Eletromagnetismo II

7ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Vimos, na última aula...

- Potenciais retardados:

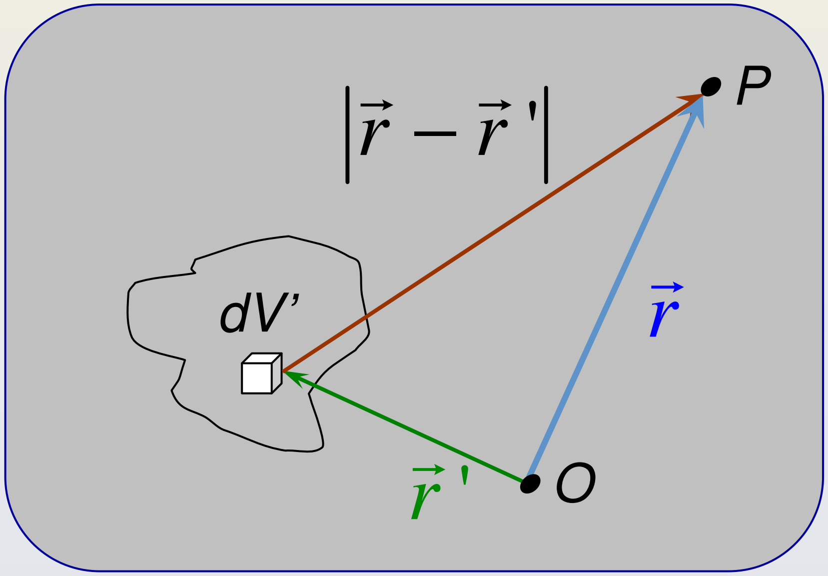
$$\begin{cases} \varphi_r(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}_r(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases} \quad ; \quad \boxed{t_r = t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}}$$

que permitem, de fato, o cálculo de $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

- Para isso <u>mostramos</u>:

$$\left\{\begin{array}{l}
\boxed{\vec{\nabla}\rho = \dot{\rho}\,\vec{\nabla}t_r}\ ;\ \rho = \rho\left(\vec{r}\,',t_r\right)\ \ e\ \ \dot{\rho} = \dfrac{\partial\rho}{\partial t_r} \\[2ex]
\boxed{\vec{\nabla}t_r = -\dfrac{1}{c}\vec{\nabla}R} = -\dfrac{1}{c}\vec{\nabla}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| \\[2ex]
\boxed{\vec{\nabla}\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| = \hat{R} = \dfrac{\vec{R}}{R}} \\[2ex]
\boxed{\vec{\nabla}\left(\dfrac{1}{R}\right) = -\dfrac{\hat{R}}{R^2}}
\end{array}\right.$$



- Vamos agora estudar as ondas EM propagando-se em meios materiais lineares e homogêneos, supostos infinitos.
- Primeiro investigaremos como se comportam as *Ondas Planas Monocromáticas* propagando-se em *meios NÃO condutores*.
- Como já vimos: $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}}$ *≡ Solução de onda plana*
- Sendo a *parte espacial* de $\vec{E}(\vec{r},t)$, solução da equação: $\boxed{\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\varepsilon\mu\,\vec{E}(\vec{r})+i\omega\sigma\mu\,\vec{E}(\vec{r})=0}$
- Note que as 2 eqs. possuem termos imaginários!

- Iremos então permitir que as *componentes espaciais* de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também tenham caráter complexo: $\begin{cases} \vec{E} \rightarrow \tilde{\vec{E}} \\ \vec{B} \rightarrow \tilde{\vec{B}} \end{cases}$ (*isto será particularmente útil no caso de meios condutores*)

- Também permitiremos que a onda plana tenha direção de propagação arbitrária (definida pelo *versor* $\hat{u}$).

- Então: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 \, e^{-i(\omega t - K z)} \quad \rightarrow \quad \tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 \, e^{+i\left(K \hat{u} \cdot \vec{r} - \omega t\right)}$

- Sendo que: $K \hat{u} = \vec{K} \equiv$ Vetor de Onda (ainda $\left|\vec{\mathrm{K}}\right| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$)

(no caso de condutores: $\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}}$)

- Voltemos ao problema de propagação em meios não condutores, supondo: $\vec{J} = 0$ e $\rho = 0$

- Então, as eqs de Maxwell ficam:

$\left(\text{sendo } \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \text{ e } \vec{B} = \mu\vec{H}\right)$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = -\partial\vec{D}/\partial t \end{cases}$$

- Note que, <u>derivando no tempo</u> a função de onda:

$$\left(\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)$$

$$\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t} = \left(-i\omega\right)\left(\underbrace{\tilde{\vec{E}}_0\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}}_{\equiv\vec{E}}\right)$$

$\Rightarrow$ podemos definir o ***operador***:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega}$$

- Da mesma forma, derivando em r: $\vec{\nabla} \to i\vec{K}$

(ver ex. da lista)

- Assim, as eqs. de Maxwell ficam:

$$\begin{cases} \cancel{i}\vec{K} \cdot \tilde{\vec{D}}_0 = 0 \\ \cancel{i}\vec{K} \cdot \tilde{\vec{B}}_0 = 0 \\ \cancel{i}\vec{K} \times \tilde{\vec{E}}_0 = +\cancel{i}\omega \tilde{\vec{B}}_0 \\ \cancel{i}\vec{K} \times \tilde{\vec{H}}_0 = -\cancel{i}\omega \tilde{\vec{D}}_0 \end{cases}$$

São eqs. que envolvem as ***Amplitudes*** dos campos elétrico e magnético.

- Note: as mesmas relações são obtidas para $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t)$ e $\tilde{\vec{B}}(\vec{r},t)$ ao multiplicarmos as eqs. por $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

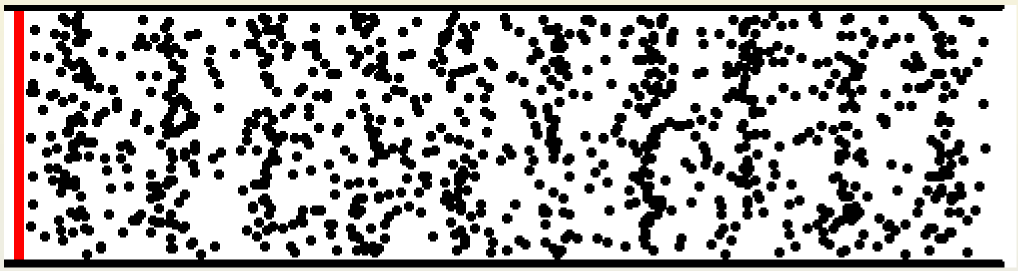
- Lembrando que: $\boxed{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_R}$ $(e\ \mu \simeq \mu_0$; a não ser para os ferromagnéticos)

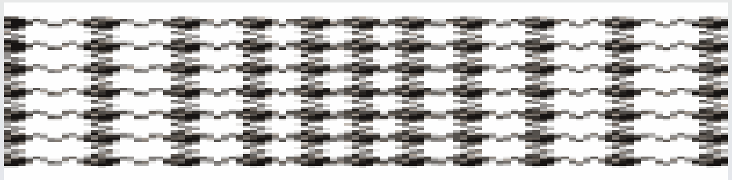
$$\begin{cases} (1)\ \vec{K}\cdot\tilde{\vec{E}}_0 = 0 \\ (2)\ \vec{K}\cdot\tilde{\vec{B}}_0 = 0 \\ (3)\ \vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \omega\tilde{\vec{B}}_0 \\ (4)\ \underline{\underline{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0}} = -\omega\mu_0\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_R}_{\varepsilon}\tilde{\vec{E}}_0 = -\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\underline{\varepsilon_R\tilde{\vec{E}}_0}} \quad (5) \end{cases}$$

- Da 1ª e 2ª eqs.: $\tilde{\vec{E}}_0$ e $\tilde{\vec{B}}_0$ são $\perp$ a $\vec{K} \Rightarrow$ ondas EM são ***transversais***

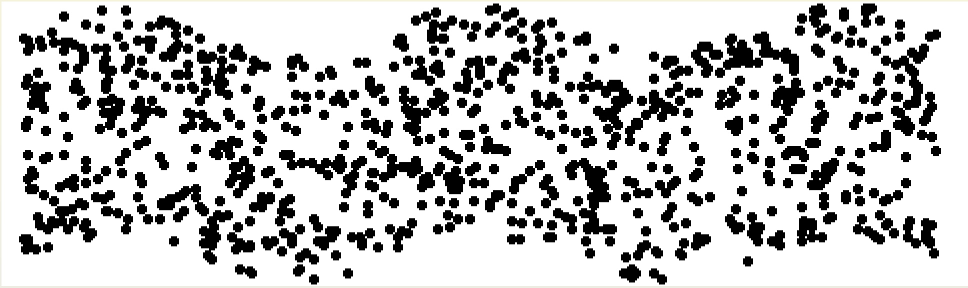
- Da 3ª eq.: $\tilde{\vec{B}}_0 \perp \tilde{\vec{E}}_0$ e $\perp \vec{K}$ e, da 1ª eq. $\tilde{\vec{E}}_0 \perp \vec{K} \Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}_0$, $\tilde{\vec{B}}_0$ e $\vec{K}$ são ortogonais. (p/ $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$!)

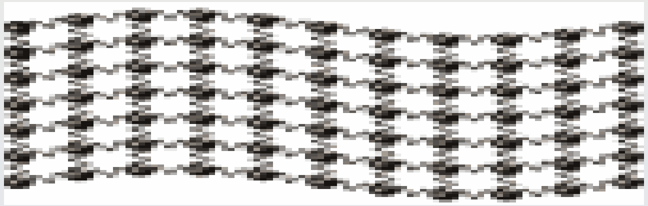
Onda Longitudinal



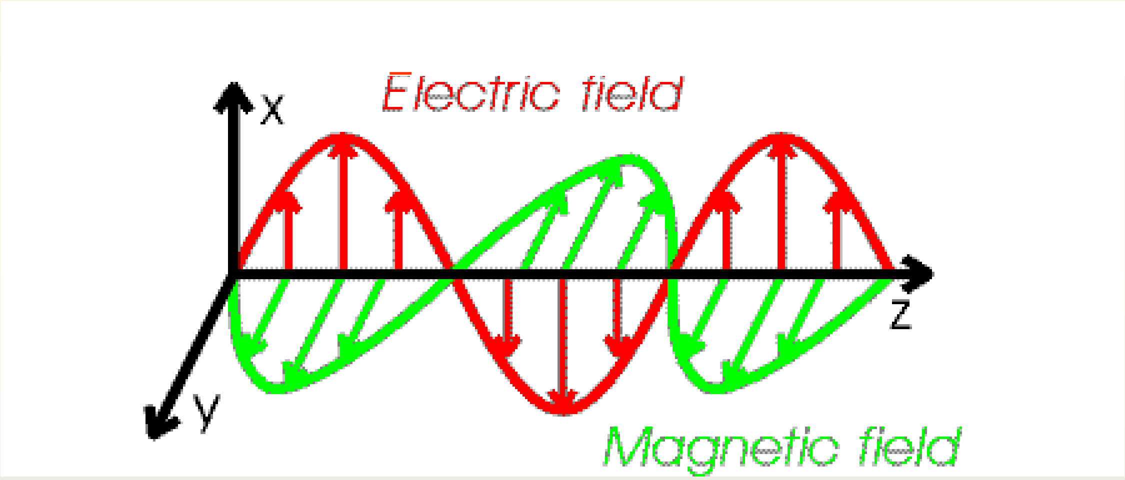


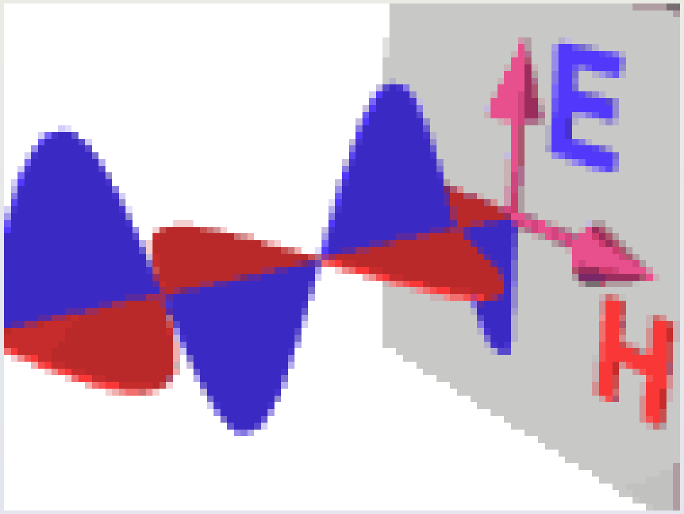
Onda Transversal





Quanto às Ondas Eletromagnéticas:





- Agora, da 3ª eq. $\left(\vec{K} \times \tilde{\vec{E}}_0 = \omega \tilde{\vec{B}}_0\right)$: $\left|\tilde{\vec{B}}_0\right| = \dfrac{1}{\omega} K \, \tilde{E}_0 \underbrace{\sin 90^0}_{\substack{1 \\ \left(\tilde{\vec{E}}_0 \perp \vec{K}\right)}}$

- Ou seja, em módulo: $\tilde{B}_0 = \dfrac{1}{\cancel{\omega}} \dfrac{n \cancel{\omega}}{c} \tilde{E}_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{E}_0 = \frac{c}{n} \tilde{B}_0}$$

- Sempre lembrando: $\boxed{\mathrm{n} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{K} = \dfrac{\omega}{\mathrm{c}} \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}}$

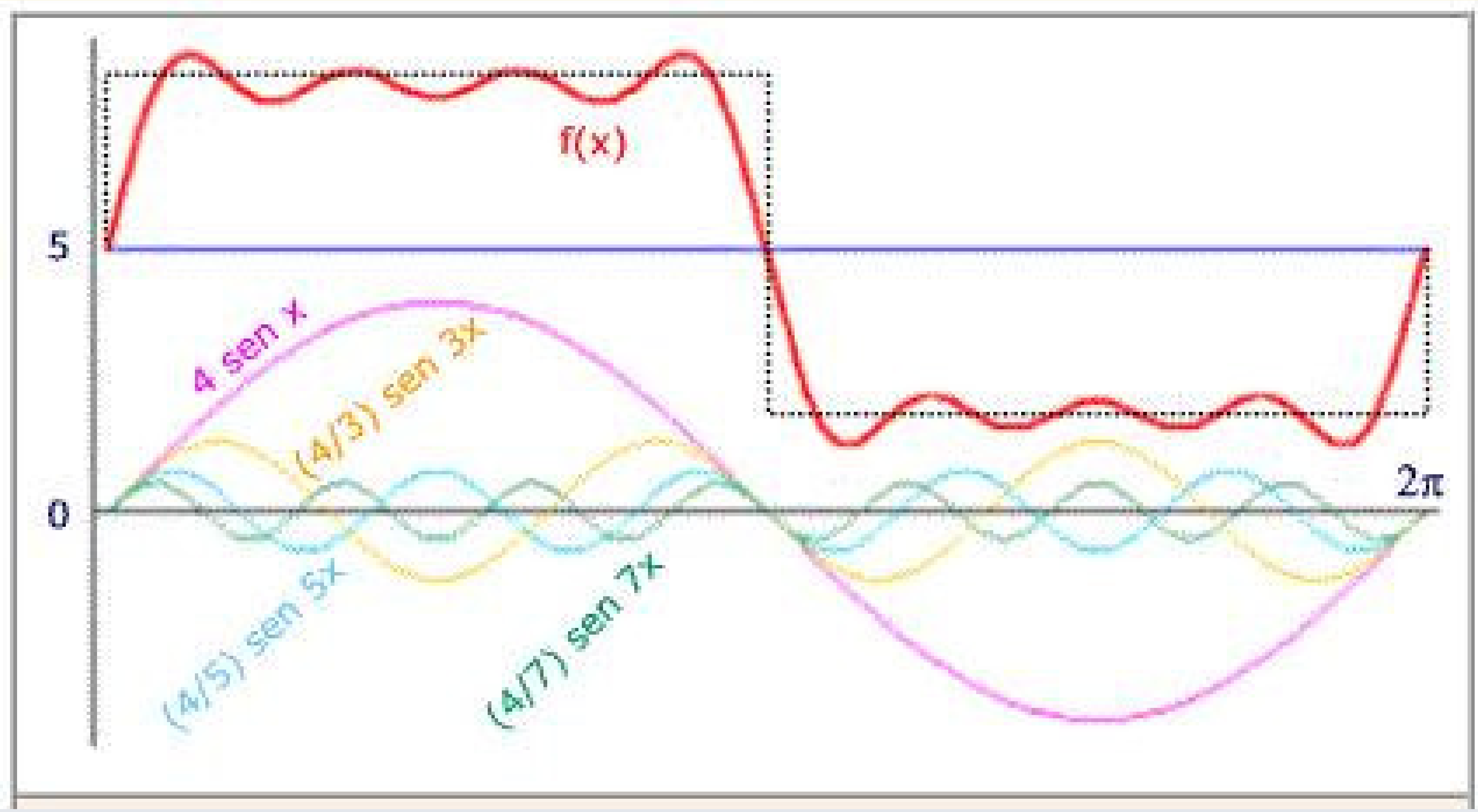
- A solução onda-plana pode ter um *caráter mais abrangente* pois, sendo função linear, uma combinação linear de soluções (*superposição de ondas planas*) também será solução das equações de Maxwell.

- Ou seja, podemos encontrar *outras soluções possíveis* simplesmente fazendo a soma de várias ondas planas:

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \sum_{j} \tilde{\vec{E}}_{0\,j}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{\mathrm{K}}_{j}\cdot\vec{r}-\omega_{j}t\right)}}$$

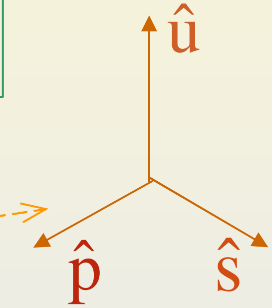
- E o resultado final pode corresponder a uma solução periódica, não necessariamente senoidal.

$$f(x) = 5 + 4 \text{ sen } x + (4/3) \text{ sen } 3x + (4/5) \text{ sen } 5x + (4/7) \text{ sen } 7x + \ldots$$



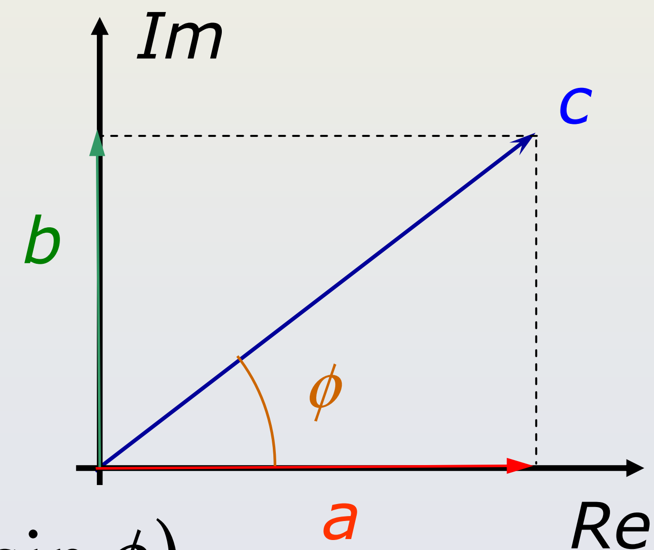
Polarização

- Dada uma direção de propagação da onda, $\hat{u}$, pode-se escrever as amplitudes dos campos em função das coordenadas $\hat{p}, \hat{s}$: $\boxed{\vec{\tilde{E}}_0 = \tilde{E}_{0p}\hat{p} + \tilde{E}_{0s}\hat{s}}$



- Ou seja, $(\hat{p}, \hat{s}, \hat{u}) \equiv$ uma base ortogonal.

- Na forma polar: $\begin{cases} \tilde{E}_{0p} = E_{0p}\, e^{i\phi_p} \\ \tilde{E}_{0s} = E_{0s}\, e^{i\phi_s} \end{cases}$



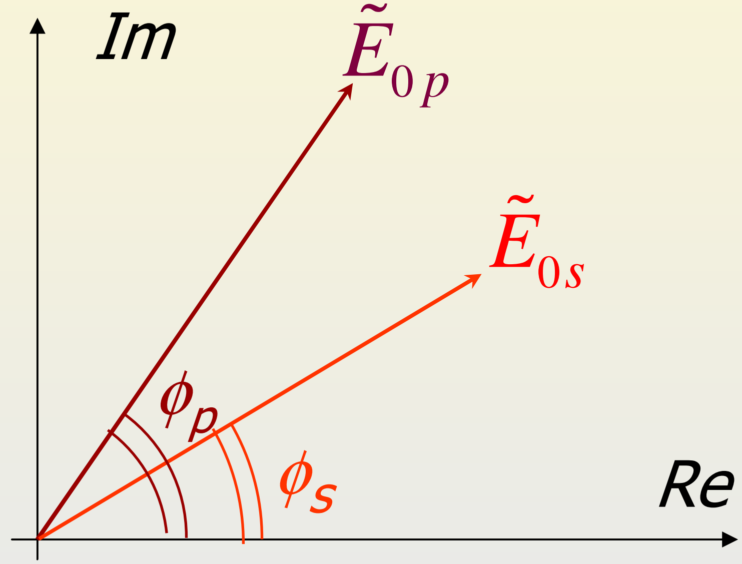
já que qq. nº complexo:

$$c = a + ib = |c|e^{i\phi} = |c|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$$

- De forma que:

$$\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{0p}\,\hat{p} + \tilde{E}_{0s}\,\hat{s} = E_{0p}\,e^{i\phi_p}\,\hat{p} + E_{0s}\,e^{i\phi_s}\,\hat{s}$$

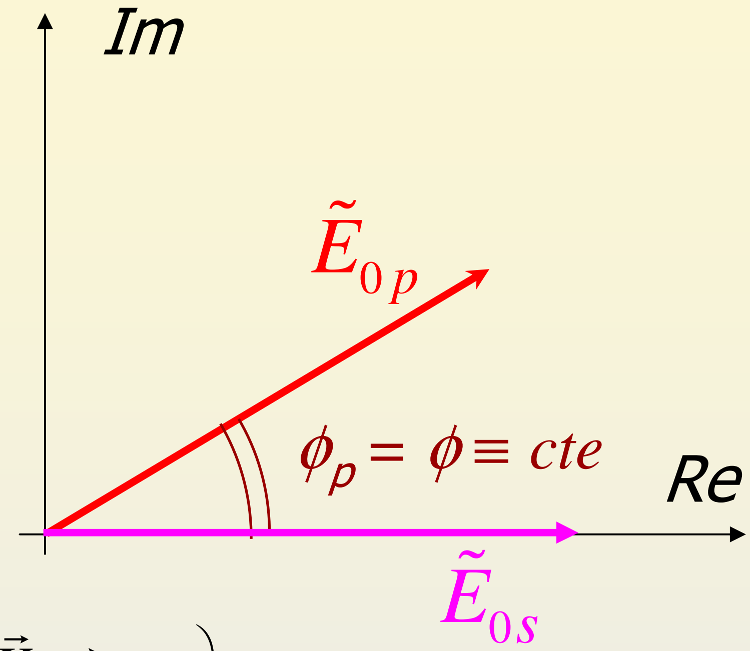
- Sendo $\phi = \phi_p - \phi_s \equiv$
  $\equiv$ *diferença de fase*
  (*entre as* *componentes* *da amplitude* *de* $\tilde{\vec{E}}_0$)



- E supondo, por ex. $\phi_s = 0$ em $t = 0$ (estou escolhendo um início em um certo instante t).

- Então: $\boxed{\tilde{\vec{E}}_0 = E_{0p}\,e^{i\phi}\,\hat{p} + E_{0s}\,\hat{s}}$

- Ou seja: $\left(\tilde{\vec{E}}_0 = E_{0p}\, e^{i\phi}\, \hat{p} + E_{0s}\, \hat{s}\right)$



- Substituindo em: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}$

- Então: $\boxed{\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_{0p}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)}\hat{p} + E_{0s}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}\hat{s}}$

$; \quad \vec{K} = K\hat{u}$

- Tomando a *Parte Real*:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\hat{s}$$

(6)

- Quanto ao campo magnético: $\left(\vec{K}\times\vec{E} = \omega\vec{B}\right)$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{K}{\omega}\left[E_{0p}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)\hat{s} - E_{0s}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\hat{p}\right]$$

$$\left(\frac{n}{c}\right)$$

- Da eq. (6): as 2 componentes de $\vec{E}$ podem estar *oscilando fora de fase* (definida pelo valor de ϕ).

- Ou seja, as componentes atingem seus valores de máximo em instantes diferentes.

- Para se entender o processo, supor onda propagando-se ao longo do eixo z: $\vec{K}\cdot\vec{r} = K\,z$

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = E_{0p}\cos\left(Kz-\omega t+\phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(Kz-\omega t\right)\hat{s}} \quad (7)$$

- Medindo (no plano z = 0) os valores do campo nos eixos definidos por $\hat{p}\ e\ \hat{s}$ $(\hat{p}\ e\ \hat{s} \perp \hat{z})$, temos então:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(z=0,t) = E_{0p}\cos\left(-\omega t+\phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(-\omega t\right)\hat{s}$$

{ cos (-θ) = cos (θ) }

$$= E_{0p}\cos\left(\omega t-\phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\omega t\right)\hat{s}$$

Valores de máximo

1º Caso: $\phi = 0$

$$\left(\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\omega t - \phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\omega t\right)\hat{s}\right)$$

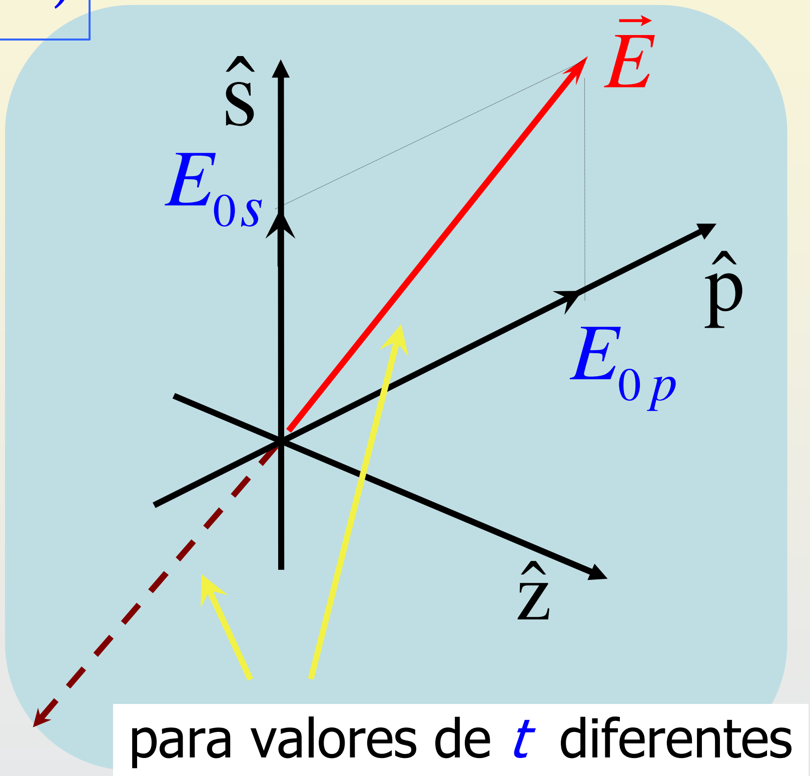
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \left(E_{0p}\hat{p} + E_{0s}\hat{s}\right)\cos\left(\omega t\right)}$$

ctes!

sendo que, em *cada intante t* :

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2}$$

e o valor máximo de $\left|\vec{E}\right|$ obtem-se quando $\cos\left(\omega t\right) = 1$



- Ou seja, $\vec{E}$ oscila em uma única direção $\rightarrow$

$\rightarrow$ ***Onda Linearmente Polarizada***

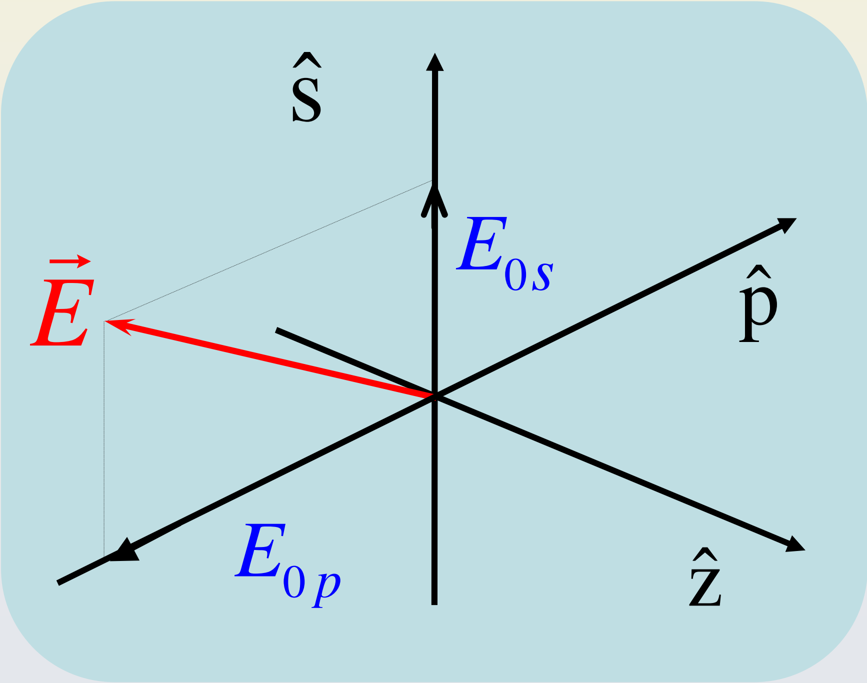
2º Caso: $\phi = \pi$

$$\left(\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\omega t - \phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\omega t\right)\hat{s}\right)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\omega t - \pi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\omega t\right)\hat{s}$$
$$= \left(-E_{0p}\hat{p} + E_{0s}\hat{s}\right)\cos\left(\omega t\right)$$

ctes!

- Novamente, a onda é *Linearmente Polarizada*

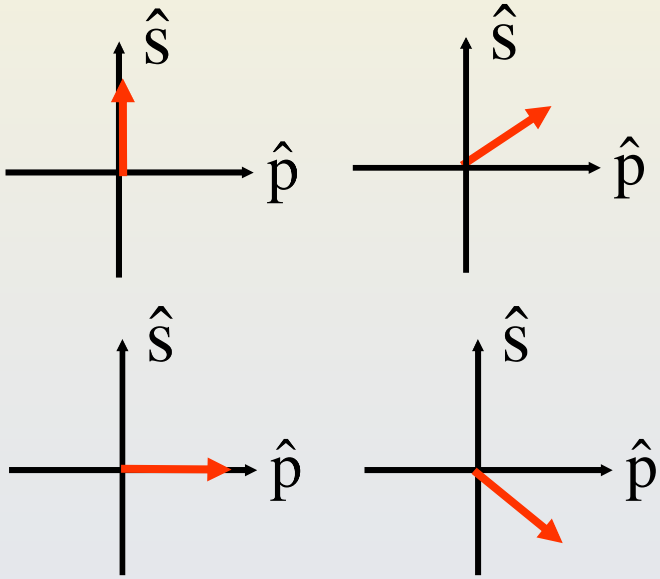


3º Caso: $\phi = \pi/2$

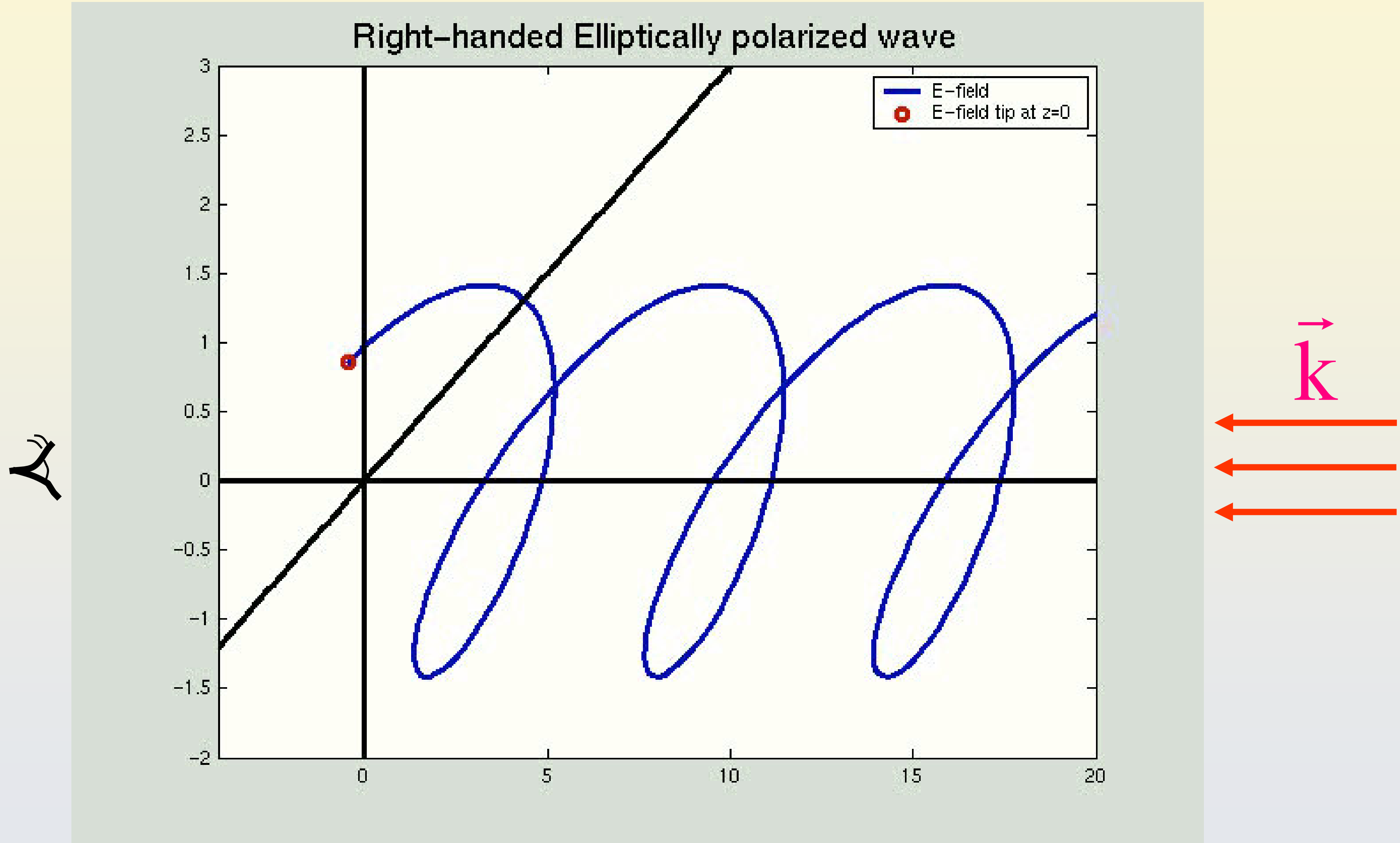
$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\hat{p} + E_{0s}\cos(\omega t)\hat{s}$$

$$= E_{0p}\sin(\omega t)\,\hat{p} + E_{0s}\cos(\omega t)\,\hat{s}$$

ωt	$\vec{E}$
0	$E_{0s}\,\hat{s}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/_{2}\, E_{0p}\hat{p} + \sqrt{2}/_{2}\, E_{0s}\hat{s}$
$\pi/2$	$+E_{0p}\,\hat{p}$
$\vdots$	$\vdots$



Polarização *Circular* à *DIREITA*.



Right-handed Elliptically polarized wave
E−field
E−field tip at z=0
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
0
5
10
15
20
$\vec{k}$

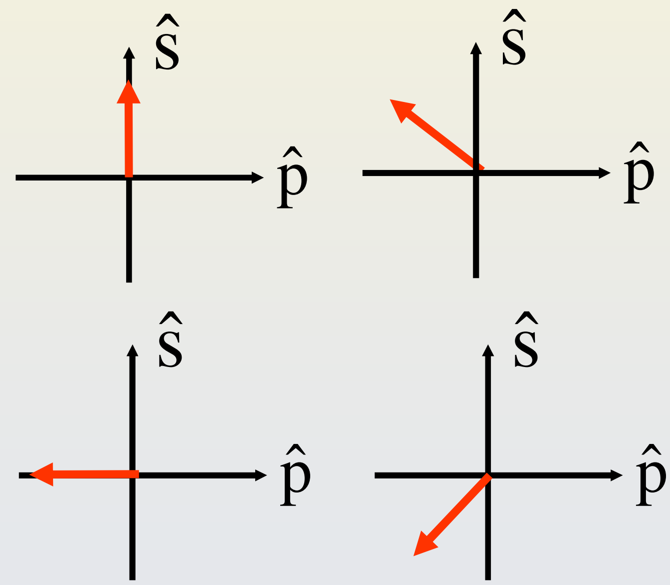
4º Caso: ϕ = - π/2

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{p} + E_{0s}\cos(\omega t)\,\hat{s}$$

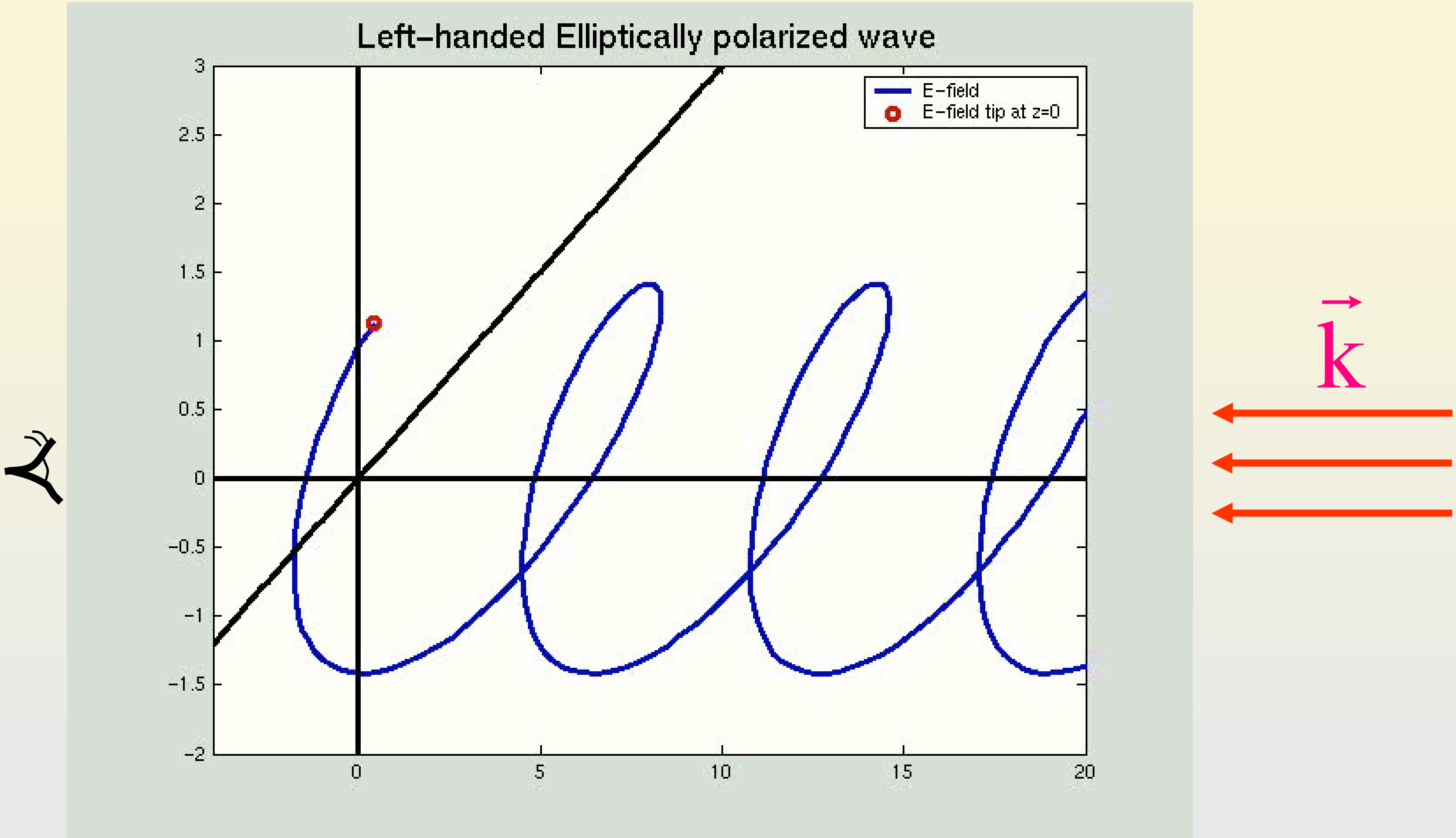
$$= E_{0p}(-)\sin(\omega t)\,\hat{p} + E_{0s}\cos(\omega t)\,\hat{s}$$

Onda circularmente (elipticamente) polarizada *à ESQUERDA*.

ωt	$\vec{E}$
0	$E_{0s}\,\hat{s}$
$\pi/4$	$-\sqrt{2}/2\; E_{0p}\hat{p} + \sqrt{2}/2\; E_{0s}\hat{s}$
$\pi/2$	$-E_{0p}\,\hat{p}$
$\vdots$	$\vdots$



(A polarização é <u>circular</u> quando $E_{0p} = E_{0s}$ e $\phi = \pm\pi/2$)



Para outros valores de ϕ a polarização será elíptica, mas de forma que eixos maior e menor da elipse formam ângulos com eixos $\hat{s}$ e $\hat{p}$ (verifique!)

- Interessante notar que na polarização elíptica (ou circular), o módulo de $\vec{E}$ nunca se anula!

- Agora, como campo $\vec{B}$ é sempre $\perp$ a $\vec{E}$ (em dielétricos e no vácuo) $\Rightarrow$ ele também gira de forma correspondente.

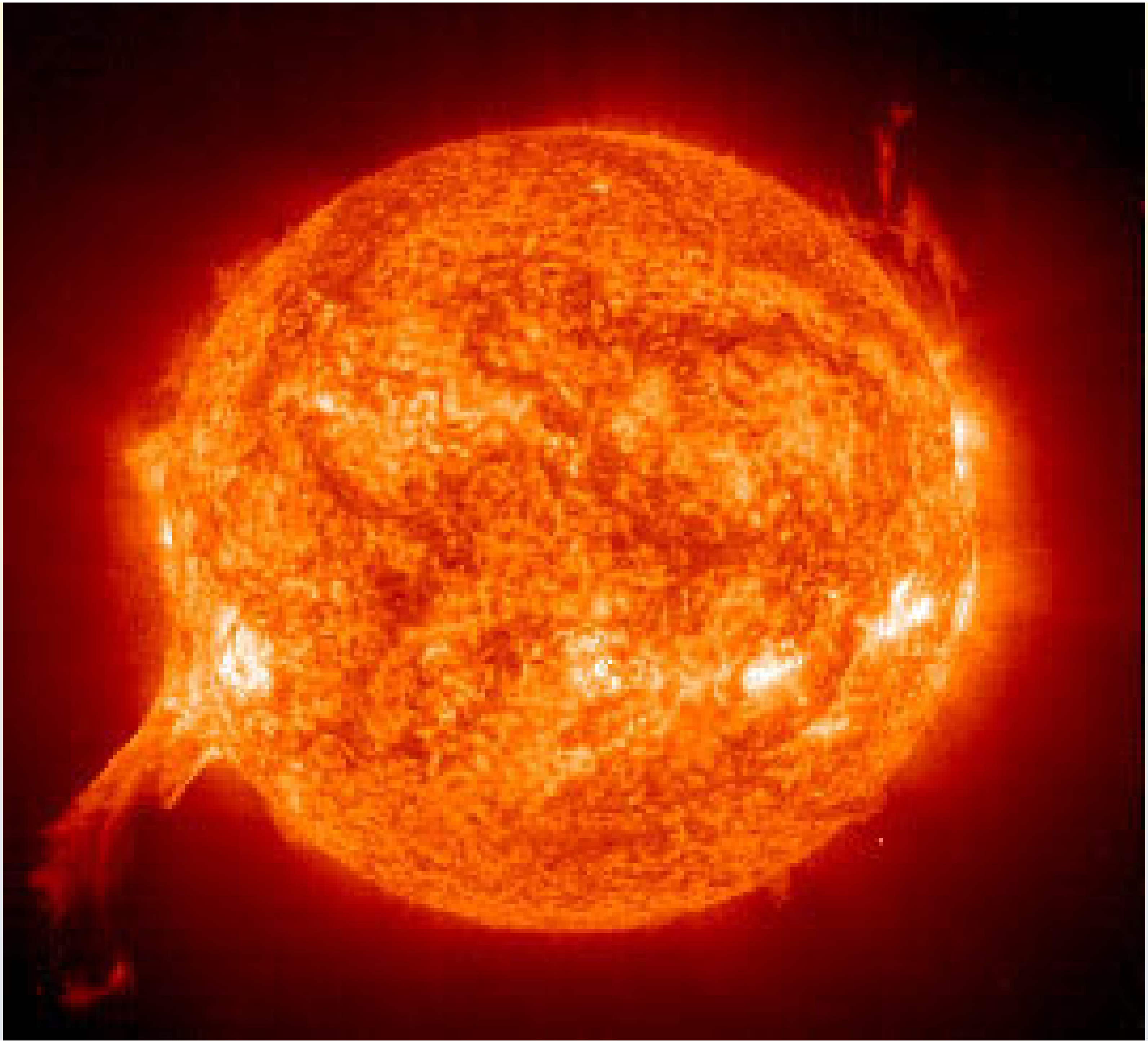
- A *parte real* do campo $\vec{B}$ pode então ser escrita (*Verifique!*):

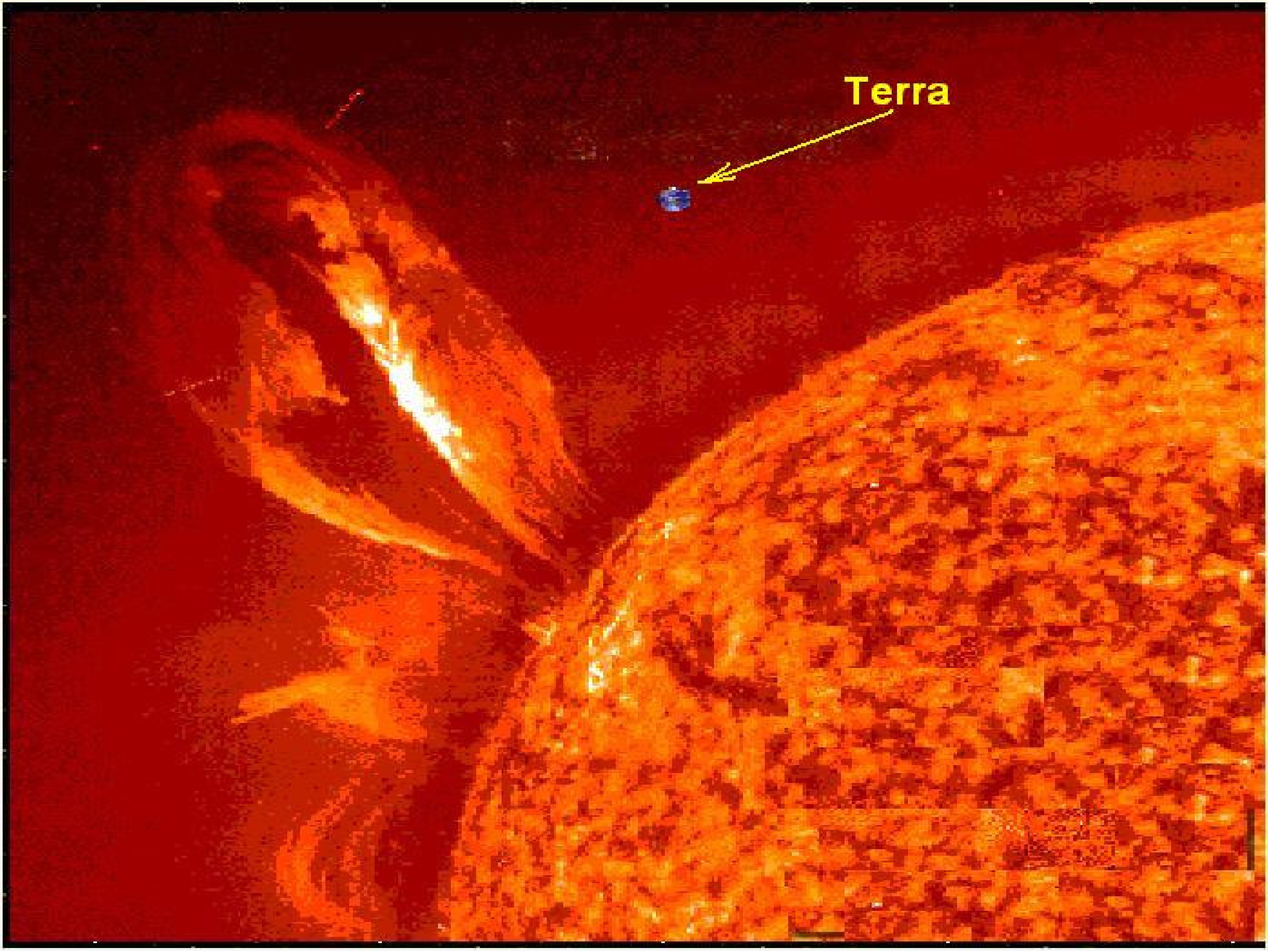
$$\vec{B} = \frac{n}{c}\left[E_{0p}\cos(\omega t - \phi)\,\hat{s} + E_{0s}\cos(\omega t)\,\hat{p} \right]$$

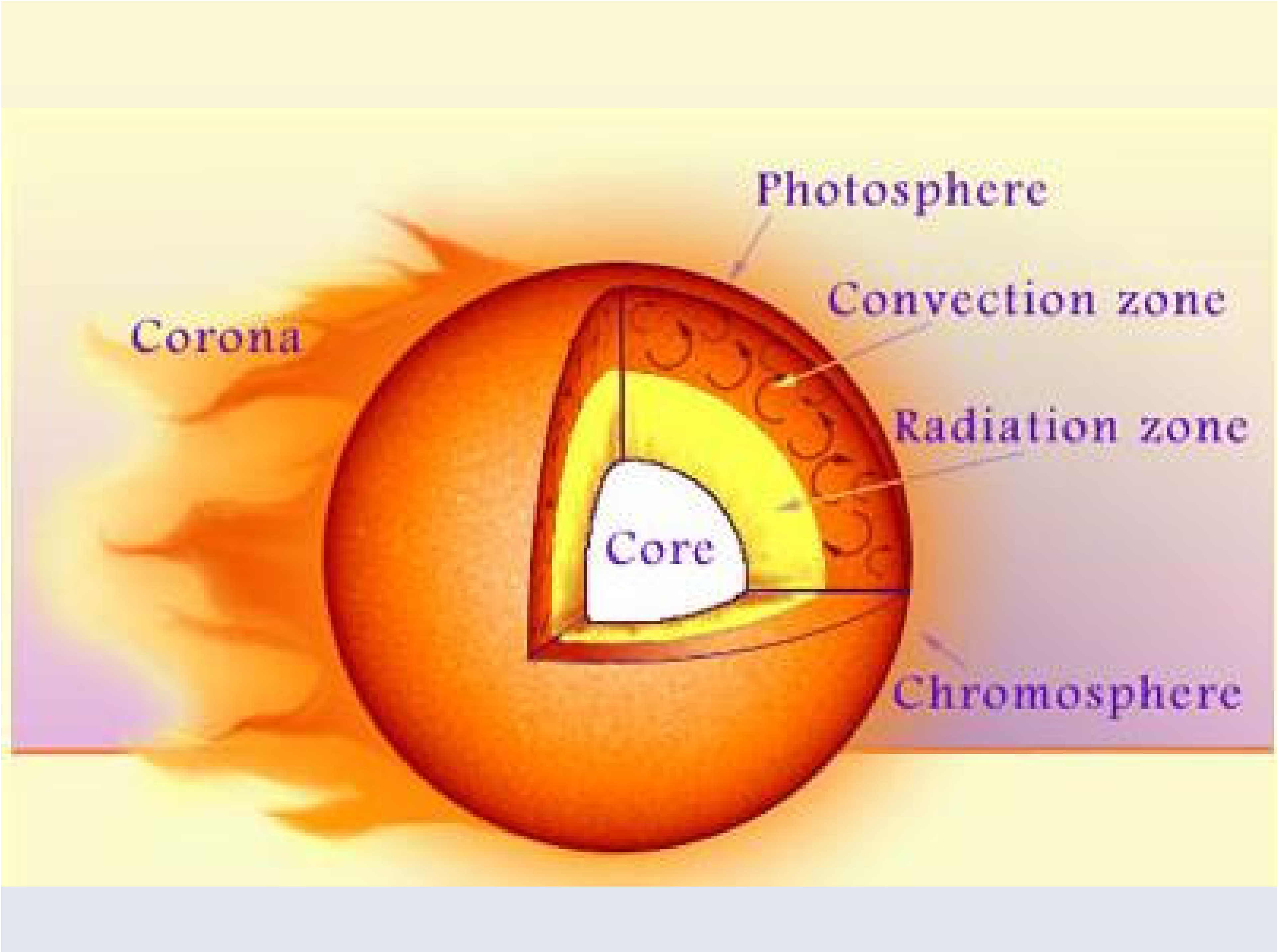
(*utilize* $\vec{K}\times\vec{E} = \omega\vec{B};\ K = \frac{n\omega}{c}$)

- Agora, quando a direção de $\vec{E}$ varia aleatóriamente, a radiação é dita *não-polarizada*.

- Como a luz do Sol, por exemplo!




Terra


Photosphere
Convection zone
Corona
Radiation zone
Core
Chromosphere