Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

6ª aula – 16/mar/2007

- Vimos, *para dielétricos*:

$$\begin{cases} i)\ \text{Índice de refração: } \boxed{n=\sqrt{\varepsilon_R}} \\ ii)\ \text{Número de onda: } \boxed{K=\sqrt{\varepsilon_R}\,\dfrac{\omega}{c}} \end{cases} \quad ; \quad \boxed{\varepsilon_R=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\ \text{(cte. dielétrica)}$$

- Cálculo de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ a partir dos potenciais φ e $\vec{A}$.

$$\boxed{\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \qquad (2)$$

- Desta forma, para as equações de Maxwell serem satisfeitas:

$$\boxed{-\nabla^2\varphi-\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)}{\partial t}=\frac{\rho}{\varepsilon}} \qquad (3)$$

$$\boxed{-\nabla^2\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\mu\vec{J}} \qquad (4)$$

- Como φ e $\vec{A}$ não definem univocamente $\vec{E}$ e $\vec{B}$, podemos então escolher "calibres" (*gauges*) adequados.

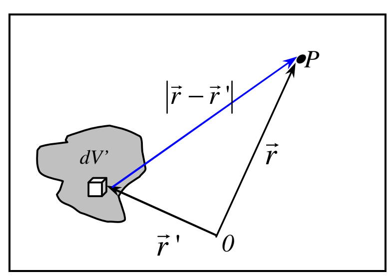
- Para o estudo de ondas eletromagnéticas, o ***gauge de Lorentz*** é mais indicado:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \Rightarrow \begin{cases} -\nabla^2\varphi+\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\dfrac{\rho}{\varepsilon} \\ -\nabla^2\vec{A}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\mu\vec{J} \end{cases}$$

e as eqs. para φ e $\vec{A}$ (3,4) ficam desacopladas.

- Outro caminho para se obter φ e $\vec{A}$:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}(\vec{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases} \equiv \textit{Potenciais retardados}$$



- Tempo retardado $\boxed{t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}}$ (supondo o ponto P situado no vácuo).
- Temos agora que mostrar que os potenciais retardados são, de fato, soluções para as equações de onda (satisfazendo o gauge de Lorentz e as equações de Maxwell).
- Vamos iniciar calculando o gradiente da equação do potencial escalar:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left[\frac{1}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{\equiv R}}\vec{\nabla}\rho + \rho\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}_{\equiv R}}\right)\right] dV' \tag{5}$$

- Sendo que $\vec{\nabla}\rho = \vec{\nabla}\rho(\vec{r}\,', t_r) = \vec{\nabla}\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{c}\right)$; $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$

Aplicado às coordenadas **sem linha**. (note que $t_r \, \alpha \, R$; $R \, \alpha \, r'$ $\rightarrow$ $t_r \, \alpha \, r'$)

- Assim, temos que: $\vec{\nabla}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\rho = \dot{\rho}\left(\frac{\partial t_r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial t_r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial t_r}{\partial z}\vec{k}\right) = \dot{\rho}\vec{\nabla}t_r \,; \quad \boxed{\dot{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial t_r}}$$

- Mas, $\vec{\nabla}t_r = \vec{\nabla}\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}R = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

- Sendo que $\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\underbrace{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}_{=R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \cdot \cancel{2}\left((x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}\right)$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \frac{\left((x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}\right)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{\vec{R}}{R} = \hat{R}\,.$$

- Seguindo o mesmo procedimento (veja apêndice 1): $\boxed{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{R}}{R^2}}$.

- Então, a eq.(5) pode ser escrita:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left[-\frac{1}{c}\frac{\dot{\rho}}{R}\hat{R} - \rho\frac{\hat{R}}{R^2}\right] dV'\,.$$

- Calculando agora o divergente desta última equação, lembrando que $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = \nabla^2\varphi$ e usando que $\vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\vec{F}\right) = \varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\cdot\vec{F}$:

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\left\{-\frac{1}{c}\left[\dot\rho\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\frac{\hat R}{R}\right)}_{i}+\frac{\hat R}{R}\cdot\underbrace{\vec\nabla\dot\rho}_{ii}\right]-\left[\rho\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\frac{\hat R}{R^2}\right)}_{iii}+\frac{\hat R}{R^2}\cdot\underbrace{\vec\nabla\rho}_{iv}\right]\right\}dV' \qquad (6)$$

- Sendo que <u>os termos assinalados</u>, do que já vimos antes:

i) $\vec\nabla\cdot\frac{\hat R}{R}=\frac{1}{R^2}$ (ver apêndice 2)

ii) $\vec\nabla\dot\rho=\ddot\rho\vec\nabla t_r=\ddot\rho\left(-\frac{1}{c}\vec\nabla R\right)=-\frac{1}{c}\ddot\rho\hat R$; $\boxed{\ddot\rho=\frac{\partial^2\rho}{\partial t_r^2}}$

iii) $\vec\nabla\cdot\frac{\hat R}{R^2}=4\pi\delta^3(\vec R)$ *Delta de Dirac:* $\begin{cases}\int f(\vec r)\,\delta^3(\vec r-\vec r_0)\,dV=f(\vec r_0)\\ \int\delta^3(\vec r)dV=1\end{cases}$; em todo o espaço.

(já discutido no semestre passado, em eletromag. I)

iv) $\vec\nabla\rho=-\frac{1}{c}\dot\rho\vec\nabla R=-\frac{1}{c}\dot\rho\hat R$

- Então a equação (6) fica:

$(\hat R\cdot\hat R=1)$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\cancel{-\frac{1}{c}\int\frac{\dot\rho}{R^2}dV'}-\frac{1}{c}\int\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\hat R}{R}\cdot\ddot\rho\hat R\,dV'-4\pi\int\rho\delta^3(\vec R)dV'\cancel{-\int\frac{\hat R}{R^2}\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\dot\rho\hat R dV}\right\}$$

- Assim:

$(substituo\ \ \vec r\,'\to\vec r)$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{c^2R}\frac{\partial^2\rho}{\partial t_r^2}dV'-\frac{1}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\cancel{4\pi}\int\rho\left(\vec r\,',t-\frac{|\vec r-\vec r\,'|}{c}\right)\delta^3(\vec r-\vec r\,')dV' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \nabla^2\varphi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec r\,',t_r)}{|\vec r-\vec r\,'|}dV'\right)}_{=\varphi(\vec r,t)}-\frac{\rho(\vec r,t)}{\varepsilon_0}.$$

- Ou seja:

$$\boxed{\nabla^2\varphi(\vec r,t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_r^2}\varphi(\vec r,t)-\frac{\rho(\vec r,t)}{\varepsilon_0}}\ \equiv \textit{Equação diferencial original (desacoplada)}$$

Ponto P encontra-se no vácuo

Note que foi usado $\frac{\partial}{\partial t_r}=\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial t_r}}_{=1}$

- O mesmo procedimento pode ser utilizado para mostrar que $\vec A$ <u>também</u> satisfaz a equação diferencial correspondente (posso trabalhar com A_x, A_y, A_z se for preciso).

- Um fato interessante: se considerarmos os *potenciais avançados*:

$$\begin{cases} \varphi_a(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}_a(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_a)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases} \quad ; \quad \text{sendo que } t_a = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}.$$

- Veremos que eles também satisfazem as equações de Maxwell (gauge de Lorentz); mas são desconsiderados porque, a princípio, violam o "princípio da causalidade" (todo efeito deve ter uma causa).

Apêndices

1) $$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{\cancel{2}}\underbrace{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{-\frac{3}{2}}}_{=R^{-3}=|\vec{R}|^{-3}}.\,\cancel{2}(x-x')+0+0\right\}\vec{i} - R^{-3}(y-y')\vec{j} - R^{-3}(z-z')\vec{k} =$$

$$= -\frac{1}{R^3}\left[(x-x')\vec{i}+(y-y')\vec{j}+(z-z')\vec{k}\right] = -\frac{1}{R^3}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^2}$$

2) $$\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{R}}{R} = \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{R}}{R^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

mas, a componente x, por exemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + x\left(-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.\,2x\right) = \frac{1}{R^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

então, finalmente:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{R}}{R} = \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{R}}{R^2} = \frac{3}{R^2} - 2\frac{\cancel{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{\cancel{2}}} = \frac{3}{R^2} - \frac{2}{R^2} = \frac{1}{R^2}$$