Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

9ª aula – 27/mar/2007

- Vimos: os campos, sendo grandezas complexas $\rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\,\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{D} + \mathrm{Re}\,\vec{B}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{H}\right] \\ \vec{S} = \mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{H} \end{cases}$

- Para o cálculo de *Valores Médios*, uma opção é fazer:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}^* + \vec{B}\cdot\vec{H}^*\right) \\ \bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) \end{cases}$$

- Relação entre $\vec{S}$ e $\vec{u}$: $\boxed{\vec{S} = u\vec{v}_p = \frac{c}{n}\hat{u}}$; $S = \left(\frac{n}{\mu_0 c}\right)E^2$

- Considerando *Ondas Planas*, em *Meios Condutores*, de forma que: $\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}_{\text{onda EM}}}$

$\Rightarrow$ da 4ª Eq. de Maxwell (Lei de Ampére): $$\boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\left(\varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\tilde{\vec{E}}_0} \qquad (1)$$

- Permitindo que a constante dielétrica seja uma grandeza complexa: $\varepsilon_R \rightarrow \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}$.

- Então a equação (1) assume a mesma forma que a obtida para *dielétricos*:

$$\boxed{\vec{K}\times\tilde{\vec{B}}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\tilde{\varepsilon}_R\tilde{\vec{E}}_0}\,; \qquad (2)$$

de forma que os mesmos procedimentos anteriores podem ser seguidos.

- Agora, da 3ª Equação de Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \cancel{i}\vec{K}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \cancel{i}\omega\tilde{\vec{B}}_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K = \frac{\omega}{c}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R} = \tilde{n}\frac{\omega}{c}, \text{ e } \quad \therefore \boxed{\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}}$$

- Ou seja, da mesma forma que defino $\tilde{\varepsilon}_R$ complexo, posso fazer o mesmo com $\tilde{n}$.

- Considerando, finalmente, que também $\tilde{\vec{K}} \equiv$ grandeza complexa (mantendo ω real), *para meio condutor*, podemos escrever:

$$\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = \left(K_r + iK_i\right)\hat{u} = \tilde{K}\hat{u}$$

$$\therefore \boxed{\tilde{\vec{K}}\cdot\vec{r} = \vec{K}_r\cdot\vec{r} + i\,\vec{K}_i\cdot\vec{r}}$$

- Assim fazendo, praticamente todos os resultados obtidos para meios dielétricos valerão, como veremos, para meios condutores, com as ressalvas:

$$\varepsilon_R, n \text{ e } \vec{K} \;\rightarrow\; \tilde{\varepsilon}_R, \tilde{n} \text{ e } \tilde{\vec{K}},$$

de forma que $\boxed{\tilde{K} = \dfrac{\tilde{n}\omega}{c}}$; $\boxed{\tilde{n} = n + i\,n_*}$.

- Desta forma, as expressões para os campos , com $\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}}$:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0\left(e^{-\vec{K}_i\cdot\vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{B}}_0\left(e^{-\vec{K}_i\cdot\vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \end{cases} \text{sendo que } \boxed{\begin{array}{l} K_r = n\omega/c \\ K_i = n_*\omega/c \end{array}},$$

que corresponde a uma onda plana propagando-se na <u>direção e sentido de</u> $\vec{K}_r$, com $\lambda = 2\pi/K_r$, mas *<u>com amplitude que não é mais constante!</u>* (decai conforme propaga-se)

- Agora, retornando às equações de Maxwell com $\boxed{\vec{K} \rightarrow \tilde{\vec{K}} = \tilde{K}\,\hat{u}}$:

$$\begin{cases} 1^{\text{o}})\ \tilde{\vec{K}}\cdot\tilde{\vec{E}}_0 = 0 \;\rightarrow\; \hat{u}\cdot\tilde{\vec{E}} = 0 \\ 2^{\text{o}})\ \hat{u}\cdot\tilde{\vec{B}}_0 = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow$$

Campos $\tilde{\vec{E}}_0$, $\tilde{\vec{B}}_0$ **continuam $\perp$** à direção de propagação da onda.

é indiferente usar $\tilde{\vec{E}}_0$ ou $\tilde{\vec{E}}$

- De forma que a 3ª equação de Maxwell:

$$\tilde{\vec{K}}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \omega\tilde{\vec{B}}_0 \;\Rightarrow\; \tilde{K}\,\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}_0 = \omega\tilde{\vec{B}}_0 \;\Rightarrow\; \boxed{\tilde{\vec{B}}_0 = \frac{\tilde{n}}{c}\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}_0}$$

que posso também escrever em termos de $\tilde{\vec{E}}$ e $\tilde{\vec{B}}$, ao multiplicar tudo por $e^{i\left(\tilde{\vec{K}}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

- Quero agora mostrar que, pelo fato de $\tilde{n}$ ser agora complexo, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ <u>não mais serão sempre $\perp$ um ao outro</u> (a não ser que a polarização seja linear!) .

- Por exemplo: Dado o campo (*Ex. 17-9 do Reitz-Milford, pg 367*):

$$\tilde{\vec{E}}(z=0,t=0) = E_{0p}e^{i\phi}\hat{p} + E_{0s}\hat{s}$$

vamos calcular $\tilde{\vec{B}}$ usando $\tilde{\vec{B}} = \dfrac{\tilde{n}}{c}\hat{u}\times\tilde{\vec{E}}$, e mostrar que $\text{Re}\left(\tilde{\vec{E}}\right)\cdot\text{Re}\left(\tilde{\vec{B}}\right)$ <u>não é sempre zero</u>.

- Lembrando que ($\hat{p}$, $\hat{s}$, $\hat{u}$) formam uma base $\Rightarrow \tilde{\vec{B}} = \left(\dfrac{n}{c} + i\dfrac{n_*}{c}\right)\begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ \tilde{E}_{0p}e^{i\phi} & \tilde{E}_{0s} & 0 \end{vmatrix} =$

$$\left(\frac{n}{c}+i\frac{n_*}{c}\right)\left(-\tilde{E}_{0s}\hat{p}+\tilde{E}_{0p}e^{i\phi}\hat{s}\right) = -\frac{n}{c}\tilde{E}_{0s}\,\hat{p} + \frac{n}{c}\tilde{E}_{0p}e^{i\phi}\,\hat{s} - i\frac{n_*}{c}\tilde{E}_{0s}\,\hat{p} + i\frac{n_*}{c}\tilde{E}_{0p}e^{i\phi}\,\hat{s} =$$

$$= -\frac{n}{c}\tilde{E}_{0s}\hat{p} + \frac{n}{c}\tilde{E}_{0p}\cos\phi\,\hat{s} + \frac{n}{c}\tilde{E}_{0p}\left(i\sin\phi\right)\hat{s} - i\frac{n_*}{c}\tilde{E}_{0s}\,\hat{p} + i\frac{n_*}{c}\tilde{E}_{0p}\cos\phi\,\hat{s} + i\frac{n_*}{c}\tilde{E}_{0p}\left(i\sin\phi\right)\hat{s}$$

- De forma que: $\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{B}} = -\frac{n}{c}E_{0s}\,\hat{p} + \frac{n}{c}E_{0p}\cos\phi\,\hat{s} - \frac{n_*}{c}E_{0p}\sin\phi\,\hat{s}$,

  enquanto que $\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{E}} = E_{0p}\cos\phi\,\hat{p} + E_{0s}\,\hat{s}$.

- Então: $\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{B}}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{\tilde{E}} = \cancel{-\frac{n}{c}E_{0s}E_{0p}}\cos\phi + \cancel{\frac{n}{c}E_{0p}E_{0s}}\cos\phi - \frac{n_*}{c}E_{0p}E_{0s}\sin\phi$,

  ou seja, somente quando $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$ (*polarização linear*) é que teremos $\vec{E}\perp\vec{B}$!

- Outra observação interessante: Os campos $\vec{\tilde{E}}$ e $\vec{\tilde{B}}$ não mais oscilam necessariamente em fase, quando o meio for condutor. Para mostrar isso, suponha onda linearmente polarizada ($\phi = 0$):

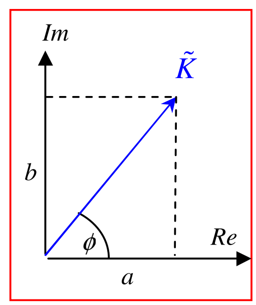
$$\boxed{\phi = \phi_B - \phi_E} \qquad \vec{\tilde{E}}(u,t) = E_0\,\hat{p}\,e^{-K_i u}\,e^{i(K_r u - \omega t)}$$

Isso porque

$$\boxed{\vec{\tilde{E}}_0 = \tilde{E}_0\hat{p} = E_0 e^{i\phi}\hat{p} = (p/\phi = 0) = E_0\hat{p}}$$

- Novamente, da 3ª Equação de Maxwell: $\vec{\tilde{K}}\times\vec{\tilde{E}}_0 = \omega\vec{\tilde{B}}_0$; $\vec{\tilde{K}} = \tilde{K}\,\hat{u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tilde{B}} = \frac{\tilde{K}}{\omega}\hat{u}\times\vec{\tilde{E}} = \frac{\tilde{K}}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{s} & \hat{u} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_0 e^{-K_i u} e^{i(K_r u - \omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\tilde{K}}{\omega}E_0 e^{-K_i u} e^{-i(K_r u - \omega t)}\hat{s}\text{ ; mas: } \tilde{K} = |\tilde{K}|e^{i\phi} \text{ (forma polar)}$$

$$\therefore \boxed{\vec{\tilde{B}} = \frac{|\tilde{K}|e^{i\phi}}{\omega}E_0\,e^{-K_i u}e^{i(K_r u - \omega t)}\hat{s}}$$

$$\boxed{\tilde{K} = a + ib = |\tilde{K}|(\cos\phi + i\sin\phi) = |\tilde{K}|\,e^{i\phi}}$$

- Chamando $\frac{|\vec{K}|E_0}{\omega} = B_0$ (amplitude do *campo magnético da onda*):

$$\boxed{\vec{\tilde{B}} = B_0\,\hat{s}\,e^{-K_i u}e^{i(K_r u - \omega t + \phi)}}$$

- Uma outra observação interessante: Em meios condutores, a <u>energia da *onda não é mais igualmente distribuída* entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$</u> !

- Vamos utilizar os campos acima para ver isto (tomando as *partes reais*):

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\,\mathrm{Re}\,\vec{E}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{E} + \frac{1}{\mu}\mathrm{Re}\,\vec{B}\cdot\mathrm{Re}\,\vec{B}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u}\cos^2(K_r u - \omega t) + \frac{|\tilde{K}|^2 e^{-2K_i u}}{\mu\omega^2}E_0^2\cos^2(K_r u - \omega t + \phi)\right)$$

- Calculando-se a média temporal $\left(\text{ou } \bar{u} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*\right)\right)$:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}E_0^2 e^{-2K_i u}\,\frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{|\tilde{K}|^2}{\mu\omega^2}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]$$

vou mostrar isto na próxima aula

- Note que a <u>contribuição magnética</u> (2^o *termo*) sempre <u>domin</u>a.

- Quando σ = 0 (dielétricos), a contribuição torna-se igual, mas, no caso de um bom condutor, $\sigma \to \infty$, energia da onda é <u>quase exclusivamente magnética</u>:

$$\boxed{\bar{u} \approx \frac{1}{4}\frac{\sigma}{\omega}E_0^2 e^{-2K_i u}}$$

- Por outro lado, quanto ao <u>fluxo de energia</u> dado pelo *Vetor de Poynting* (tomando novamente as partes reais):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(\mathrm{Re}\,\vec{E}\times\mathrm{Re}\,\vec{B}\right) = \frac{1}{\mu}\left(E_0 e^{-K_i u}\cos(K_r u - \omega t)\,\hat{p}\times\frac{|\tilde{K}|}{\omega}E_0 e^{-K_i u}\cos(K_r u - \omega t + \phi)\,\hat{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ usando que } \quad \hat{p}\times\hat{s} = \hat{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{S} = \frac{|\tilde{K}|E_0^2}{\mu\omega}e^{-2K_i u}\cos(K_r u - \omega t)\cos(K_r u - \omega t + \phi)\,\hat{u}$$

- Calculando o <u>valor médio</u> de $\vec{S}$ (usando que $\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \cos\theta\cos(\theta-\phi)\,d\theta = \frac{1}{2}\cos\phi$, como mostraremos na próxima aula): $\bar{\vec{S}} = \frac{E_0^2}{2\mu\omega}e^{-2K_i u}\underbrace{|\tilde{K}|\cos\phi}_{\equiv K_r}\,\hat{u} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{K_r E_0^2}{\mu\omega}e^{-2K_i u}\,\hat{u}}$$

- Ou seja, enquanto a onda vai penetrando no condutor a energia decresce. Esta perda aquece o condutor por efeito Joule. Veremos isso também na próxima aula.