Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

8ª aula – 23/mar/2007

- Na última aula vimos: Ondas planas: $\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial}{\partial t} \to -i\omega} \\ \boxed{\vec{\nabla} \to i\vec{K}} \end{cases}$ (operadores)

- Das equações de Maxwell, considerando as amplitudes dos campos, números complexos:

$$\begin{cases} \boxed{\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(K\hat{u}\cdot\vec{r}-\omega t)}}\ ; \\ sendo\ que: \\ \boxed{\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{\vec{E}}_{0p}\,\hat{p} + \tilde{\vec{E}}_{0s}\,\hat{s}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\varepsilon_R \tilde{\vec{E}}_0}\ ;\ \text{e}\ \boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \omega\tilde{\vec{B}}_0}$$

- A parte real:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0p}\hat{p}\cos\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r} - \phi\right) + E_{0s}\hat{s}\cos\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)\ ; \qquad (1)$$

sendo $\vec{K} = K\hat{u}$

- Para $\begin{cases} \phi = 0 \text{ ou } \pi \Rightarrow \text{ondas linearmente polarizadas} \\ \phi = \pm \pi/2 \Rightarrow \text{ondas elipticamente (circularmente) polarizadas}. \\ \quad (+ \text{ à direita e } - \text{ à esquerda}) \end{cases}$

- Vimos que $\vec{B} \perp \vec{E}$ e $\vec{K}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$; $K = n\omega/c$ $\left(\vec{K} = K\hat{u}\right)$. Então:

$$\vec{B} = \frac{n}{c}\left[E_{0p}\hat{s}\cos\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r} - \phi\right) - E_{0s}\hat{p}\cos\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)\right] \qquad (2)$$

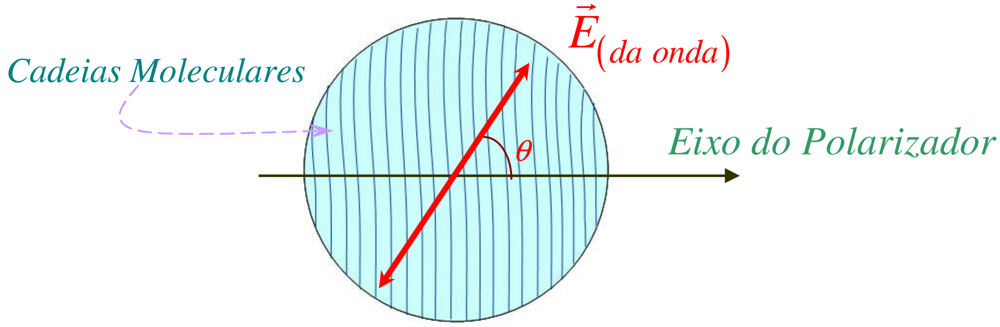
Lei de Malus

- Radiação não-polarizada, quando atravessa certos materiais (*polaróides*) → pode tornar-se polarizada!

- Um polaróide pode ser construído a partir de um material com *cadeias de moléculas* paralelamente direcionadas.

- De forma que os elétrons de valência dessas moléculas passam a mover-se ao longo das cadeias (em resposta a um campo elétrico aplicado) → absorvem energia.

- No entanto, estes elétrons não conseguem passar de uma cadeia para outra (não se movem perpendicularmente às cadeias).
- Na incidência de uma onda EM com $\vec{E}$ oscilando na direção que faz ângulo θ com *Eixo do Polarizador*:



- Então, <u>componente paralela</u> do campo ($E_{//}$), em relação ao *Eixo do Polarizador* ($\therefore\ \perp$ à cadeia) não é absorvida e ***atravessa*** o polaróide.

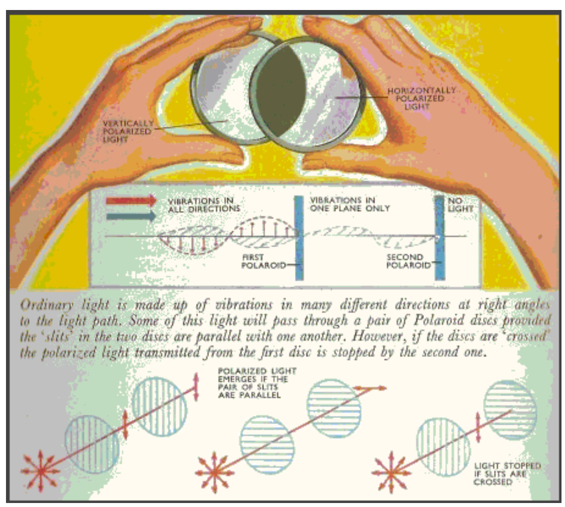
- A componente perpendicular ($E_{\perp}$) ao *Eixo do Polarizador*, no entanto, não <u>atravessa</u> o polaróide (elétrons absorvem a energia incidente).

- Portanto: $E_{transmitido} = E_{0(incidente)} \cos\theta$ $\quad (E = E_0 \cos\theta)$

- Em termos da Intensidade de Radiação, ou seja, potência transmitida ($I \propto |\vec{E}|^2$):

$$\boxed{I = I_0 \cos^2\theta} \qquad \boxed{\textit{Lei de Malus}}$$

- Responda: o que ocorre (com a luz) quando uso dois polaróides?



Densidade e fluxo de energia

- Temos verificado que a representação *complexa* de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é útil, sendo que para se obter as quantidades físicas reais, basta tomar as partes reais das grandezas complexas.

- Isto, porém, pode ser feito porque, nas equações de Maxwell, os campos estão na forma linear, sempre; e as equações são satisfeitas separadamente pelas partes real e imaginária da grandeza complexa.

- No entanto, expressões envolvendo $\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right] & \text{(densidade de energia)} \\ \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} & \text{(energia/área/tempo)} \end{cases}$

<u>não são</u> funções lineares com relação aos campos.

- Nestes casos, faz-se necessário primeiro tomar as partes reais, antes de se efetuarem as multiplicações necessárias:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\,\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{D} + \mathrm{Re}\,\vec{B}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{H}\right] \\ \vec{S} = \mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{H} \end{cases} \quad ; \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \;\; e \;\; \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

- Assim, pegando as partes reais dos campos e realizando as multiplicações (eqs. 1 e 2), obtemos:

$$E^2 = E_{0p}^2\cos^2\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r} - \phi\right) + E_{0s}^2\cos^2\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)$$

$$e$$

$$B^2 = \left(\frac{n}{c}\right)^2\left[\underline{E_{0p}^2\cos^2\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r} - \phi\right) - E_{0s}^2\cos^2\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)}\right] = \left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 = \mu_0\varepsilon E^2 \; .$$

- De forma que, calculando: $\begin{cases} \vec{E}\cdot\vec{D} = \varepsilon E^2 \\ \vec{B}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}B^2 = \dfrac{\cancel{\mu_0}\varepsilon}{\cancel{\mu_0}}E^2 \end{cases}$

- Então, a *densidade volumétrica de energia*, transportada por uma onda EM é:

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \varepsilon E^2\right) = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)E^2 \; , \text{ onde usamos que: } \begin{cases} \dfrac{1}{c} = \mu_0\varepsilon_0 \text{ e } n = \sqrt{\varepsilon_R} \\ \text{sendo } \varepsilon_R = \varepsilon/\varepsilon_0 \end{cases}$$

aqui, vemos que *os dois campos* contribuem <u>na mesma proporção</u> para a energia de uma onda EM (em meios dielétricos)

- Da mesma forma, para o *Vetor de Poynting*:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ E_{0p}\cos\left(\omega t - Kz - \phi\right) & E_{0s}\cos\left(\omega t - Kz\right) & 0 \\ \dfrac{n}{c}E_{0s}\cos\left(\omega t - Kz\right) & \dfrac{n}{c}E_{0p}\cos\left(\omega t - Kz - \phi\right) & 0 \end{vmatrix} ; \text{com } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \left[\frac{n}{\mu_0 c} \underbrace{E_{0p}^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r} - \phi\right)}_{\substack{\text{Componente } \hat{p} \text{ do campo elétrico} \\ \text{ao quadrado}}} + \frac{n}{\mu_0 c} \underbrace{\cos^2 E_{0s}^2 \left(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r}\right)}_{\substack{\text{Componente } \hat{s} \text{ do campo elétrico} \\ \text{ao quadrado}}} \right] \hat{u}$$

$$\left(E_p\right)^2 \qquad + \qquad \left(E_s\right)^2 \quad = \quad E^2$$

- Portanto: $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)E^2\,\hat{u} \quad \overset{\text{(em módulo)}}{\Rightarrow} \quad S = \left(\frac{n}{\mu_0 c}\right)E^2}$

- Ou seja, a ***energia da onda*** é proporcional ao ***quadrado do campo elétrico***.

- Agora, substituindo este último resultado na expressão da *densidade de energia u*:

$$u = \frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{n^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{\mu_0}\,\cancel{c}}{\cancel{n}}S \;\Rightarrow\; u = \frac{n}{c}S \;\overset{\text{(vetorialmente)}}{\Rightarrow}\; \vec{S} = \frac{c}{n}\underbrace{u}_{\text{Densidade de energia}}\,\underbrace{\hat{u}}_{\text{Versor}}$$

- Em termos de velocidade de propagação da onda:

$$\boxed{\vec{v}_p = \frac{c}{n}\hat{u} \;\Rightarrow\; \vec{S} = u\,\vec{v}_p}$$

- Interessante notar, deste último resultado, a analogia com $\vec{J} = \rho\vec{v}$, que define o vetor densidade de corrente elétrica. Ou seja, talvez possamos entender $\vec{S}$ como uma "densidade de corrente energética", ou *densidade de energia* (na verdade potência) que se desloca com a velocidade v_p da onda.

- Outra observação interessante: a dependência de u e $\vec{S}$ (da onda) com o tempo depende do *estado de polarização da onda*! Isto porque, do que vimos na aula passada:

$$E^2(\text{real, para } z=0) \;=\; E_{0p}^2\cos^2\left(\omega t - \phi\right) + E_{0s}^2\cos^2\left(\omega t\right)$$

- Para *polarização circular*: $E_{0s} = E_{0p}$ e $\phi = \pm\,\pi/2$, daí:

$$E^2 = E_{0p}^2 \underbrace{\cos^2\left(\omega t \mp \pi/2\right)}_{=\left(\mp\sin\omega t\right)^2 = \sin^2\omega t} + E_{0s}^2\cos^2\left(\omega t\right) = E_{0p}^2\sin^2\omega t + E_{0s}^2\cos^2\omega t$$

- Na situação que $E_{0p} = E_{0s} = E_0 \;\Rightarrow\; E^2 = E_0^2\underbrace{\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)}_{=1}$

$$\therefore\; E^2 = E_{0p}^2 = E_{0s}^2 \equiv \text{constante no tempo!}$$

- Por outro lado, para *ondas linearmente polarizadas* ($\phi = 0, \pi$):

$$E^2 = E_{0p}^2\cos^2\left(\omega t\right) + E_{0s}^2\cos^2\left(\omega t\right) = \left(E_{0p}^2 + E_{0s}^2\right)\cos^2\left(\omega t\right)$$

varia de 0 a 1 $\Rightarrow E^2$ *é sempre positivo*

- Mas, se os valores de E^2 são diferentes nestes dois casos, como analisar $\vec{S}$?
- Veja que este último resultado, em termos de *valores médios*:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}\left(E_{0p}^2 + E_{0s}^2\right),$$

que poderia ter sido calculado fazendo: (ver apêndice):

$$\boxed{\overline{E^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)}$$

- Igualmente, posso fazer: $\begin{cases} \overline{u} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}^* + \vec{B}\cdot\vec{H}^*\right) \\ \overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) \end{cases}$ *(não importa qual das grandezas eu escolho conjugada)*

no cálculo dos valores médios

Ondas planas monocromáticas em meios condutores

- A solução de onda plana, neste caso, pode ser obtida de maneira bastante análoga ao que fizemos com meios dielétricos. Vamos continuar considerando $\rho = 0$ e *$\vec{J}$ só existirá em resposta ao campo elétrico da onda EM*: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$; $\vec{E} \equiv$ campo da onda EM .
- Desta forma, da *4ª equação de Maxwell*:

$$\left(\tilde{\vec{H}}_0 e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \qquad \left(\tilde{\vec{D}}_0 e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial/\partial t \to i\omega \\ \vec{\nabla}\to i\vec{K} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{i\vec{K}\times\vec{H} = \sigma\vec{E} - i\omega\vec{D}} \Rightarrow$$

$$\left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{K}\times\tilde{\vec{H}}_0 = -\omega\tilde{\vec{D}}_0 - i\sigma\tilde{\vec{E}}_0 \Rightarrow \text{usando} \begin{cases} \vec{B} = \mu_0\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\left(\varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\tilde{\vec{E}}_0}$$

- Note que, fazendo $\sigma \to 0$ caímos no caso do meio dielétrico! (veja aula 7).
- Agora, permitindo que a *constante dielétrica* seja um grandeza *complexa*:

$$\varepsilon_R \to \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega},$$

então, esta 4ª equação de Maxwell adquire a mesma forma que tínhamos para meios dielétricos:

$$\boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0=-\frac{\omega}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\tilde{\vec{E}}_0}\,, \qquad (3)$$

de forma que <u>os mesmos procedimentos anteriores de análise podem ser seguidos</u>. Veja que este é um modelo matemático e a suposição, que está sendo feita, irá facilitar na abordagem dos problemas.

- Assim, da <u>3ª equação de Maxwell</u>:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow \cancel{i}\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0=\cancel{i}\omega\tilde{\vec{B}}_0$$

- Multiplicando vetorialmente ambos os lados $\left(\times\vec{K}\right)$:

$$\vec{K}\times\left(\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0\right)=\omega\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0$$

$$\Downarrow$$

(usando a relação $\left[\ \vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right]$ e a equação (3) acima)

$$\Downarrow$$

$$\vec{K}\left(\underbrace{\vec{K}\cdot\tilde{\vec{E}}_0}_{=0}\right)-\tilde{\vec{E}}_0\left(\underbrace{\vec{K}\cdot\vec{K}}_{=K^2}\right)=-\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\tilde{\vec{E}}_0$$

- Portanto: $K^2=\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\Rightarrow\boxed{K=\frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}=\tilde{n}\,\frac{\omega}{c}}$

Note que eu estou <u>impondo</u> $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}=\tilde{n}$, em vista do resultado anterior, com dielétricos!

- Igualmente, da equação acima, vemos que (<u>mantendo ω real</u>) $\vec{K}$ também corresponde a uma *grandeza complexa* (<u>para meios condutores</u>):

- Então, posso fazer: $\boxed{\tilde{\vec{K}}=\vec{K}_r+i\,\vec{K}_i=\left(K_r+i\,K_i\right)\hat{u}=\tilde{K}\,\hat{u}}$

- Assim procedendo, praticamente todas os resultados obtidos anteriormente para meios dielétricos também valerão, como veremos, para meios condutores, com a ressalva:

$$\boxed{\varepsilon_R,n\text{ e }\vec{K}\ \rightarrow\ \tilde{\varepsilon}_R,\tilde{n}\text{ e }\tilde{\vec{K}}}.$$

- Desta forma, as expressões dos campos, com $\vec{K}\rightarrow\tilde{\vec{K}}$ $\left(\tilde{\vec{K}}\cdot\vec{r}=\vec{K}_r\cdot\vec{r}+i\,\vec{K}_i\cdot\vec{r}\right)$:

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=\tilde{\vec{E}}_0\left(e^{-\vec{K}_i\cdot\vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)\\[2ex]\vec{B}(\vec{r},t)=\tilde{\vec{B}}_0\left(e^{-\vec{K}_i\cdot\vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)\end{cases}$$

- Que correspondem a uma <u>onda plana</u> propagando-se na <u>direção e sentido</u> de $\vec{K}_r$, com $\lambda=\frac{2\pi}{K_r}$, mas com <u>amplitude que não é mais constante</u> (decai exp. ao propaga-se)!

Apêndice

$$\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{r},t\right) = E_{0p}\,\hat{p}\,e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t-\phi\right)} + E_{0s}\,\hat{s}\,e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \quad \Rightarrow$$

$= 0$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}^2 = \vec{E}^{*}\cdot\vec{E} = \left(E_{0p}\,\hat{p}\,e^{-i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t-\phi\right)} + E_{0s}\,\hat{s}\,e^{-i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right)\cdot\left(E_{0p}\,\hat{p}\,e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t-\phi\right)} + E_{0s}\,\hat{s}\,e^{i\left(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \Rightarrow$$

$= 0$

$$\Rightarrow \; E^2 = \; E_{0p}^2 + 0 + 0 + E_{0s}^2 = E_{0p}^2 + E_{0s}^2$$