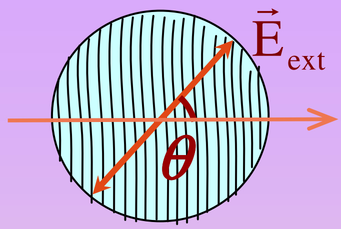
Eletromagnetismo II

9ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Na última aula vimos ...



Eixo do Polarizador

Lei de Malus: $\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$

- Os campos EM, sendo *grandezas complexas*:

$$\begin{cases} u = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right)\cdot \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{D}}\right) + \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right)\cdot \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{H}}\right)\right] \\ \vec{S} = \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right)\times \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{H}}\right) \end{cases}$$

- Para calcular *valores médios*, uma opção é:

$$\begin{cases} \overline{u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\cdot\tilde{\vec{D}}^{*} + \tilde{\vec{B}}\cdot\tilde{\vec{H}}^{*}\right) \\ \overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}}^{*}\right) \end{cases}$$

- Relação entre *S* e *u*, *como vimos:*

$$\boxed{S = \left(\frac{n}{\mu_0\, c}\right) E^2}$$

- Então: $\left(u = \varepsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{n}{c}\right)^2 E^2 \right)$

$$\vec{S} = \frac{c}{n} u\ \hat{u} \quad \Rightarrow \quad sendo \quad \vec{v}_p = \frac{c}{n}\hat{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} = u\,\vec{v}_p}$$

Ondas Planas em Meios Condutores

- Usando $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ na 4ª Eq. de Maxwell:

$$\vec{K} \times \tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\underbrace{\left(\varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}\right)}_{=\tilde{\varepsilon}_R}\tilde{\vec{E}}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{K} \times \tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R \tilde{\vec{E}}_0}$$

Mesma equação que a obtida para Dielétricos!

- De forma que os mesmos procedimentos anteriores podem ser seguidos (é um modelo)

- Da 3ª eq. de Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad i\vec{K}\times\vec{\tilde{E}}_0 = i\omega\vec{\tilde{B}}_0 \quad \overset{(\times\vec{K})}{\Longrightarrow} \quad \vec{K}\times\left(\vec{K}\times\vec{\tilde{E}}_0\right) = \omega\underbrace{\vec{K}\times\vec{\tilde{B}}_0}_{= -\frac{\omega}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\vec{\tilde{E}}_0}$$

$$aplicando\ (BAC - CAB):\quad \boxed{K = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R} = \tilde{n}\frac{\omega}{c}}$$

$K \to \tilde{K}$!!

- E o *Índice de Refração* é complexo! $n \to \boxed{\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}}$

- Quanto ao Vetor de Onda: $\boxed{\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = \left(K_r + iK_i\right)\hat{u} = \tilde{K}\,\hat{u}}$

- Então: $\tilde{\vec{K}} \cdot \vec{r} = \vec{K}_r \cdot \vec{r} + i\,\vec{K}_i \cdot \vec{r};\ e\ como\ \tilde{K} = \dfrac{\tilde{n}\,\omega}{c} \to \boxed{\tilde{n} = n + i\,n_*}$

- E todos os resultados obtidos continuam válidos, desde que:

$$\varepsilon_R, n \text{ e } \vec{K} \to \tilde{\varepsilon}_R, \tilde{n} \text{ e } \tilde{\vec{K}}$$

- Assim os campos, com $\vec{K} \to \tilde{\vec{K}}$:

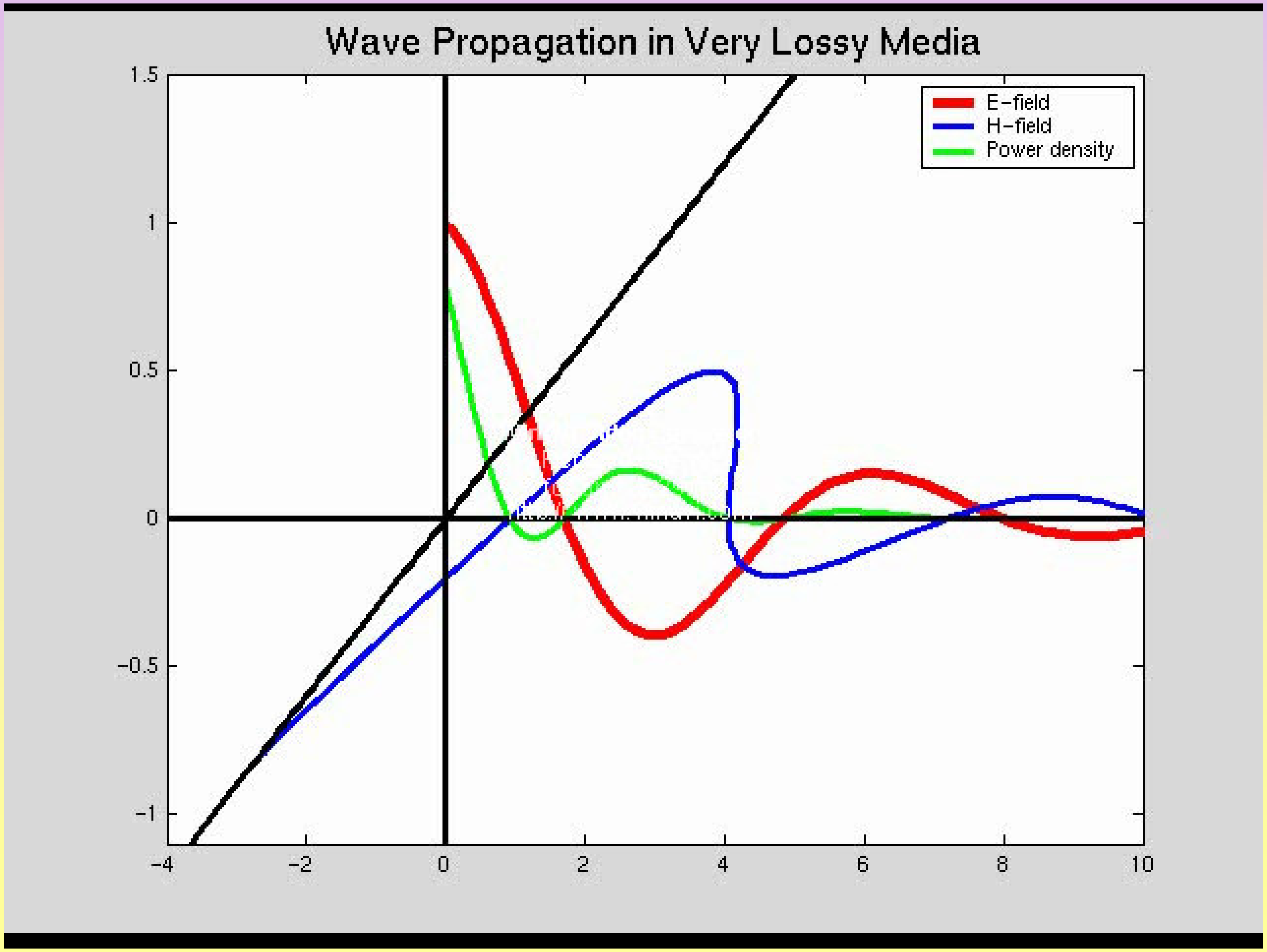
$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)}\right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{B}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)}\right) \end{cases}$$

- Sendo que: $K_r = n\,\omega / c$ e $K_i = n_*\,\omega / c$

- Que corresponde a uma onda plana propagando-se na direção e sentido de $\vec{K}_r$, com:

$$\lambda = \frac{2\pi}{K_r}$$

(mas com amplitude que não é mais constante → decai conforme propaga-se)!



- Agora, retornando às Equações de Maxwell com

$$\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}} = \tilde{K}\,\hat{u}$$

$$\begin{cases} 1^{\circ})\ \tilde{\vec{K}} \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = 0 \rightarrow \hat{u} \cdot \tilde{\vec{E}} = 0 \\ 2^{\circ})\ \hat{u} \cdot \tilde{\vec{B}}_0 = 0 \end{cases}$$

Campos continuam $\perp$ à direção de propagação da onda.

é indiferente $\tilde{\vec{E}}_0$ *ou* $\tilde{\vec{E}}$

- Enquanto que a 3ª Equação de Maxwell:

$$\tilde{\vec{K}} \times \tilde{\vec{E}}_0 = \omega \tilde{\vec{B}}_0 \Rightarrow \tilde{K}\,\hat{u} \times \tilde{\vec{E}}_0 = \omega \tilde{\vec{B}}_0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\vec{B}}_0 = \frac{\tilde{n}}{c}\hat{u} \times \tilde{\vec{E}}_0}$$

- *Posso escrever em termos de* $\vec{E}$ *e* $\vec{B}$, *multiplicando tudo por*: $e^{i\left(\tilde{\vec{K}} \cdot \vec{r} - \omega t\right)}$

$$\rightarrow \tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\tilde{\vec{K}} \cdot \vec{r} - \omega t\right)}$$

- Quero agora mostrar que, pelo fato de ñ ser agora *complexo*, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não serão mais sempre um ⊥ ao outro (a não ser que a polarização seja linear!).

- Por exemplo, (Ex. 17-9 do Reitz-Milf.- pg 367) dado o campo:

$$\boxed{\tilde{\vec{E}}(z=0,t=0) = E_{0p}e^{i\phi}\,\hat{p} + E_{0s}\hat{s}} \quad ; \; \mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right) = E_{0p}\cos\phi\,\hat{p} + E_{0s}\hat{s}$$

vamos calcular $\tilde{\vec{B}}$ usando $\tilde{\vec{B}} = (\tilde{n}/c)\,\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}$ e mostrar que o produto escalar: $\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right)$ não é sempre zero !

- Retomando a base ($\hat{p}$, $\hat{s}$, $\hat{u}$), então:

$$\tilde{\vec{B}} = \left(\frac{n}{c} + i\frac{n_*}{c}\right)\begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_{0p}\,e^{i\phi} & E_{0s} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{n}{c} + i\frac{n_*}{c}\right)\left(-E_{0s}\,\hat{p} + E_{0p}\,e^{i\phi}\,\hat{s}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}} = -\frac{n}{c}E_{0s}\hat{p} + \frac{n}{c}E_{0p}e^{i\phi}\hat{s} - i\frac{n_*}{c}E_{0s}\hat{p} - i\frac{n_*}{c}E_{0p}e^{i\phi}\hat{s} =$$

$$= \underline{-\frac{n}{c}E_{0s}\hat{p}} + \underline{\frac{n}{c}E_{0p}(\cos\phi)\hat{s}} + \frac{n}{c}E_{0p}(i\sin\phi)\hat{s} -$$

$$- i\frac{n_*}{c}E_{0s}\hat{p} + i\frac{n_*}{c}E_{0p}(\cos\phi)\hat{s} + \underline{i\frac{n_*}{c}E_{0p}(i\sin\phi)\hat{s}}$$

- De forma que, pegando os termos reais:

$$\mathrm{Re}\left(\vec{B}\right) = -\frac{n}{c}E_{0s}\hat{p} + \frac{n}{c}E_{0p}\cos\phi\ \hat{s} - \frac{n_*}{c}E_{0p}\sin\phi\ \hat{s}$$

- Enquanto que o <u>campo elétrico</u>, desde o início:

$$\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{E}} = E_{0p}\cos\phi\,\hat{p} + E_{0s}\,\hat{s}$$

- Então: $\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{B}}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{E}} =$

$$= \cancel{-\frac{n}{c}E_{0s}E_{0p}\cos\phi} \cancel{+\frac{n}{c}E_{0p}E_{0s}\cos\phi} - \frac{n_*}{c}E_{0p}E_{0s}\sin\phi$$

- Ou seja, somente quando ϕ = 0 ou ϕ = π (<u>*polarização linear*</u>) é que teremos $\vec{E}\perp\vec{B}$

- Quando ϕ = ± π/2, por exemplo (<u>polarização circular/elíptica</u>): $\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{B}}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{E}} \neq 0$!

- Outra observação interessante: Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não mais oscilam necessariamente em fase. (*quando o meio for condutor*) !

- Para mostrar isso, suponha onda linearmente polarizada ($\phi = 0$, por exemplo). Vou simplificar escolhendo a direção de oscilação como a de $\hat{p}$:

$$\tilde{\vec{E}}(u,t) = E_0\,\hat{p}\,e^{-K_i u}e^{i(K_r u-\omega t)}$$

$$\left(\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{E}_0\,\hat{p} = E_0 e^{i\phi}\,\hat{p} = (\phi = 0) = E_0\,\hat{p}\right)$$

- Novamente, da 3ª Equação de Maxwell:

$$\cancel{i}\,\tilde{\vec{K}}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \cancel{i}\,\omega\tilde{\vec{B}}_0\ ;\quad \tilde{\vec{K}} = \tilde{K}\,\hat{u}\ \Rightarrow\ \boxed{\tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{K}}{\omega}\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}}$$

- Calculando o produto vetorial: $\left(\tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{K}}{\omega}\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}\right)$

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{K}}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_0 e^{-K_i u} e^{i(K_r u-\omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}} = \frac{\tilde{K}}{\omega} E_0 e^{-K_i u}\, e^{i(K_r u-\omega t)}\hat{s}$$

- Escrevendo $\tilde{K} = \left|\tilde{K}\right| e^{i\phi'}$ (*forma polar*):

$$\boxed{\tilde{\vec{B}} = \frac{\left|\tilde{K}\right| e^{i\phi'}}{\omega} E_0\, e^{-K_i u}\, e^{i(K_r u-\omega t)}\hat{s}}$$

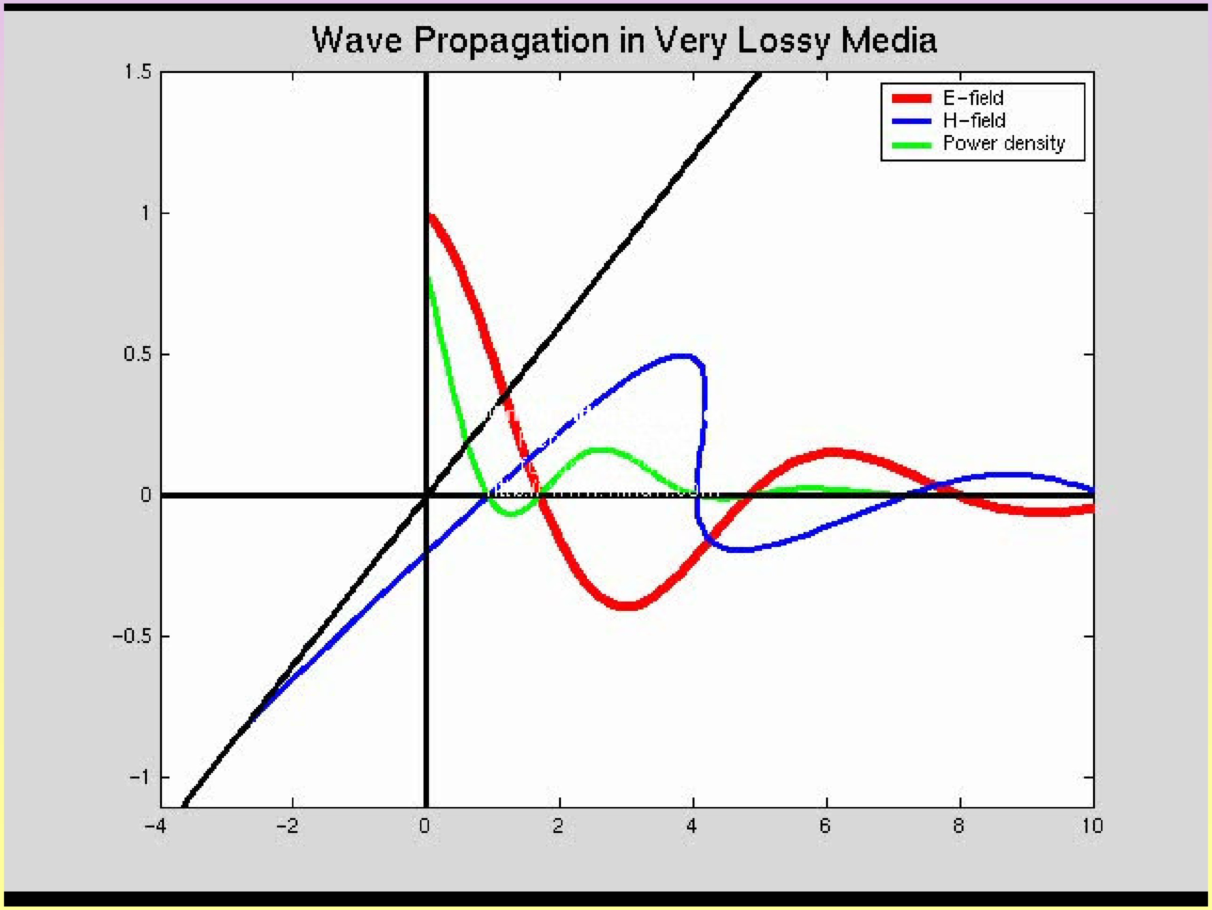
Chamando $\boxed{\frac{\left|\tilde{K}\right| E_0}{\omega} = B_0}$

(amplitude de B)

- Então: $\tilde{\vec{B}} = B_0\,\hat{s}\,e^{-K_i u} e^{i\left(K_r u - \omega t + \phi'\right)}$

diferença de fase entre os campos (surge porque agora o *vetor de onda* é uma *grandeza complexa!*)

- Sendo: $\tilde{\vec{E}} = E_0\,\hat{p}\;e^{-K_i u} e^{i\left(K_r u - \omega t\right)}$



- Um outro ponto interessante: *em meios condutores, a energia da onda não é mais igualmente distribuída entre os campos*!

- Para ver isto, vamos pegar as partes reais dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e calcular:

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \operatorname{Re}\tilde{\vec{E}} \cdot \operatorname{Re}\tilde{\vec{E}} + \frac{1}{\mu}\operatorname{Re}\tilde{\vec{B}} \cdot \operatorname{Re}\tilde{\vec{B}} \right) =$$

também poderia ter usado

$$\overline{u} = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(\varepsilon \tilde{\vec{E}} \cdot \tilde{\vec{E}}^{*} + \frac{1}{\mu}\tilde{\vec{B}} \cdot \tilde{\vec{B}}^{*} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u} \cos^2\left(K_r u - \omega t\right) + \frac{\left|\tilde{K}\right|^2 e^{-2K_i u}}{\mu \omega^2} E_0^2 \cos^2\left(K_r u - \omega t + \phi\right) \right)$$

- Cujo valor médio (cálculo no tempo) será:

$$\overline{u} = \frac{1}{2}E_0^2 e^{-2K_i u}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{\left|\tilde{K}\right|^2}{\mu\omega^2}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\,\right]$$

Já vamos demonstrar isto!

- Antes, porém, note que a contribuição magnética (2º termo)

SEMPRE DOMINA!

- Apenas quando $\sigma = 0$ (*dielétricos*), as contribuições são iguais.

- Porém, em tratando-se de *Bons Condutores*: $\sigma \to \infty$, a energia da onda é quase exclusivamente magnética!

- Vamos agora à demonstração do resultado anterior:

- Como vimos: $\begin{cases} \varepsilon_R \rightarrow \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + \dfrac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \\ \tilde{n} = n + i\,n_* \end{cases}$; sendo que $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}$

- Assim,

$$\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = \underline{\underline{\varepsilon_R}} + \underline{\underline{i\tilde{\varepsilon}_{Ri}}} = (n + i\,n_*)^2 = \underline{\underline{n^2 - n_*^2}} + \underline{\underline{2\,i\,n\,n_*}}$$

- Comparando <u>as partes reais e imaginárias</u>: $\begin{cases} \varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2 - n_*^2 \\ \varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = 2nn_* \end{cases}$

Resolvendo para n e n_* (*2 eqs. a 2 incógnitas*):

$$\begin{cases} n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \\ n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \end{cases}$$

(Raízes positivas foram escolhidas $\rightarrow$ resultados para dielétricos são obtidos quando $\varepsilon_R \rightarrow 0$!)

- Mas: $\boxed{\tilde{K} = \dfrac{\tilde{n}\,\omega}{c}}$; $\boxed{\tilde{n} = n + i\,n_*}$ $\Rightarrow\ |\tilde{K}| = |\tilde{n}|\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{n^2 + n_*^2}$

$$\therefore\quad |\tilde{K}| = \frac{\omega}{c}\left[\cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_R} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} \cancel{-\frac{1}{2}\varepsilon_R} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\omega}{c}\left[\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]^{1/2} = \omega\left[\mu_0\cancel{\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon}{\cancel{\varepsilon_0}}\sqrt{1 + \frac{\cancel{\varepsilon_0^2}}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{\cancel{\varepsilon_0^2}\,\omega^2}}\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu = \mu_0)\ \Rightarrow \boxed{|\tilde{K}| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}}$$ c.q.d.