Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

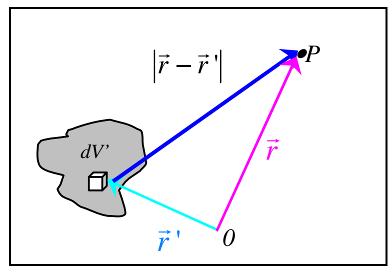
7ª aula – 20/mar/2007

- Vimos: Potenciais retardados: $\begin{cases} \varphi_r(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_V \dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \\ \vec{A}_r(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V \dfrac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV' \end{cases}$

- Podem ser usados para o cálculo de $\vec{A}$ e φ, $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$ e $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$.

- Para isso mostramos:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\rho = \dot{\rho}\vec{\nabla}t_r \quad ; \quad \rho = \rho(\vec{r}\,',t_r) \\ \vec{\nabla}t_r = -\dfrac{1}{c}\vec{\nabla}R = -\dfrac{1}{c}\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'| \\ \vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \hat{R} = \vec{R}/R \\ \vec{\nabla}\left(1/R\right) = -\hat{R}/R^2 \end{cases}$$



Propagação de Ondas EM

- Vamos estudar agora como as ondas EM propagam-se em meios materiais lineares e homogêneos, supostos infinitos.

- Primeiro, investigaremos como comportam-se as *Ondas Planas Monocromáticas*, propagando-se em *meios não-condutores*.

- Como já vimos: $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}}$ ≡ Solução de *Onda-Plana*.

- Sendo que a parte espacial de $\vec{E}(\vec{r},t)$ é solução da equação:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}(\vec{r}) + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E}(\vec{r}) + i\omega\sigma\mu\vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

- Agora, observando que estas últimas equações possuem termos imaginários, então talvez fosse conveniente permitir que as componentes espaciais dos campos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ também possuam caráter complexo:

$$\begin{matrix} \vec{E} \to \tilde{\vec{E}} \\ \vec{B} \to \tilde{\vec{B}} \end{matrix}$$; e isto será particularmente útil quando o meio for um condutor.

- Iremos permitir também que a onda plana tenha uma direção de propagação arbitrária
- Ou seja, supondo que ela se propaga em uma direção definida por um versor $\hat{u}$ devemos fazer:

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-i(\omega t - k\hat{u}\cdot\vec{r})}$$

sendo que $k\hat{u} = \vec{k}$ ≡ *Vetor de Onda* (fornece a direção e sentido de propagação da onda).

> - *Continuando válido que* $k = 2\pi/\lambda$.
> - *E, quando o meio for condutor, veremos que o vetor de onda será complexo.*

- Veja que podemos também expressar o campo na forma: $\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{+i(k\hat{u}\cdot\vec{r} - \omega t)}$.
- Mas, voltemos à propagação da onda em *meios não-condutores*. Supondo $\vec{J} = 0$ e ρ=0 (não há carga líquida ou corrente real), então, as equações de Maxwell ficam:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \cancel{\vec{J}} + \partial\vec{D}/\partial t \end{cases} \quad ;$$

sendo que, ao derivarmos no tempo os campos ($\vec{E}$, por exemplo):

$$\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t} = (-i\omega)\left(\underbrace{\tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}_{\equiv\tilde{\vec{E}}}\right) \Rightarrow \text{ podemos definir } \textit{Operador}: \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega}$$

- Da mesma forma, derivando nas coordenadas espaciais: $\boxed{\vec{\nabla} \to i\vec{k}}$
- Assim, as equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \cancel{i}\vec{k}\cdot\tilde{\vec{D}}_0 = 0 & (1) \\ \cancel{i}\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}}_0 = 0 & (2) \\ \cancel{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \cancel{i}\omega\tilde{\vec{B}}_0 & (3) \\ \cancel{i}\vec{k}\times\tilde{\vec{H}}_0 = -\cancel{i}\omega\tilde{\vec{D}}_0 & (4) \end{cases}$$

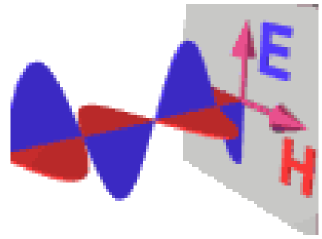
> Estas são as equações que envolvem as *amplitudes* dos campos

- Note que para se obter as expressões correspondentes aos campos totais (e não somente de amplitude), basta multiplicar ambos os lados das equações acima por $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$.
- Lembrando ainda que a *cte. dielétrica*, $\varepsilon_R = \varepsilon/\varepsilon_0$ (e usando $\mu = \mu_0$) → a relação (4) fica: $\vec{k}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\omega\varepsilon\mu\tilde{\vec{E}}_0 = -\omega\underbrace{\mu_0\varepsilon_0}_{=1/c^2}\varepsilon_R\tilde{\vec{E}}_0 = 0$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{k}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_R\tilde{\vec{E}}_0 = 0} \qquad (5)$$

- Note que, das equações (1) e (2), $\tilde{\vec{E}}_0$ *e* $\tilde{\vec{B}}_0$ são perpendiculares a $\vec{k}$ ⇒ conclui-se que as ondas EM são ondas *Transversais*.

- Além disso, a equação (3) indica que $\vec{\tilde{E}}_0$ é $\perp$ a $\vec{\tilde{B}}_0$ e a $\vec{k}$, $\therefore$ $\vec{\tilde{E}}_0$, $\vec{\tilde{B}}_0$ e $\vec{k}$ formam um *conjunto ortogonal*.



- Mas cuidado! Esta ortogonalidade só vale para ondas *propagando-se em meios dielétricos* ($\rho = 0, \vec{J} = 0$); Para condutores isto não é verdade, como veremos depois.

- Agora, ainda da 3ª equação, note que em módulo:

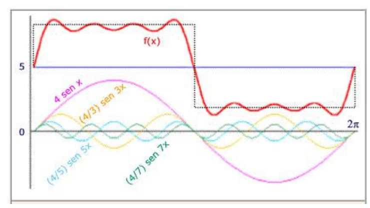
$$\tilde{B}_0 = \frac{1}{\omega} k\, \tilde{E}_0 \sin 90^o = \frac{1}{\omega}\frac{n\omega}{c}\tilde{E}_0 \rightarrow \text{p/ } n=1 \text{ (vácuo): } \vec{\tilde{E}}_0 = c\vec{\tilde{B}}_0$$

- Para <u>*dielétricos em geral*</u>: $\boxed{\vec{\tilde{E}}_0 = \frac{c}{n}\vec{\tilde{B}}_0}$; sempre lembrando que: $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_R} \rightarrow k = \sqrt{\varepsilon_R}\,\frac{\omega}{c}}$

- Apesar da *solução onda-plana* corresponder a uma classe restrita de soluções das equações de Maxwell, ela pode ter um caráter mais abrangente pois, sendo funções lineares, uma *combinação linear de soluções* (superposição de ondas planas) também será solução da equação diferencial.

- Desta forma, podemos encontrar outras soluções possíveis simplesmente fazendo uma soma de várias ondas planas:

$$\boxed{\vec{\tilde{E}}(\vec{r},t) = \sum_j \vec{\tilde{E}}_{0j}\, e^{i\left(k_j \hat{u}\cdot\hat{r} - \omega_j t\right)}}$$



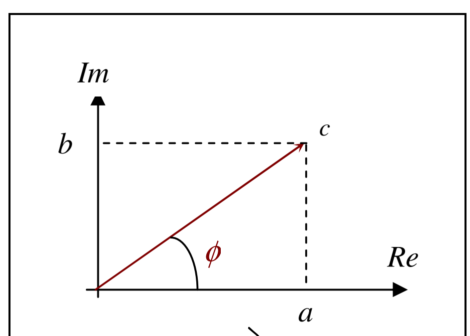
- Na sua forma final o resultado pode corresponder a uma solução periódica, não necessariamente senoidal.

Polarização

- Dada uma direção de propagação da onda, $\hat{u}$, pode-se escrever a amplitude do campo em função das coordenadas $\hat{p}, \hat{s}$: $\underbrace{(\hat{p},\hat{s},\hat{u})}_{base\ ortogonal} \rightarrow \vec{\tilde{E}}_0 = \vec{\tilde{E}}_{0p}\hat{p} + \vec{\tilde{E}}_{0s}\hat{s}$

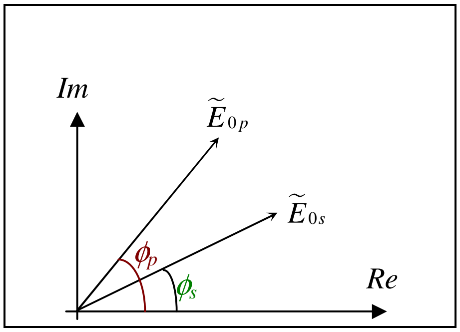
- De forma que, na forma polar: $\begin{cases} \vec{\tilde{E}}_{0p} = E_{0p}\, e^{i\phi_p} \\ \vec{\tilde{E}}_{0s} = E_{0s}\, e^{i\phi_s} \end{cases}$

- Agora, já que qualquer número complexo $c = a + ib$, então: $c = a + ib = |c|\,(\cos\phi + i\sin\phi) = |c|\, e^{i\phi}$.



$$\begin{cases} a = |c| \cos\phi \\ b = |c| \sin\phi \\ |c|^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

- De forma que $\tilde{E}_0 = E_{0p} e^{i\phi_p}\,\hat{p} + E_{0s} e^{i\phi_s}\,\hat{s}$.



sendo $\phi = \phi_p - \phi_s \equiv$ diferença de fase (entre as duas componentes de amplitude $\vec{E}_0$).

- Supondo, por exemplo $\phi_s = 0$ em $t = 0$ (estou escolhendo um início, em um certo instante t) $\Rightarrow$
$\Rightarrow\ \phi_p = \phi = cte$

Em qualquer instante eu sempre terei $\phi = \phi_p - \phi_s$ cte! $\Rightarrow$ posso "girar os eixos" para ter $\phi_s = 0$.

- Assim: $\tilde{\vec{E}}_0 = E_{0p} e^{i\phi}\,\hat{p} + E_{0s}\,\hat{s} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\,\hat{p}\,e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi\right)} + E_{0s}\,\hat{s}\,e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \ ; \ sendo\ \ \vec{k} = k\,\hat{u}$$

- Tomando a parte real:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\hat{p}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi\right) + E_{0s}\hat{s}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) \qquad (6)$$

- E usando que $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \ \Rightarrow\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{n}{c}\left[E_{0p}\hat{s}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} - \phi\right) + E_{0s}\hat{p}\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]$

- Da equação (6) fica fácil observar que posso ter duas componentes de $\vec{E}$ oscilando fora da fase (determinada pelo valor de ϕ)

- Ou seja, em um dado instante t, quando uma componente atinge o seu valor máximo, a outra ainda não.

- Para se entender melhor o processo, supor onda movendo-se ao longo do eixo z, $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_z$:

$$\vec{E}(z,t) = E_{0p}\hat{p}\cos\left(\omega t - kz - \phi\right) + E_{0s}\hat{s}\cos\left(\omega t - kz\right) \qquad (7)$$

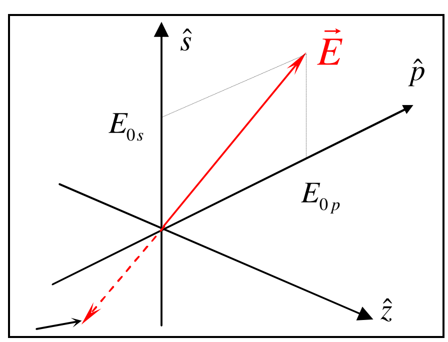
- Supondo existirem "medidores do campo elétrico" no plano $z = 0$, ao longo dos eixos definidos por $\hat{p}$ e $\hat{s}$ $\left(\hat{p}\ \text{e}\ \hat{s} \perp\ ao\ eixo\ z\right)$, o campo $\vec{E}$ da onda será:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(t,z=0) = E_{0p}\hat{p}\cos\left(\omega t - \phi\right) + E_{0s}\hat{s}\cos\left(\omega t\right) \ ; \ (E_{0s}\ e\ E_{0p} \equiv valores\ de\ máximo)$$

Caso 1: $\phi = 0 \rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \left(E_{0p}\hat{p} + E_{0s}\hat{s}\right)\cos\left(\omega t\right)}$

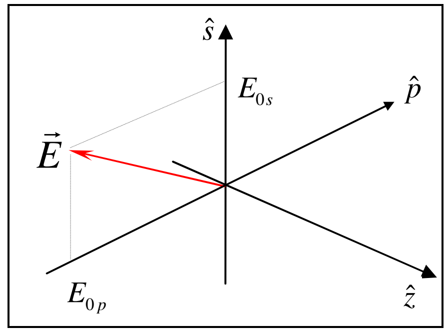
- Sendo que: $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_{0p}^2 + E_{0s}^2} \equiv$ valor máximo de $|E_0|$, quando $cos\ \omega t = 1$

- Ou seja, $\vec{E}$ oscila em uma única direção, e diz-se então que a onda EM é "Linearmente Polarizada".



Para um outro valor de t

Caso 2: $\phi = \pi$:

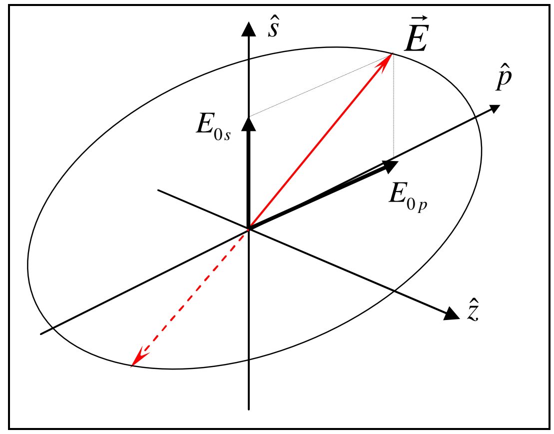


$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\,\hat{p}\,(-)\cos(\omega t) + E_{0s}\hat{s}\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \left(-E_{0p}\,\hat{p} + E_{0s}\hat{s}\right)\cos\omega t}$$

- E, novamente, a onda é *Linearmente Polarizada*.

Caso 3: $\phi = \pi/2$:

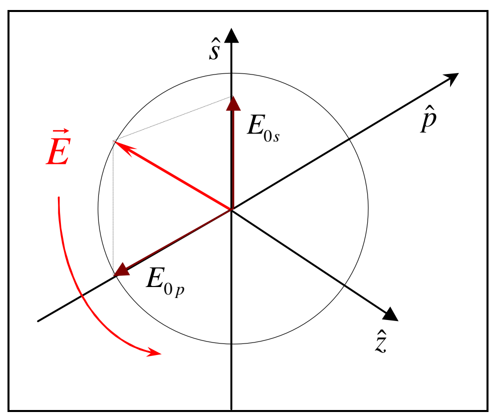


$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\,\hat{p}\sin(\omega t) + E_{0s}\,\hat{s}\cos(\omega t)}$, de forma que:

ωt	$\vec{E}$
0	$E_{0s}\hat{s}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2\; E_{0p}\,\hat{p} + \sqrt{2}/2\; E_{0s}\hat{s}$
$\pi/2$	$E_{0p}\,\hat{p}$
$\vdots$	$\vdots$

- Onda *Circularmente (Elipticamente) polarizada à DIREITA*.

Caso 4: $\phi = -\pi/2 \rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\,\hat{p}\sin(\omega t) + E_{0s}\hat{s}\cos(\omega t)}$



- Neste caso é fácil ver que a onda é *circularmente (elipticamente) polarizada à ESQUERDA*.
- Note que a polarização é circular quando $E_{0p} = E_{0s}$ (em módulo) e $\phi = \pm\pi/2$. Para outros valores de ϕ (mesmo quando $E_{0p} = E_{0s}$), a polarização será elíptica; mas de forma que eixos maior e menor da elipse formam ângulos (verifique!) com eixos $\hat{p}$ e $\hat{s}$.
- Interessante notar que na polarização elíptica (ou circular), o módulo de $\vec{E}$ nunca se anula!
- Agora, como campo $\vec{B}$ é sempre $\perp$ a $\vec{E}$ em dielétricos (e no vácuo), ele também gira de forma correspondente.
- *Parte real* do <u>campo magnético</u> pode então ser escrita:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{n}{c}\left[E_{0p}\hat{s}\cos(\omega t - \phi) + E_{0s}\hat{p}\cos(\omega t)\right]} \qquad (8)$$

(Verifique! obtém-se de $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{E}$)

- Quando a direção de $\vec{E}$ varia aleatoriamente $\rightarrow$ radiação é dita não-polarizada (luz do Sol, por exemplo).