Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

5ª aula – 13/mar/2007

- Vimos na aula passada, das ***Equações de Maxwell***:

***i)* Conservação de Energia**

$$\boxed{-\oint_S \underbrace{\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)}_{\vec{S}\,(\text{Poynting})}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \underbrace{\frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right]}_{\text{Densidade de Energia EM}} dV + \int_V \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{J}}_{\text{Efeito Joule}}\,dV}$$

***ii)* Propagação de Ondas Eletromagnéticas** (meios lineares, $\rho = 0$):

- Equação de onda para o campo elétrico: $\boxed{\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0}$ (*)

- Solução: $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}}$; sendo que $\boxed{\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) + \varepsilon\mu\omega^2\vec{E}(\vec{r}) + i\omega\sigma\mu\vec{E}(\vec{r}) = 0}$

- No *espaço vazio* (*vácuo*), temos que $\sigma = 0,\ \varepsilon = \varepsilon_0,\ \mu = \mu_0 \Rightarrow$ em *1D* (*eixo z*), da eq. **(*)**:

$$\frac{\partial^2\vec{E}(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(z) = 0\ ;\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

$\Rightarrow$ solução (*onda plana*): $\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-i(Kz\mp\omega t)}}$

- Parte real: $\boxed{\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0\cos(Kz\mp\omega t)}$; sendo $K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{n\,\omega}{c} \equiv$ (número de onda).

Onda caminhando para a "direita" ou para a "esquerda".

- Para dielétricos, continua sendo verdade $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$, mas agora $\boldsymbol{c \to v}$.

- Assim, $K = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{v}f \Rightarrow$ usando $n = \dfrac{c}{v} \Rightarrow v = \dfrac{c}{n}$; mas $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_R\,\varepsilon_0\,\mu_0}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_R}}$

$$\therefore\ n = \sqrt{\varepsilon_R}\ \text{ e como } K = \frac{2\pi f}{v} = \omega\frac{n}{c} \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{\varepsilon_R}\,\frac{\omega}{c}}$$

cte. dielétrica: $\varepsilon_R = \varepsilon/\varepsilon_0$

- No semestre passado, quando estudamos os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estáticos, vimos que eles podiam ser calculados através dos **potenciais escalar** e **vetor**:

$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi}$ (1) ; $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$ (2) (situação estática)

- Sendo que: $\begin{cases} \varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV\,' \\ \vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV\,' \end{cases} \Rightarrow \quad resolvendo: \begin{cases} \boxed{\nabla^2\varphi = \dfrac{-\rho}{\varepsilon_0}} \\ \boxed{\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}} \end{cases}$.
- Neste semestre, como estaremos lidando com campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ *variando no tempo*, os resultados acima continuariam válidos?
- Por exemplo: a equação (2), $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, satisfaz diretamente a segunda equação de Maxwell: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$, sempre! (div do rot é sempre zero!!)
- Podemos então, a princípio, supor que $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ vale mesmo para campos variando no tempo.
- No entanto, a equação (1), $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, é inconsistente com a 3ª equação de Maxwell!
- Isto porque $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$ sempre, enquanto que a Lei de Faraday estabelece:

(rot do grad é sempre zero!!)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;!!$$

- Para resolver esta inconsistência, podemos pensar em introduzir um *termo extra* (desconhecido) à equação (1):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi + \vec{N} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right)}_{=0} + \vec{\nabla}\times\vec{N} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- Usando (2): $\vec{\nabla}\times\vec{N} = -\dfrac{\partial\overbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}^{=\vec{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$ (solução mais simples) $\Rightarrow \boxed{\vec{N} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \tag{3}$$

- Temos agora que verificar se as equações (2) e (3) também satisfazem as duas equações de Maxwell restantes.
- Substituindo a equação (3) na 1ª equação de Maxwell $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon\right)$:

$$\boxed{-\nabla^2\varphi - \frac{\partial\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}}. \tag{4}$$

- Por outro lado, substituindo (2) e (3) na Lei de Ampére: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \mu\vec{J} - \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\varphi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{substituindo o rotacional do rotacional:}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} - \mu\varepsilon\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\nabla^2\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \mu\vec{J}} \tag{5}$$

- Ou seja, para que haja consistência, as equações (4) e (5) (que só dependem de φ e $\vec{A}$) precisam ser simultaneamente satisfeitas.

- Obtemos então φ e $\vec{A}$ e, depois, $\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{cases}$ $\rightarrow$ duas equações com duas incógnitas

- Mas, antes de resolvê-las, talvez fosse interessante tentar simplificá-las um pouco.

- Além disso, como depois veremos, não existe apenas um único par φ e $\vec{A}$ que satisfaça (2) e (3) para um determinado problema, com $\vec{E}, \vec{B}$ específicos.

- Assim, poderemos escolher um par $\varphi', \vec{A}'$ que seja o mais conveniente para um dado problema, de forma que (4) e (5) sejam satisfeitas e (2) e (3) continuem válidas!

- Para ilustrar isso suponha, por exemplo, dois conjuntos de potenciais $(\varphi, \vec{A})$ e $(\varphi', \vec{A}')$ que correspondam aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, através de (2) e (3). Esta equivalência é a minha hipótese. Quero agora descobrir como $\varphi', \vec{A}'$ diferem de $\varphi, \vec{A}$, nestas condições.

- Vamos supor, por exemplo, que estes conjuntos de potenciais difiram um do outro por parâmetros $\vec{\alpha}$ e β inicialmente desconhecidos, da forma:

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\varphi' = \varphi + \beta},$$

- E vamos impor que ambos corresponderão aos mesmos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Começo então fazendo:

$$i)\ \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \\ \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{B} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla}\times\vec{A}}} = \vec{\nabla}\times\underbrace{\left(\vec{A}'\right)}_{=\vec{A}+\vec{\alpha}} = \underline{\underline{\vec{\nabla}\times\vec{A}}} + \vec{\nabla}\times\vec{\alpha} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{\alpha} = 0} \qquad (6)$$

(1ª condição)

$\therefore$ $\vec{\alpha}$ pode ser escrito como sendo o gradiente de um escalar (λ): $\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\lambda}$ (7)

$$ii)\ \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi' - \dfrac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow -\cancel{\vec{\nabla}\varphi} - \cancel{\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} = -\cancel{\vec{\nabla}\varphi} - \vec{\nabla}\beta - \cancel{\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} - \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\beta + \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow \text{usando (7)} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \underline{\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t} = cte} \quad \text{(2ª condição)}$$

- A escolha mais simples, que satisfaz esta última igualdade, é considerar a cte = 0, de forma que:

$$\boxed{\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t}} \qquad (8)$$

- Ou seja: $\boxed{\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} \end{cases}}$ $\therefore$ a qualquer função escalar λ, pode-se acrescentar $\vec{\nabla}\lambda$ em $\vec{A}$, e ao mesmo tempo subtrair $\partial\lambda/\partial t$ de φ, que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não se alteram!

- As transformações desse tipo em φ, $\vec{A}$ são chamadas *Transformações de "Gauge"* ou *Transformações de Calibre*.

- Há vários "calibres" utilizados na literatura, que serão mais convenientes de se aplicar, dependendo do problema que se quer resolver.

- Porém, duas transformações de calibre são mais freqüentemente utilizadas: a de Coulomb e de Lorentz.

- A forma do *gauge* (calibre) de Coulomb é: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$. Substituindo na equação (4):

  i) $\boxed{\nabla^2\varphi = \dfrac{-\rho}{\varepsilon}}$ ≡ *Equação de Poisson*, que já vimos no semestre passado.

- Note, porém, que só o cálculo de φ não mais nos fornece $\vec{E}$: é necessário que também se obtenha $\vec{A}$, já que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Substituindo $\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$ nas equação (5):

  ii) $-\nabla^2\vec{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \underbrace{\mu\vec{J} - \varepsilon\mu\vec{\nabla}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{\left(\text{independe de } \vec{A}\right)}$ (Equação de onda não-homogênea para $\vec{A}$)

- O *gauge de Lorentz* é mais interessante para o estudo das ondas EM: $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\varepsilon\mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}$, de forma que, substituindo, as equações (4) e (5) ficam:

$$\begin{cases} -\nabla^2\varphi + \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} & (9) \\ -\nabla^2\vec{A} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{J} & (10) \end{cases} \quad \text{(equações desacopladas)}$$

- Ou seja, escolhendo o gauge de Lorentz tanto $\vec{A}$ quanto φ obedecem ao mesmo tipo de equação diferencial, não homogênea.

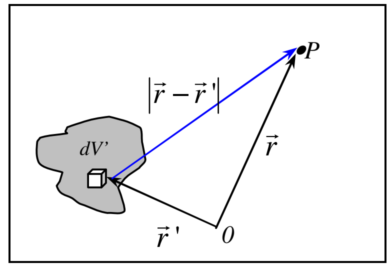
- Em termos do d'Alembertiano ($\Box^2 = \nabla^2 - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$): $\begin{cases} \Box^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \Box^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \end{cases}$ ← *Pode-se interpretar como sendo a equação de Poisson quadridimensional.*

- Basicamente, as soluções de (9) e (10) são obtidas resolvendo a equação homogênea (solução geral) e somando-a com uma solução particular da equação não-homogênea.

- Note que, no limite estático: $\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \end{cases}$, cujas soluções já foram obtidas em Eletro I:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dV'} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dV'} \;;$$

- Lembrando que $|\vec{r}-\vec{r}\,'| \equiv$ distância da fonte ao ponto P onde o potencial é calculado.



- Para situações não estáticas, vamos mostrar agora que os potenciais mantêm as formas acima (ver Reitz-Milford 339-341). Só que agora surge um problema!

- Quando se vai calcular os potenciais em *P*, em um dado instante *t*, qual é a configuração das cargas e correntes que se deve considerar no mesmo instante *t*?

- Se considerarmos que o "sinal" propaga-se com velocidade *c*, então é razoável utilizar as configurações de fontes em um *instante anterior* t_r:

$$\boxed{t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}} \equiv \textit{tempo retardado}.$$

- Assim: $$\boxed{\begin{cases} \varphi(\vec{r},t_r\,') = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}(\vec{r},t_r\,') = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases}} \equiv \textit{potenciais retardados}.$$

- Note que para pontos *P* próximos das fontes, $\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \to 0$, $t_r \to t$, como esperaríamos.

- Nossa tarefa agora é mostrar que os potenciais retardados são, de fato, soluções para as "equações de onda dos potenciais" (equações (9) e (10)).

- Faremos isto na próxima aula.