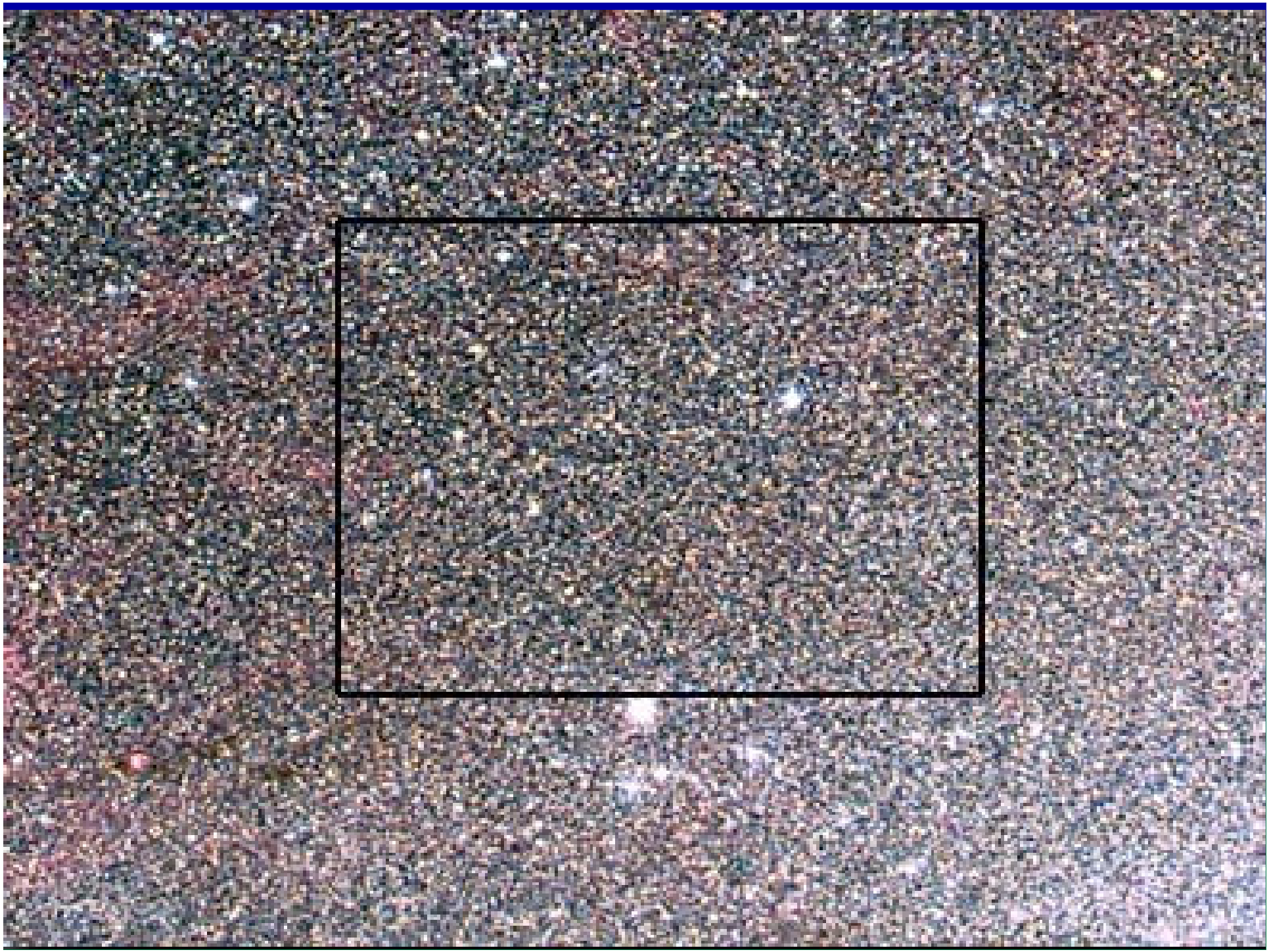
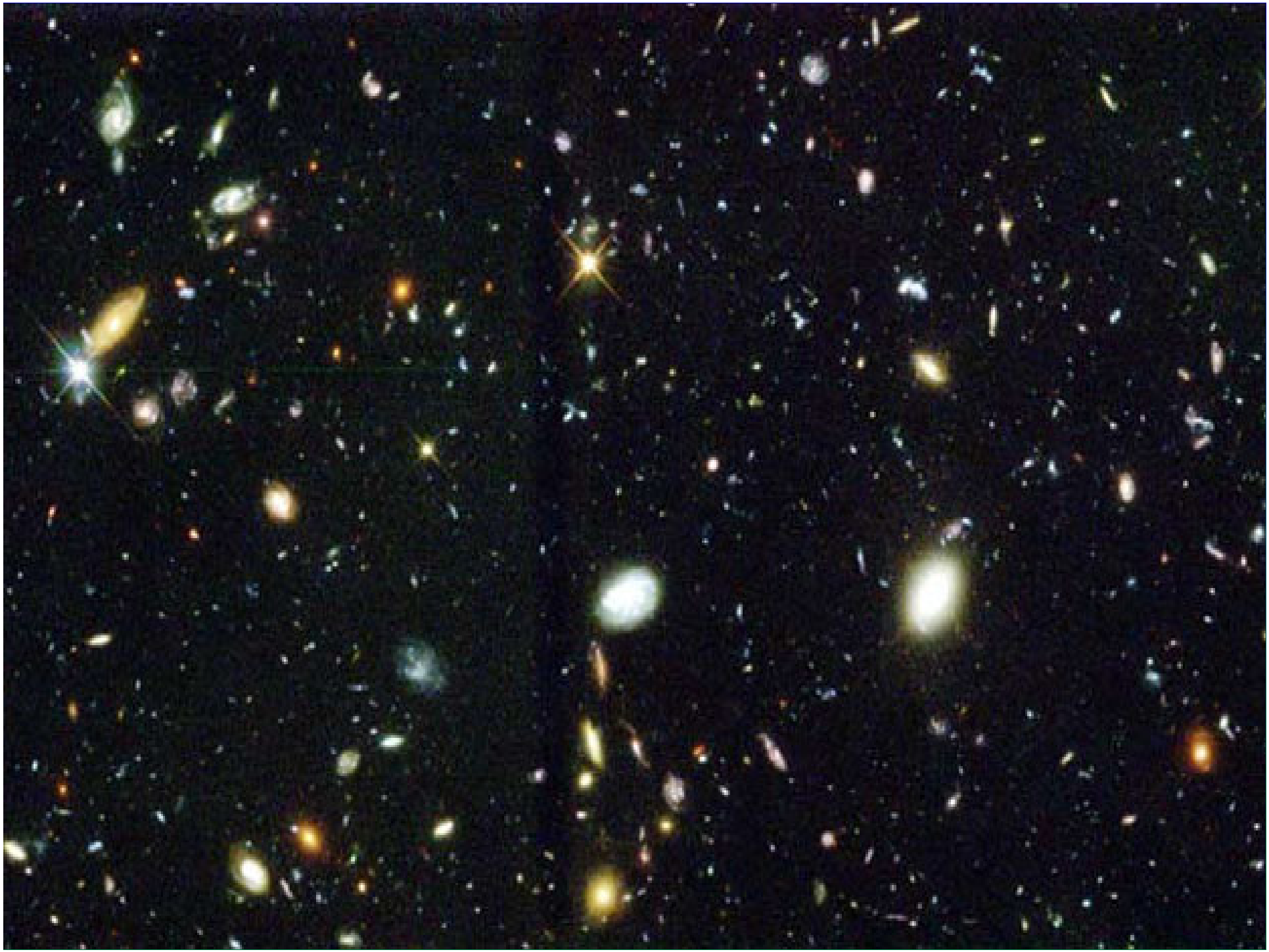
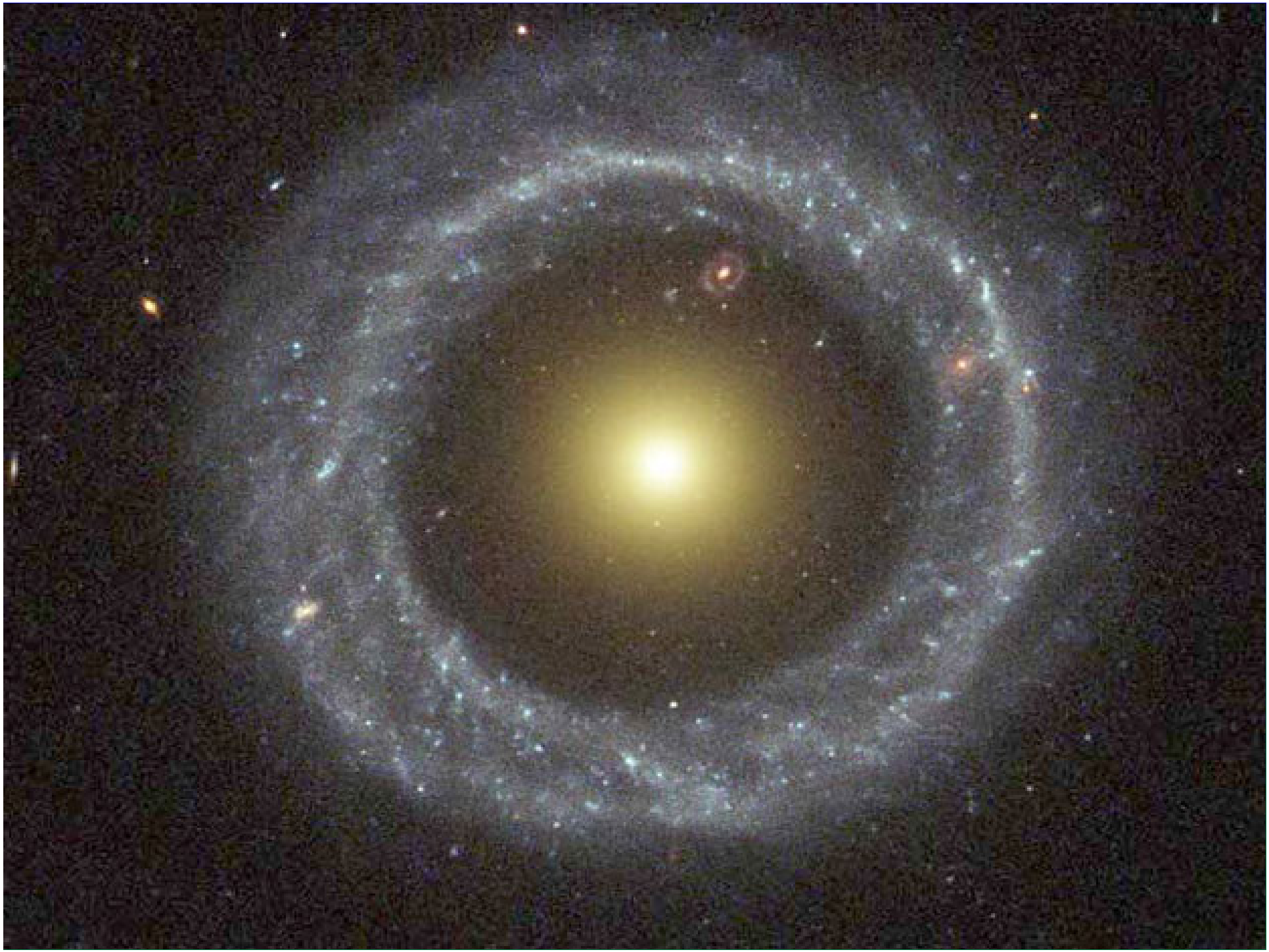
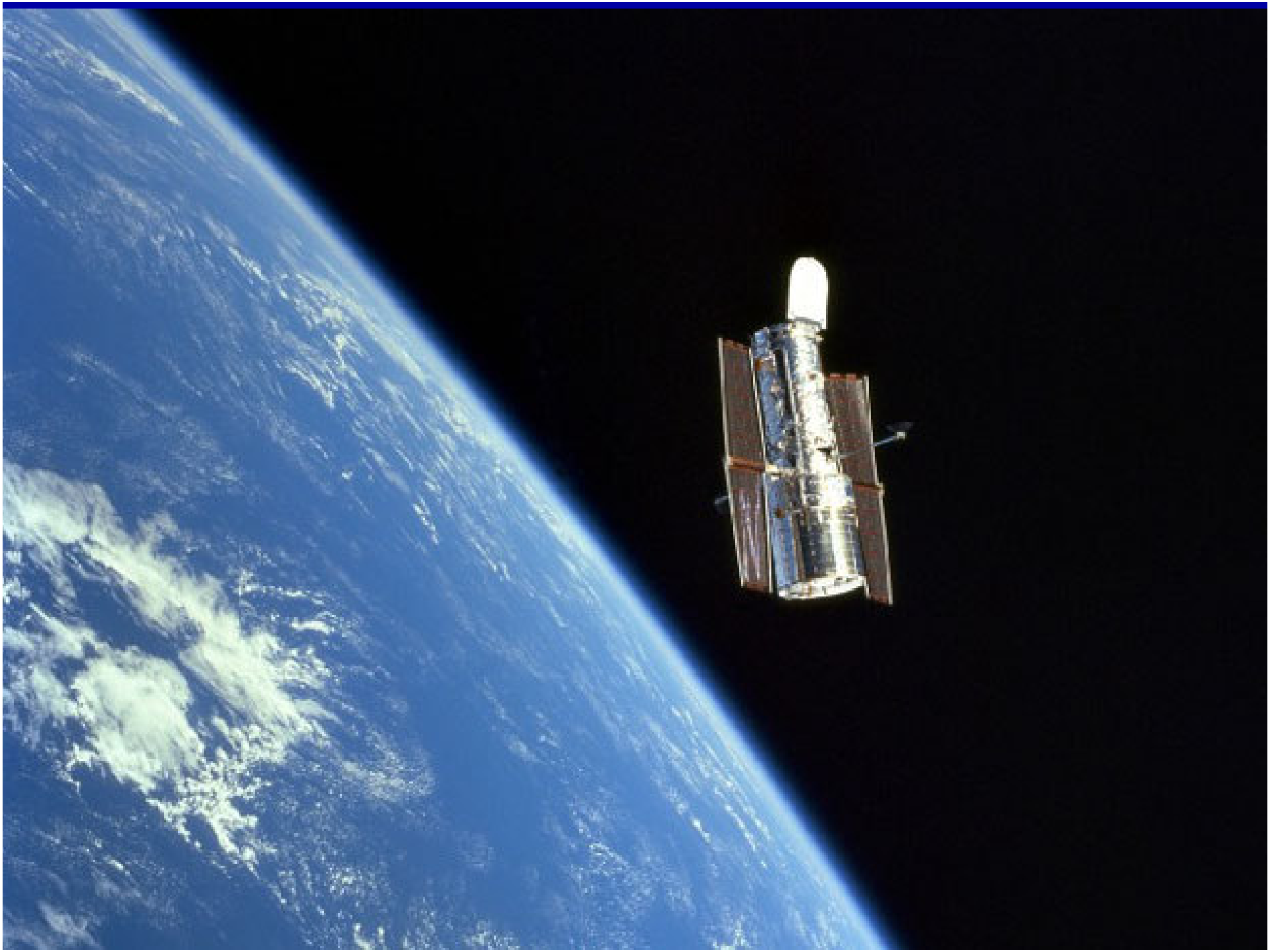


... e com relação ao Universo?

*** Velocidade da Luz: c = 300.000 km/s**

Via Láctea:

* 200 bilhões de Estrelas! - *Ainda existem?*
* 100.000 anos-luz de diâmetro.
* Sol encontra-se a 30.000 anos-luz do centro.
* Período de translação do Sol: 200 milhões de anos.

A Grande Nuvem de Magalhães

- É a galáxia mais próxima da Terra (160 mil anos-luz)
- É pequena, comparada com a Via Láctea (1/10 da massa)