INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

8ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Vimos, na última aula...

- Para *Ondas Planas*: $\begin{cases} \vec{\nabla} \rightarrow i\vec{K} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \end{cases}$ (*operadores*)

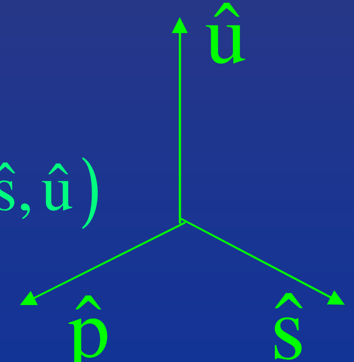
- Aplicando nas eqs. de Maxwell:

(ondas transversais)

$$\vec{K} \times \tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_R \tilde{\vec{E}}_0$$ e, também: $$\vec{K} \times \tilde{\vec{E}}_0 = \omega \tilde{\vec{B}}_0$$

- Considerando as <u>*amplitudes*</u> dos campos como sendo *grandezas complexas* :

$(\hat{p}, \hat{s}, \hat{u})$



$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 \, e^{i\left(K\,\hat{u}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \;; \\ \tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_{0p}\,\hat{p} + \tilde{E}_{0s}\,\hat{s} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ (tomando a <u>parte real)</u> $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)\hat{p} + E_{0s}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\hat{s}}$$

com $\boxed{\vec{K} = K\,\hat{u}}$

$$\begin{cases} \phi = 0 \text{ ou } \pi \Rightarrow \text{ ondas linearmente polarizadas} \\ \phi = \pm \pi/2 \Rightarrow \text{ ondas circular/elipticamente polarizadas} \end{cases}$$

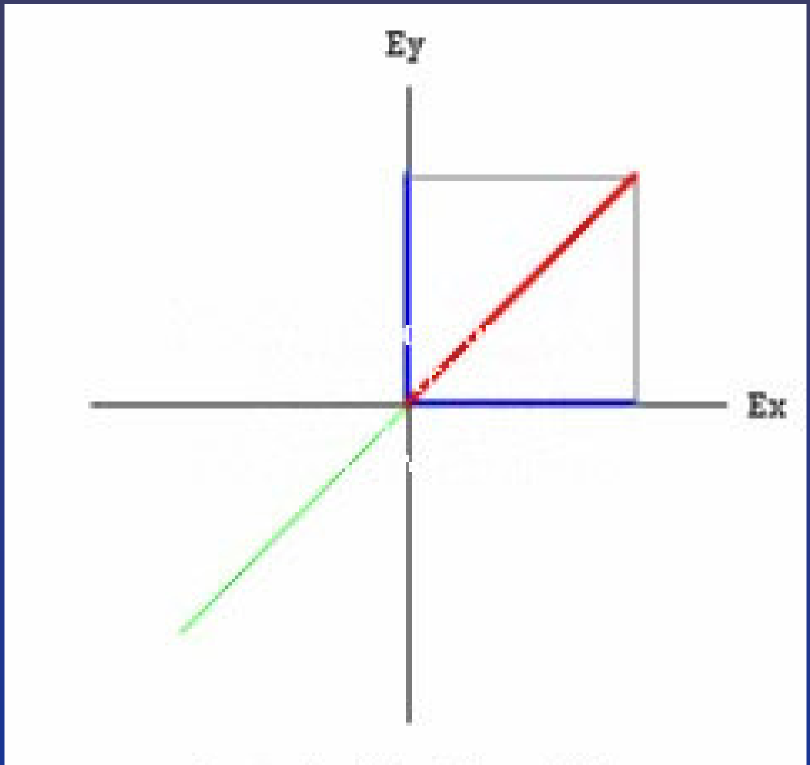
(à direita (+) e à esquerda (-))

- Usando que: $\vec{K}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$; $K = \dfrac{n\omega}{c}$:

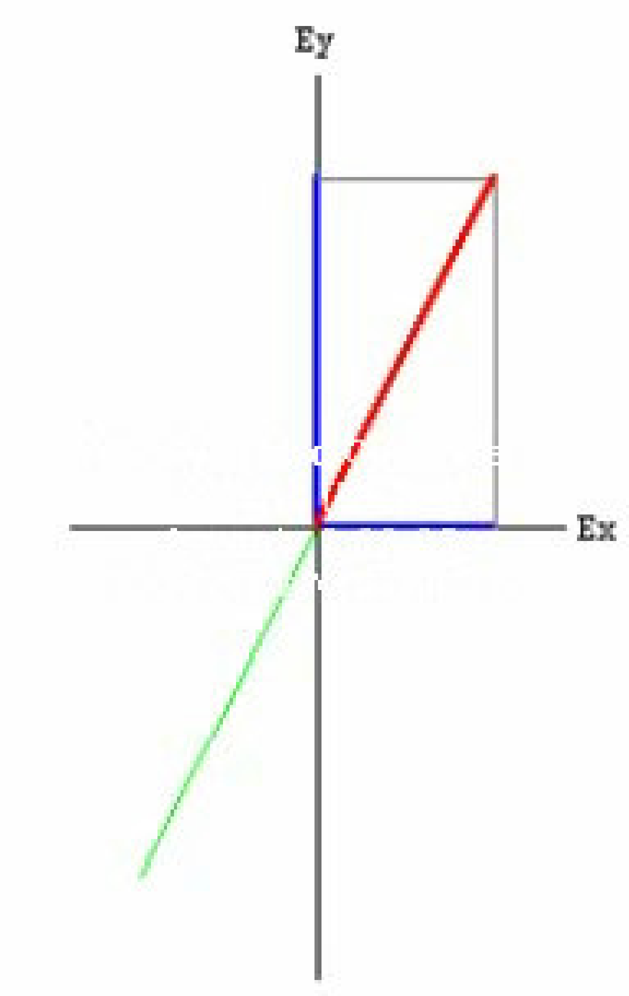
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{n}{c}\left[E_{0p}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)\hat{s} - E_{0s}\cos\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)\hat{p}\right]}$$

Onda EM Linearmente Polarizada

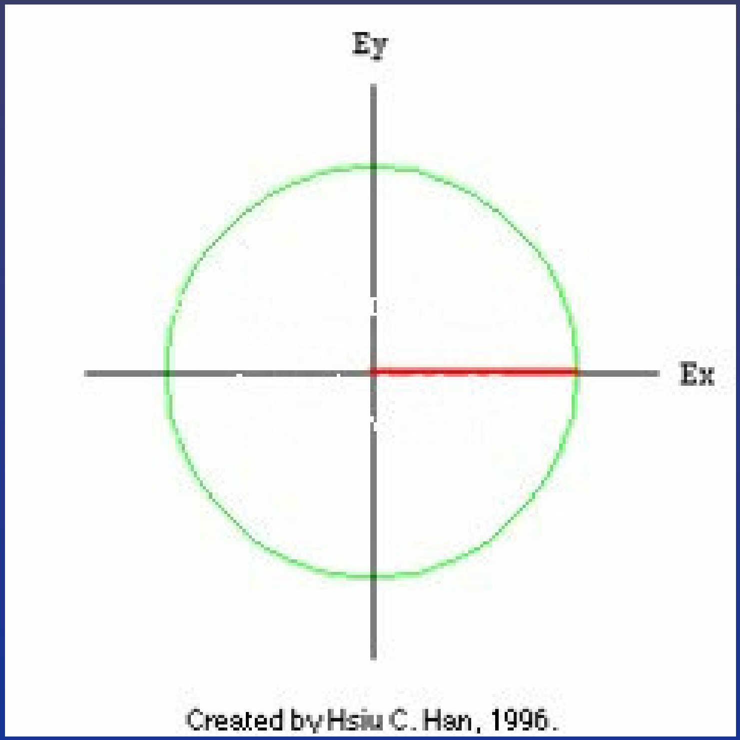


Created by Hsiu C. Han, 1996.

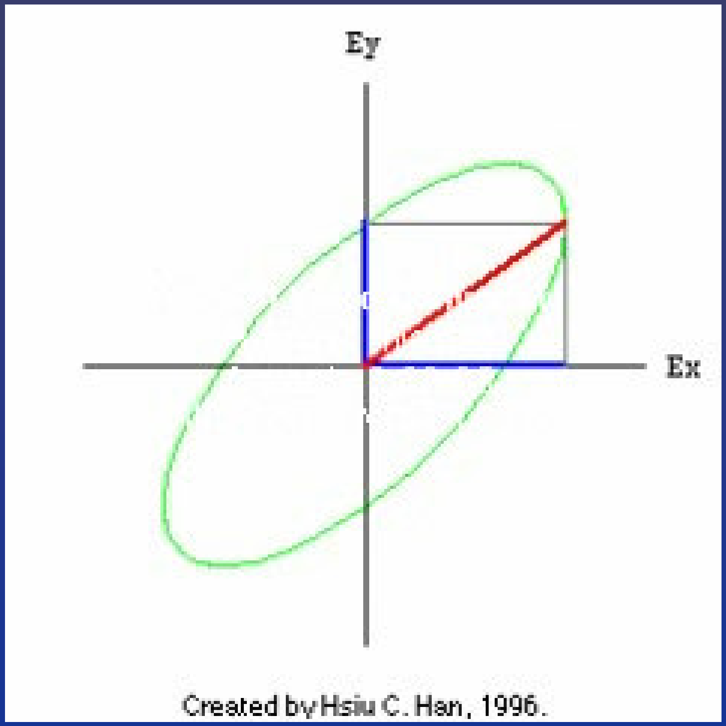


Created by Hsiu C. Han, 1996

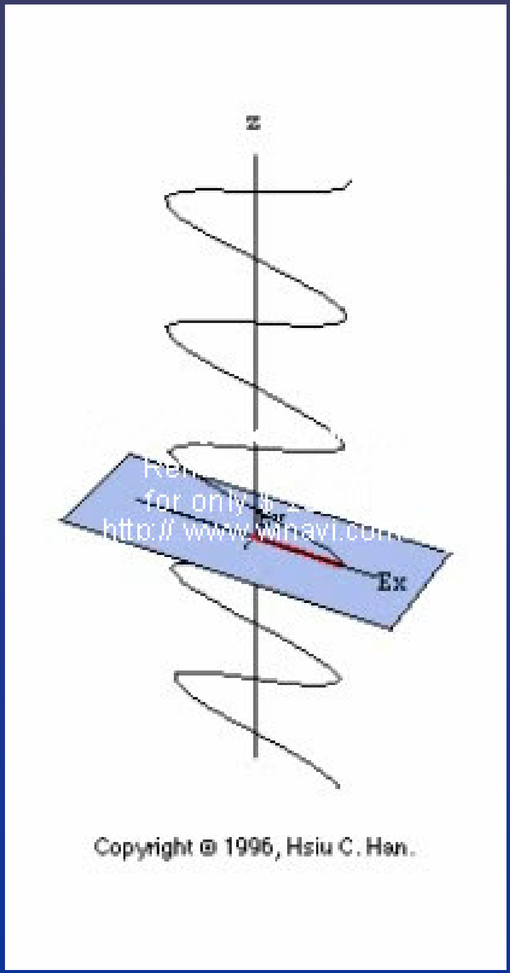
Polarização Circular a Esquerda



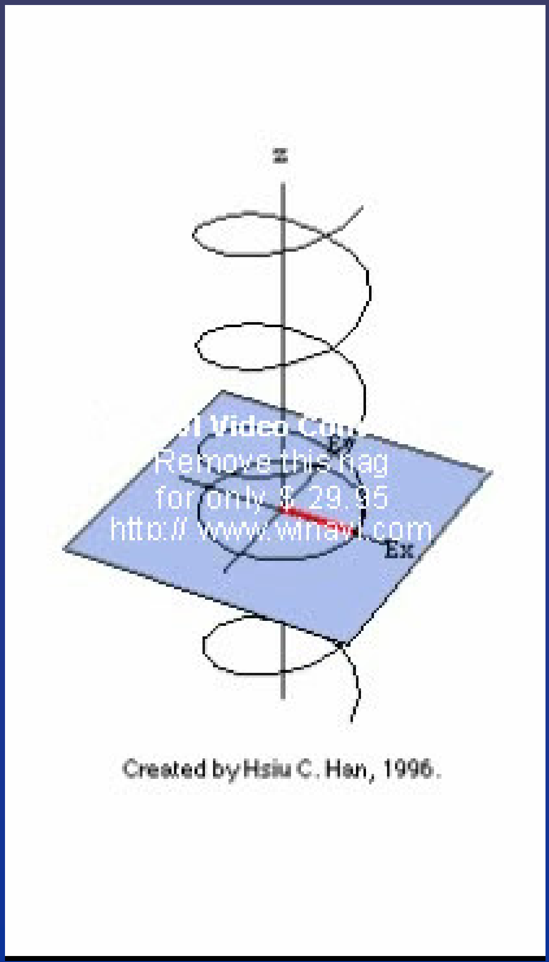
Polarização Eliptica a Direita



Polarização Linear 3D

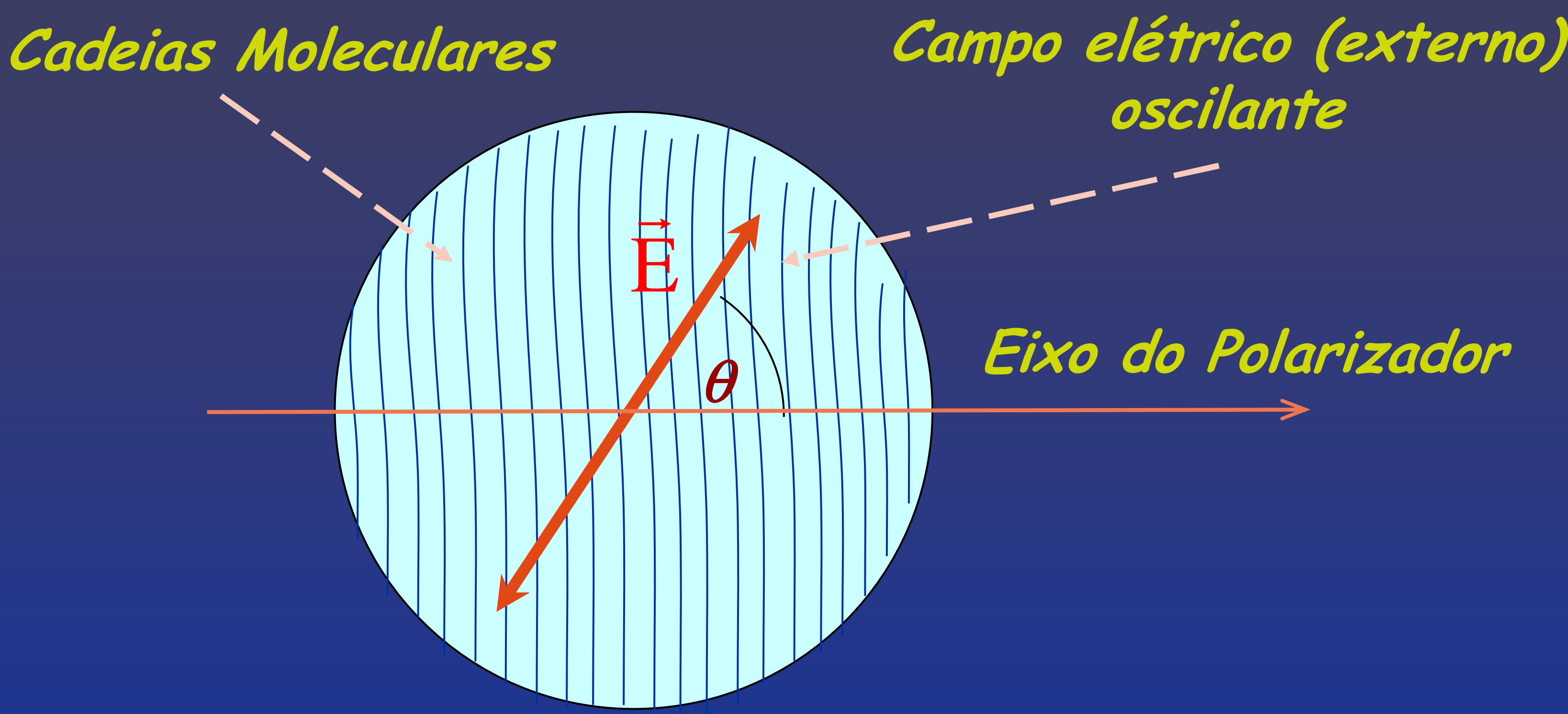


Polarização Circular 3D

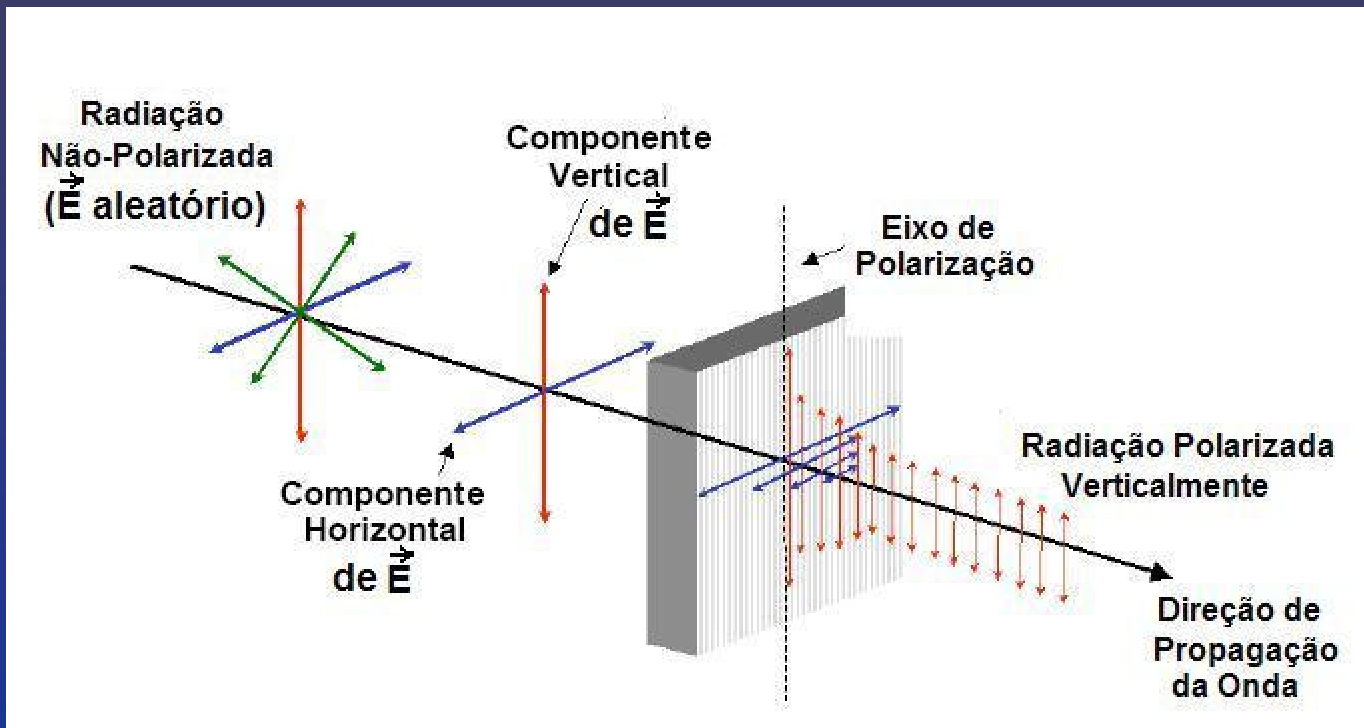


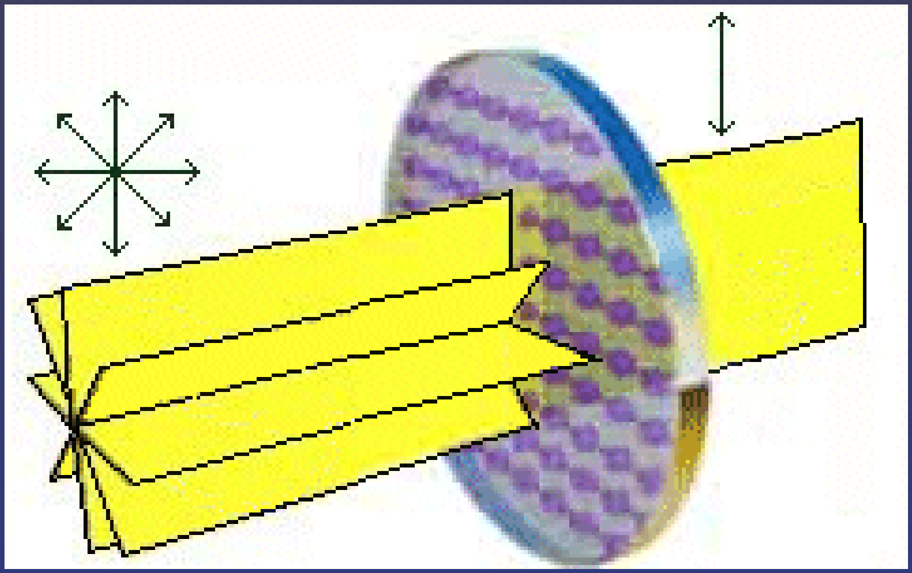
- Radiação não-polarizada, quando atravessa certos materiais (*polaróides*) $\rightarrow$ torna-se polarizada!
- Fisicamente, *polaróide* $\equiv$ material que possui *cadeias de moléculas* em paralelo
- Elétrons de valência dessas moléculas podem mover-se ao longo das cadeias (em resposta a um campo elétrico aplicado) $\rightarrow$ absorvem energia
- No entanto, os elétrons não podem passar de uma cadeia para outra (não movem-se $\perp$ às cadeias)
- Assim …

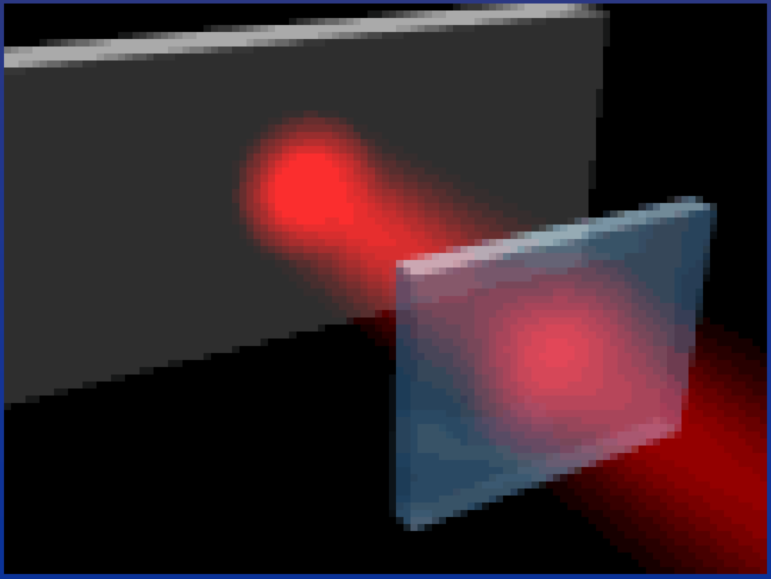
- Na incidência de uma onda EM com $\vec{E}$ oscilando na direção que faz ângulo θ com *Eixo do Polarizador*:

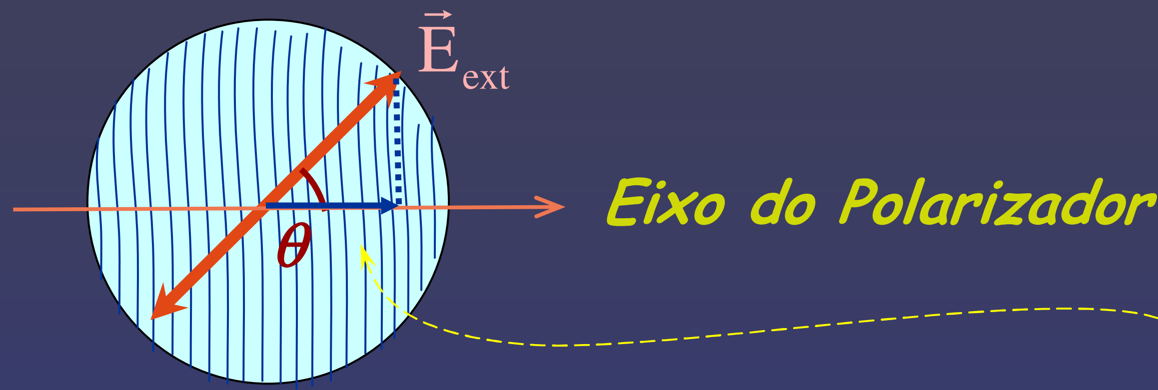


- A componente paralela ($E_{//}$) ao *Eixo do Polarizador* ($\perp$ à cadeia) não é absorvida e ***atravessa*** o polaróide.
- Enquanto que a outra componente ($E_{\perp}$) **não o atravessa** (elétrons absorvem a energia incidente)


Radiação
Não-Polarizada
(E aleatório)
Componente
Vertical
de E
Eixo de
Polarização
Componente
Horizontal
de E
Radiação Polarizada
Verticalmente
Direção de
Propagação
da Onda







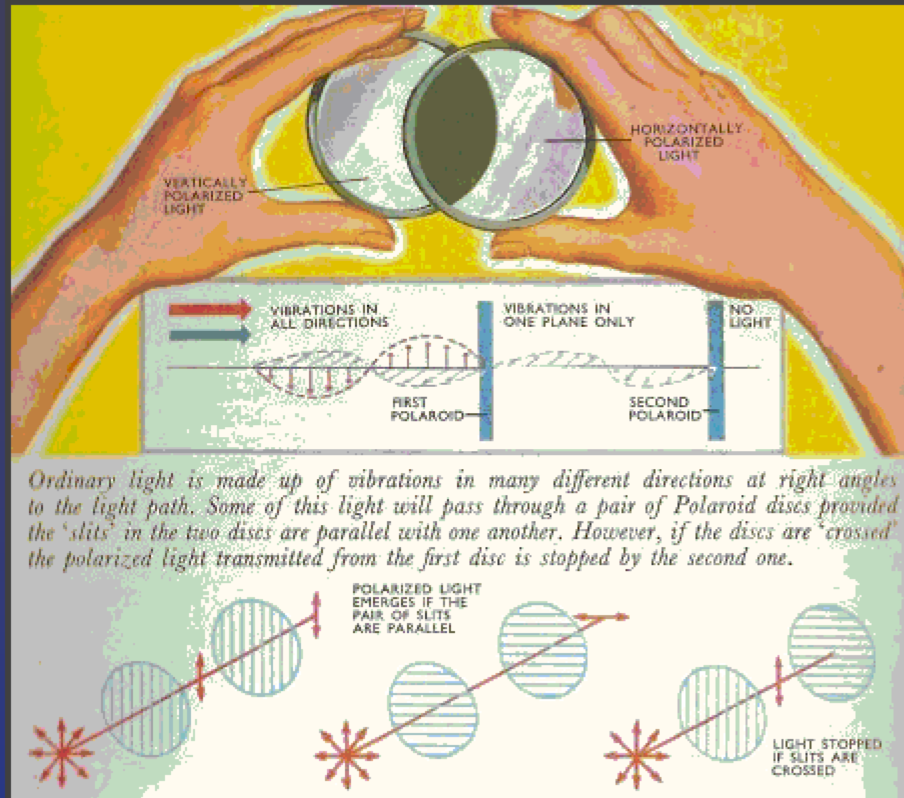
- Como apenas a componente ($E_{//}$) ao *Eixo do Polarizador* atravessa $\Rightarrow E_{transmitido} = E_{0(incidente)} \cos\theta$

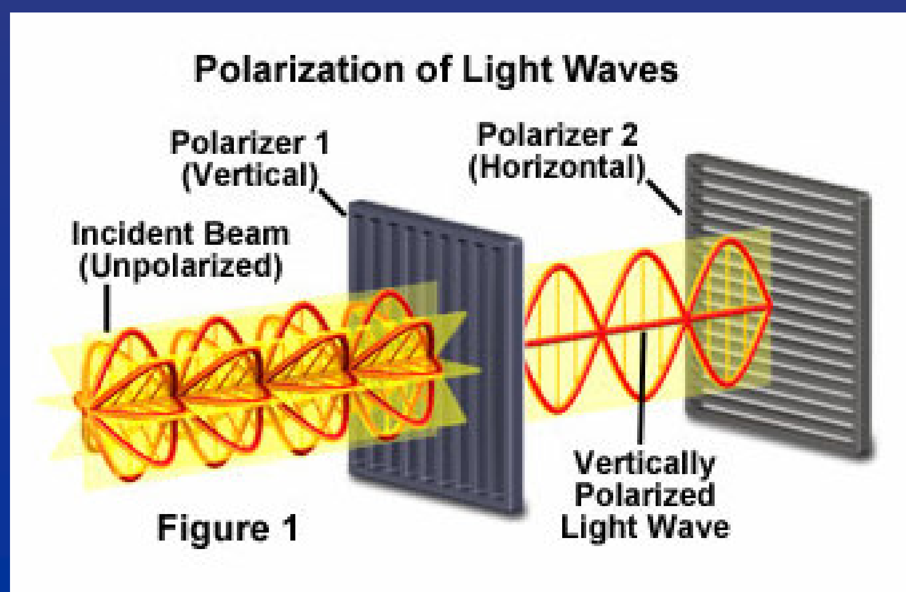
$$E = E_0 \cos\theta$$

- Em termos da Intensidade de Radiação, ou seja, potência transmitida $\left(I \propto \left|\vec{E}\right|^2\right)$:

$$E^2 = E^2{}_0 \cos^2\theta \longrightarrow \boxed{I = I_0 \cos^2\theta} \equiv \text{Lei de Malus}$$

- O que ocorre (com a luz) quando uso <u>dois polaróides</u>?


HORIZONTALLY POLARIZED LIGHT
VERTICALLY POLARIZED LIGHT
VIBRATIONS IN ALL DIRECTIONS
VIBRATIONS IN ONE PLANE ONLY
NO LIGHT
FIRST POLAROID
SECOND POLAROID
Ordinary light is made up of vibrations in many different directions at right angles to the light path. Some of this light will pass through a pair of Polaroid discs provided the 'slits' in the two discs are parallel with one another. However, if the discs are 'crossed' the polarized light transmitted from the first disc is stopped by the second one.
POLARIZED LIGHT EMERGES IF THE PAIR OF SLITS ARE PARALLEL
LIGHT STOPPED IF SLITS ARE CROSSED


Polarization of Light Waves
Polarizer 1 (Vertical)
Polarizer 2 (Horizontal)
Incident Beam (Unpolarized)
Vertically Polarized Light Wave
Figure 1

Densidade e Fluxo de Energia

- Vimos que a representação complexa de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é útil e, para se obter as quantidades físicas reais, toma-se a parte real das grandezas complexas.

- Isto, porém, só pode ser feito porque os campos estão na forma de uma função linear e as eqs. de Maxwell são satisfeitas separadamente pelas partes real e imaginária da grandeza complexa.

- No entanto, expressões como:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H}\right] & \text{(densidade de energia)} \\ \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} & \text{(energia /área /tempo)} \end{cases}$$

- Não são funções lineares com relação aos campos. $\therefore$ faz-se necessário primeiro tomar as partes reais, antes de se efetuarem as multiplicações:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[\operatorname{Re}\tilde{\vec{E}}\cdot\operatorname{Re}\tilde{\vec{D}}+\operatorname{Re}\tilde{\vec{B}}\cdot\operatorname{Re}\tilde{\vec{H}}\right] \\ \vec{S} = \operatorname{Re}\tilde{\vec{E}}\times\operatorname{Re}\tilde{\vec{H}} \end{cases}$$

- Lembrando: $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_{0p}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)}\hat{p} + E_{0s}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\hat{s}$

- Por ex., ao calcularmos E^2 ou B^2 , teremos :

$$E^2 = E_{0p}^2 \cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right) + E_{0s}^2 \cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

$$B^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \left[E_{0p}^2 \cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right) - E_{0s}^2 \cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$$

$$= \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \Rightarrow \boxed{B^2 = \mu_0 \varepsilon E^2} \quad \left(pois \;\; n = c/v \;\; e \;\; v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} \right)$$

- De forma que, calculando as contribuições:

$$\vec{E}\cdot\vec{D} = \varepsilon E^2 \quad e \quad \vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{\cancel{\mu_0}\,\varepsilon}{\cancel{\mu_0}} E^2 = \vec{E}\cdot\vec{D}$$

Tem-se a mesma contribuição para a energia da onda!

- Então: $\boxed{u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \varepsilon E^2\right) = \varepsilon E^2} \boxed{= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2}$

já que $\frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ e $n = \sqrt{\varepsilon_R}$; sendo $\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

- Da mesma forma, calculando $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$ $=$

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ E_{0p}\cos\left(Kz - \omega t + \phi\right) & E_{0s}\cos\left(Kz - \omega t\right) & 0 \\ \frac{n}{c} E_{0s}\cos\left(Kz - \omega t\right) & \frac{n}{c} E_{0p}\cos\left(Kz - \omega t + \phi\right) & 0 \end{vmatrix}$$

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ e $\vec{B} = n / c\, \vec{E}$

- Então:

$$\vec{S} = \left[\frac{n}{\mu_0 c} E_{0p}^2 \underbrace{\cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)}_{} + \frac{n}{\mu_0 c} E_{0s}^2 \underbrace{\cos^2\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}_{} \right] \hat{u}$$

componente $\hat{\mathrm{p}}$ do campo elétrico ao quadrado

componente $\hat{\mathrm{s}}$ do campo elétrico ao quadrado

$$\left(E_p\right)^2 + \left(E_s\right)^2 = E^2$$

- Portanto: $\boxed{\vec{S} = \left(\frac{n}{\mu_0 c}\right) E^2 \,\hat{u}}$

Ou seja, a energia da onda é proporcional ao quadrado do campo elétrico (mas não explica efeito fotoelétrico !)

- Agora, substituindo este último resultado: $\left(\left|\vec{S}\right| = \left(\frac{n}{\mu_0 c}\right) E^2\right)$

na expressão de u: $u = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2$

$$u = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \frac{n^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{\mu_0 c}}{\cancel{n}} S \Rightarrow u = \frac{n}{c} S \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{c}{n} u \; \hat{u}}$$

Versor

Densidade de energia

- Em termos de velocidade de propagação da onda,

$$\boxed{\vec{v}_p = \frac{c}{n}\hat{u} \Rightarrow \vec{S} = u\vec{v}_p}$$

$\rightarrow$ notar a analogia com $\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}}$

$\therefore \vec{S} \equiv$ densidade de corrente energética, ou melhor, densidade de potência que se desloca com a veloc. v_p da onda.

- Outra observação: a relação entre u e $\vec{S}$ (da onda), com o tempo, depende do estado de polarização da onda!

- Isto porque (em módulo):

$$E^2_{(\text{real, p/ z=0})} = E_{0p}^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_{0s}^2 \cos^2(\omega t)$$

- Para polarização circular ($E_{os} = E_{op}$ e $\phi = \pm\ \pi/2$)

$$E^2 = E_{0p}^2 \underbrace{\cos^2\left(\omega t \mp \pi/2\right)}_{=(\mp \sin \omega t)^2 = \sin^2 \omega t} + E_{0s}^2 \cos^2(\omega t)$$

$$= E_{0p}^2 \underbrace{\left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t\right)}_{=1}$$

$$\therefore\ E^2 = E_{0p}^2 = E_{0s}^2 = E_0^2 \equiv \text{constante no tempo!}$$

- Por outro lado, para ondas linearmente polarizadas (ϕ = 0 ou ϕ = π):

$$E^2 = E_{0p}^2 \cos^2(\omega t) + E_{0s}^2 \cos^2(\omega t) = \left(E_{0p}^2 + E_{0s}^2\right)\cos^2(\omega t)$$

(*que varia de 0 a 1 !!* $\rightarrow$ *$E^2 > 0$, sempre*)

- Pergunta: Se o *valor de E^2 depende do estado de polarização* da onda como fica $\vec{S}$, que é α E^2?

- Veja que em termos de valores médios: $\overline{E^2} = \frac{1}{2}\left(E_{0p}^2 + E_{0s}^2\right)$

- Sendo, para onda linearmente polarizada: $E^2 = E_0^2 = cte.$

- Mas, utilizando $\vec{E}$ na forma complexa pode-se também chegar ao mesmo resultado acima fazendo: $\boxed{\overline{E^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^*\right)}$

lembrando:

$$\left(\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = E_{0p}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t + \phi\right)}\hat{p} + E_{0s}\, e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t\right)}\hat{s}\right)$$

comprove!

- Igualmente:
$$\begin{cases} \boxed{\overline{u} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\cdot\tilde{\vec{D}}^{*} + \tilde{\vec{B}}\cdot\tilde{\vec{H}}^{*}\right)} \\ \boxed{\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}^{*}\right)} \end{cases}$$

(não importando qual das grandezas é a conjugada)

Ondas planas monocromáticas em *meios condutores*

- Veremos que a obtenção da solução de onda plana será feita analogamente ao realizado para meios dielétricos.

- Ainda consideraremos $\rho = 0$, e que $\vec{J}$ só existirá em resposta ao campo elétrico incidente da onda EM:

$$ou\ seja: \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} \quad ; \quad \vec{E} \equiv \text{campo da onda EM.}$$

- Desta forma, da 4ª eq. de Maxwell: $\tilde{\vec{H}}_0 e^{i\cancel{\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}}$ $\tilde{\vec{D}}_0 e^{i\cancel{\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}}$

$$\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{H}} = \sigma\tilde{\vec{E}} + \frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial t \to -i\omega \\ \vec{\nabla} \to i\vec{K} \end{pmatrix} \Rightarrow i\vec{K}\times\tilde{\vec{H}} = \sigma\tilde{\vec{E}} - i\omega\tilde{\vec{D}}$$

$\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\cancel{\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}}$

- Assim: $\vec{K}\times\tilde{\vec{H}}_0 = -\omega\tilde{\vec{D}}_0 - i\sigma\tilde{\vec{E}}_0$

- Agora, usando: $\begin{cases} \vec{B} = \mu_0\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{cases} \to \boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\left(\varepsilon_R + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\tilde{\vec{E}}_0}$

verifique!

- Note que, fazendo $\sigma \to 0 \to$ caímos no caso dos dielétricos!

(ver aula passada!)

- Agora, se permitirmos que a *constante dielétrica seja complexa* :

$$\varepsilon_R \rightarrow \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

- Então, a 4ª equação de Maxwell adquire a mesma forma que havíamos obtido para os meios dielétricos:

$$\vec{K} \times \tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R \tilde{\vec{E}}_0$$

- De forma que os mesmos procedimentos anteriores de análise podem ser, consequentemente, seguidos!

- Veja que este é apenas um modelo matemático; e que a suposição feita irá facilitar a abordagem dos problemas.

- Então, da 3ª equação de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\rightarrow \underline{\underline{\cancel{i}\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0=\cancel{i}\omega\tilde{\vec{B}}_0}}\ \overset{(\times\vec{K})}{\Rightarrow}\ \vec{K}\times\left(\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0\right)=\omega\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0$$

- Agora, usando: $\boxed{\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}$

$$\vec{K}\underbrace{\cancel{\left(\vec{K}\cdot\tilde{\vec{E}}_0\right)}}_{=\ 0}-\tilde{\vec{E}}_0\underbrace{\left(\vec{K}\cdot\vec{K}\right)}_{=K^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\tilde{\vec{E}}_0\ \Rightarrow\ K^2=\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R$$

$$pois:\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \vec{K}\cdot\tilde{\vec{D}}_0=0$$

$$\therefore\ \boxed{K=\frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}=\tilde{n}\frac{\omega}{c}}$$

Ou seja: $\tilde{n}=\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}$

Índice de Refração Complexo!

- Então, mantendo ω real, em meios condutores $\vec{K}$ será complexo:

$$\tilde{\vec{K}}=\vec{K}_r+i\vec{K}_i=\left(K_r+iK_i\right)\hat{u}=\tilde{K}\hat{u}$$

- Assim procedendo, praticamente todos os resultados obtidos para *meios dielétricos* valerão, como veremos, para *meios condutores*, com a ressalva: $\varepsilon_R, n \text{ e } \vec{K} \rightarrow \tilde{\varepsilon}_R, \tilde{n} \text{ e } \tilde{\vec{K}}$

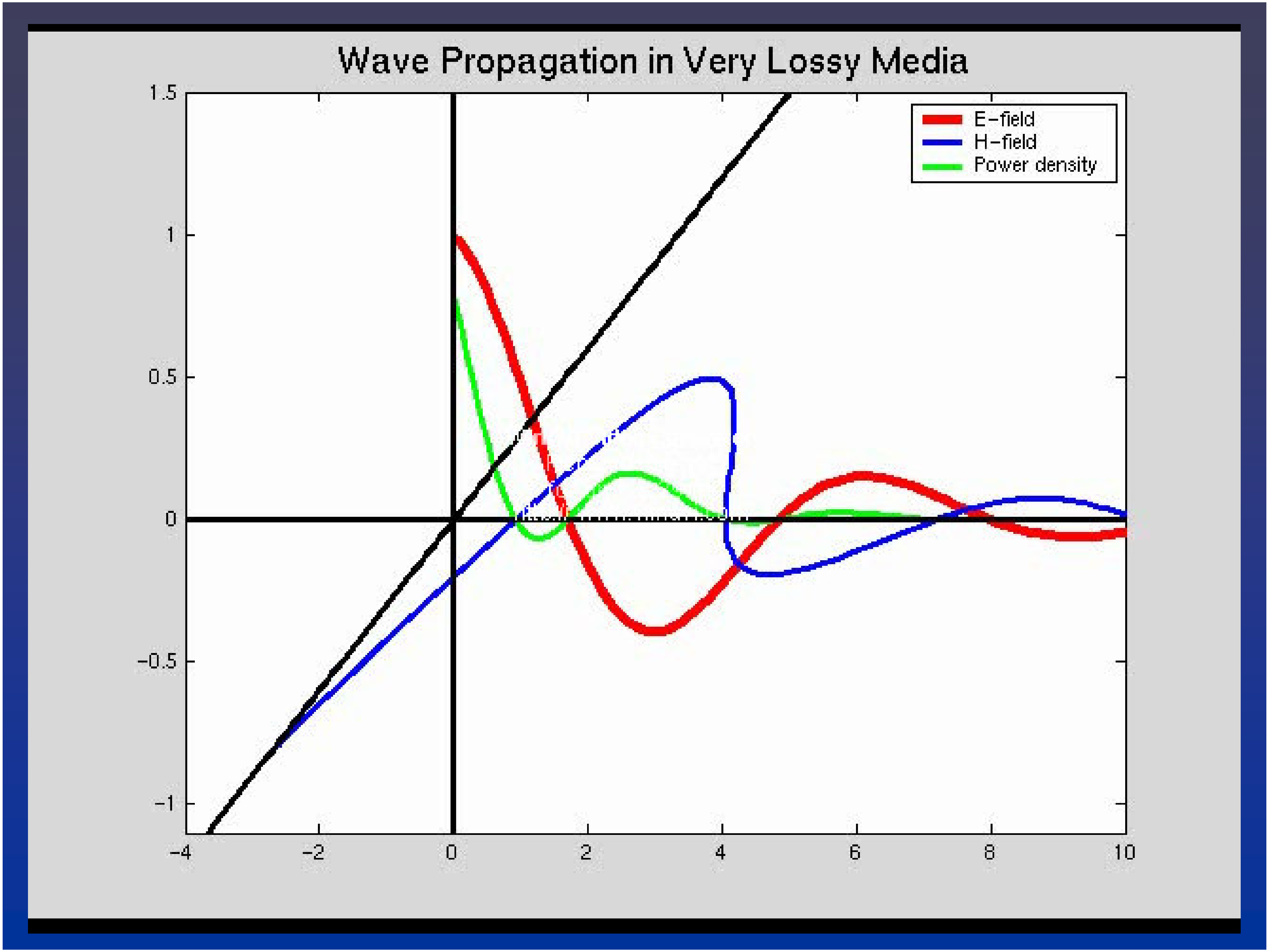
- Desta forma, as expressões para os campos, com $\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}}$:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}} \right) \left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{B}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}} \right) \left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \right) \end{cases}$$

- Que corresponde a uma onda plana propagando-se na direção e sentido de $\vec{K}_r$, com

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{K_r}}$$

(mas com amplitude que não é mais constante $\rightarrow$ decai conforme propaga-se)!


Wave Propagation in Very Lossy Media
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−4
−2
0
2
4
6
8
10
E−field
H−field
Power density