INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

10ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Como vimos na última aula:

$$\varepsilon_R \to \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$

$$\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\,\varepsilon_{Ri}$$

Sendo que:
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\varepsilon_R = \varepsilon / \varepsilon_0} \\ \boxed{\varepsilon_{Ri} = \sigma / \varepsilon_0 \omega} \end{array} \right.$$

- Índice de Refração: $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}$ sendo: $\tilde{n} = n + i\,n_*$

- Vetor de onda: $\vec{\tilde{K}} = \vec{K}_r + i\,\vec{K}_i = \left(K_r + iK_i\right)\hat{u} = \tilde{K}\,\hat{u}$

$$\lambda = 2\pi / K_r \quad ; \quad \boxed{\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\omega}{c}}$$

- Nas Equações de Maxwell:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)}\right) \\ \tilde{\vec{B}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{B}}_0 \left(e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}\right)\left(e^{i\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right)}\right) \end{cases}$$

- Agora, vimos também:

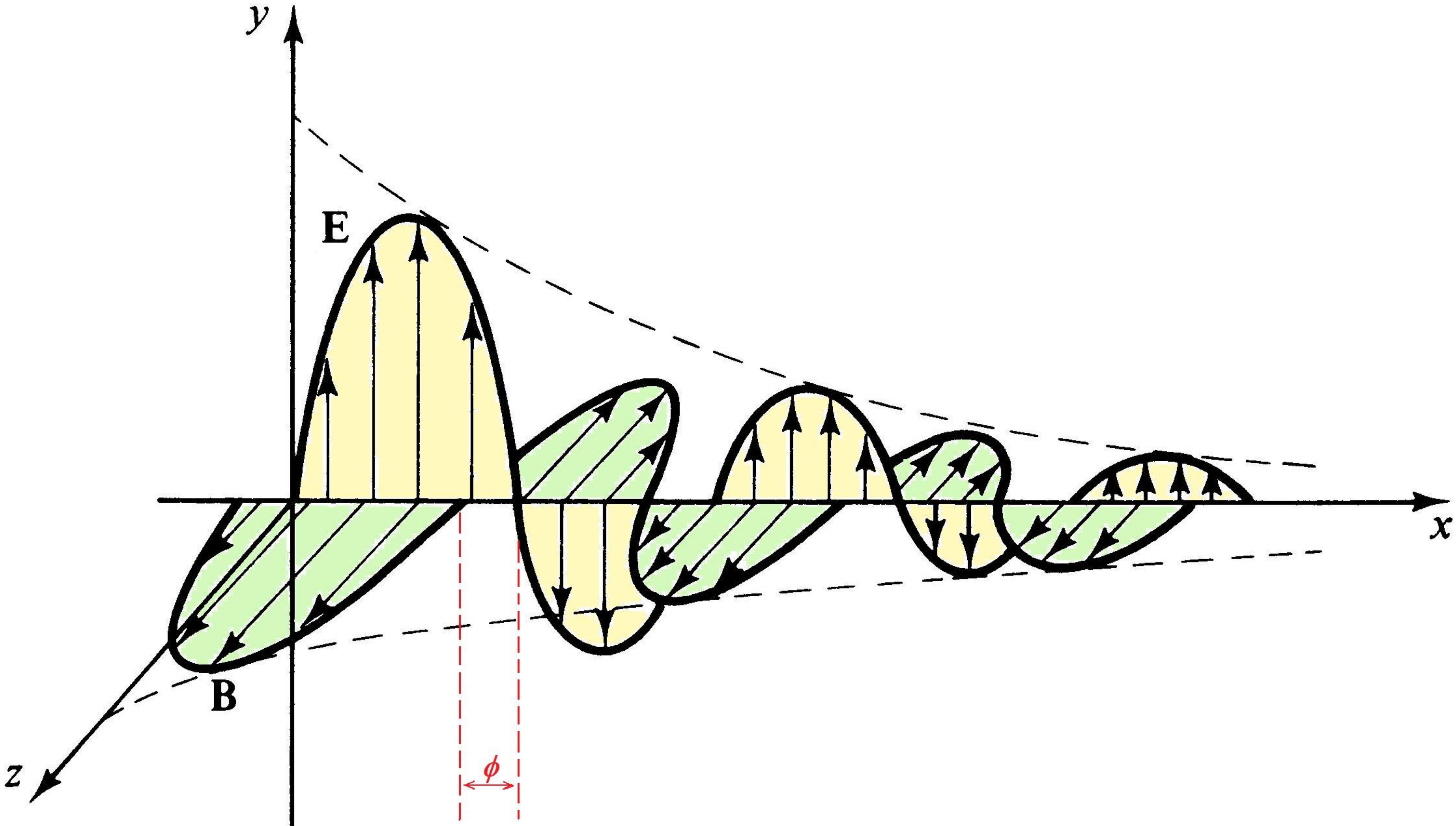
i) Campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ continuam perpendiculares à direção de propagação da onda.

ii) $\mathrm{Re}\,\tilde{\vec{B}} \cdot \mathrm{Re}\,\tilde{\vec{E}} = -\dfrac{n_*}{c} E_{0p} E_{0s} \sin\phi \quad \Rightarrow$ só quando $\phi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ (Polarização Linear)

é que teremos $\vec{E} \perp \vec{B}$

iii) $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não oscilam em fase:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{B}} = B_0\, \hat{s}\; e^{-K_i u} e^{i\left(K_r u - \omega t + \phi'\right)} \\ \tilde{\vec{E}} = E_0\, \hat{p}\; e^{-K_i u} e^{i\left(K_r u - \omega t\right)} \end{cases}$$


y
E
B
x
z
ϕ

- Um outro ponto interessante: *em meios condutores, a energia da onda não é mais igualmente distribuída entre os campos*!

- Para ver isto, pegamos as *partes reais* dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, e calculamos o valor médio da densidade de eneria:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\left(\overline{\varepsilon \operatorname{Re}\tilde{\vec{E}} \cdot \operatorname{Re}\tilde{\vec{E}}} + \overline{\frac{1}{\mu}\operatorname{Re}\tilde{\vec{B}} \cdot \operatorname{Re}\tilde{\vec{B}}} \right)$$

vamos demonstrar agora a igualdade

- Obtendo:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} E_0^2 e^{-2K_i u} \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{|\tilde{K}|^2}{\mu\omega^2} \right) = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \right)^2} \right]$$

- Ou seja, a contribuição magnética (2º termo) domina!

- Apenas quando $\sigma = 0$ (*dielétricos*), as contribuições são iguais; e para *bons condutores*: ($\sigma \rightarrow \infty$), a energia da onda é essencial-mente magnética!

- Para demonstrar este resultado $\left(\bar{u} = \frac{1}{4}\varepsilon E_0^2 e^{-2K_i u}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}\right]\right)$

sendo que $\underline{\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}}$

- Lembrar que:

$e\ que\ \underline{\tilde{n} = n + i\,n_*}$

$$\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \varepsilon_R + i\tilde{\varepsilon}_{Ri} = \left(n + i\,n_*\right)^2 = n^2 - n_*^2 + 2i\,n\,n_*$$

- Comparando as partes *real* e *imaginária*:

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2 - n_*^2 \\[2ex] \varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 2nn_* \end{cases}$$

resolvendo para n e n_* (2 eqs. a 2 incógnitas)

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)}} \\ \boxed{n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)}} \end{cases}$$

(raízes positivas foram escolhidas → resultados para dielétricos são obtidos quando $\varepsilon_R \to 0$!)

- Mas: $\tilde{K} = \dfrac{\tilde{n}\,\omega}{c}$; $\tilde{n} = n + i\,n_* \Rightarrow \left|\tilde{K}\right| = \left|\tilde{n}\right|\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{n^2 + {n_*}^2}$

$$\therefore \qquad \left|\tilde{K}\right| = \frac{\omega}{c}\left[\cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_R} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} - \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon_R} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{\omega}{c}\left[\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]^{1/2} = \omega\left[\mu_0 \cancel{\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon}{\cancel{\varepsilon_0}}\sqrt{1 + \frac{\cancel{\varepsilon_0^2}}{\varepsilon^2}\,\frac{\sigma^2}{\cancel{\varepsilon_0^2}\,\omega^2}}\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu = \mu_0) \Rightarrow \boxed{\left|\tilde{K}\right| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}}}$$

c.q.d.

- Da mesma forma como calculamos n e n_*, o Griffiths calcula :

$$\left\{\begin{array}{l}\boxed{K_r = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}} \\ \boxed{K_i = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2}}\end{array}\right. ;\ \tilde{K} = K_r + i\,\vec{K}_i\ ;\ \left\{\begin{array}{l}K_r = \frac{n\,\omega}{c} \\ K_i = \frac{n_*\omega}{c}\end{array}\right.$$

(Verifique !)

- Mas, vejamos agora o que ocorre com o "*fluxo de energia*" (*Vetor de Poynting*) $\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(\mathrm{Re}\,\tilde{\vec{E}} \times \mathrm{Re}\,\tilde{\vec{B}}\right)$ para a onda propagando-se no meio condutor:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\left(E_0\, e^{-K_i u}\cos\left(K_r u - \omega t\right)\hat{p} \times \frac{\left|\tilde{K}\right|}{\omega}E_0\, e^{-K_i u}\cos\left(K_r u - \omega t + \phi\right)\hat{s}\right)$$

recordando a base: $\left(\hat{p},\hat{s},\hat{u}\right) \rightarrow \hat{p}\times\hat{s} = \hat{u}$

- Então: $\vec{S} = \dfrac{\left|\tilde{K}\right| E_0^2}{\mu\omega} e^{-2K_i u} \cos\left(K_r u - \omega t\right)\cos\left(K_r u - \omega t + \phi\right)\hat{u}$

- Quero agora calcular $\overline{\vec{S}}$.

- Mas, para isto, precisamos saber quanto vale a integral:

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\theta\cos\left(\theta+\phi\right)d\theta = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\theta\left(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi\right)d\theta$$

$$= \cos\phi\underbrace{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2\theta\, d\theta}_{=1/2} - \cancel{\sin\phi\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\theta\sin\theta\, d\theta} = \frac{1}{2}\cos\phi$$

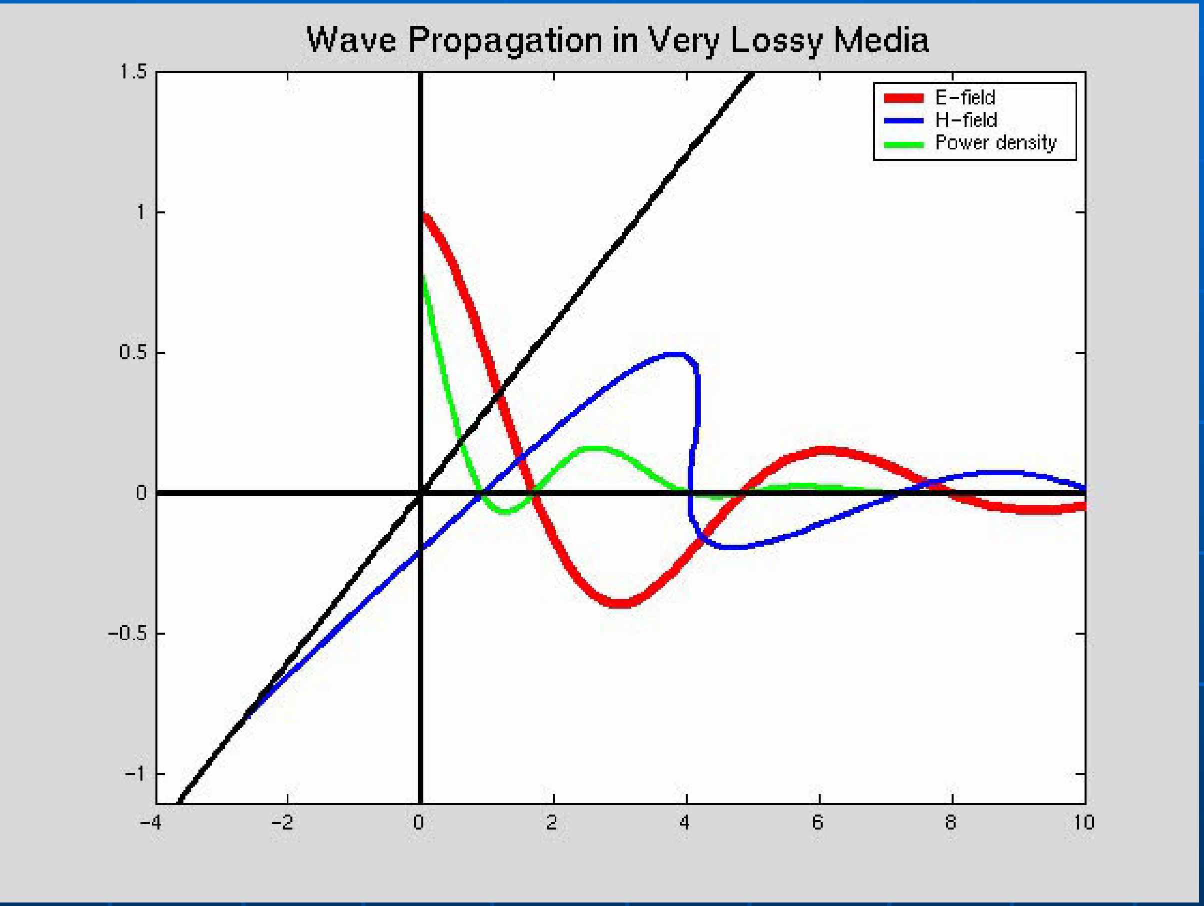
0

½ sin (2θ)

- Portanto,

$$\overline{\vec{S}} = \frac{E_0^2}{2\mu\omega}e^{-2K_i u}\overbrace{\left|\tilde{K}\right|\cos\phi}^{=K_r}\hat{u} \Rightarrow \boxed{\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{K_r E_0^2}{\mu\omega}e^{-2K_i u}\hat{u}}$$

• Ou seja, enquanto a onda vai penetrando no condutor, a energia decresce; esta perda aquece o condutor por efeito Joule.



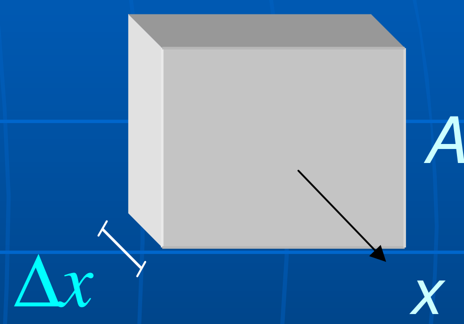
Vamos agora mostrar que a energia perdida pela onda, devido ao fator $e^{-2K_i u}$ do $\vec{S}$, que se propaga na direção do eixo x, transforma-se em calor por efeito Joule (ver ex.6 cap. 8 - Griff.).

- Como já vimos, a *“Potência Joule”* pode ser escrita como

$$\boxed{P_J = \int \left(\vec{E} \cdot \vec{J} \right) dV} \quad ; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- Calculando $\overline{P_J}$ para uma “fatia retangular” do condutor, de espessura infinitesimal Δx e área A:

$$\overline{P_J} = \sigma \overline{E^2} \, A \, \Delta x = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 e^{-2K_i x} A \, \Delta x$$



- A pergunta é: Esta potência dissipada por efeito Joule equivale à potência média perdida pelos campos, segundo o Vetor de Poynting?

- Para verificar isto, vamos calcular o fluxo médio da Potência *para o interior do condutor* (vindo de trás):

$$\overline{P}_{entrando} = \int \overline{\vec{S}} \cdot \hat{n}\, dA = \left(\overline{S}\right)\left(A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A\, e^{-2K_i x}$$

$$\left(pois\ \overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{K_r E_0^2}{\mu\omega} e^{-2K_i u}\, \hat{u} \right)$$

enquanto que o fluxo *saindo* do condutor (pela frente) em $x + \Delta x$:

$$\overline{P}_{saindo} = \frac{1}{2}\frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A\, e^{-2K_i (x+\Delta x)} = \frac{1}{2}\frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A\, e^{-2K_i x} e^{-2K_i \Delta x}$$

- Para Δx muito pequeno: $\left(f(\breve{x}) = f(\breve{x})\big|_{\breve{x}=0} + f'(\breve{x})\big|_{\breve{x}=0} \left(\breve{x} - 0\right) + \ldots \right)$

$$e^{-2K_i \Delta x} \sim 1 - 2K_i e^{-2K_i \Delta x}\Big|_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x - 0\right) = 1 - 2K_i \Delta x$$

$$\therefore\ \Delta \overline{P} = \frac{1}{2}\frac{K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i x} \left(\cancel{1} - 2K_i \Delta x - \cancel{1}\right) = -\frac{K_i K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i x} \Delta x$$

Indica que a energia "saindo" é menor que a "entrando"

- Agora, para mostrar que as expressões obtidas:

$$\overline{P_J} = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2K_i x} A\,\Delta x \qquad \left(P_J = \int\left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)dV \;\; ; \;\; \vec{J} = \sigma\vec{E}\right)$$

$$\Delta\overline{P} = -\frac{K_i K_r}{\mu\omega} E_0^2 A e^{-2K_i x}\Delta x \qquad \left(\Delta\overline{P} = P_{saindo} - P_{entrando}\right)$$

são equivalentes, devemos mostrar que:

$$\frac{1}{2}\sigma = \frac{K_i K_r}{\mu\omega} \Rightarrow K_i K_r = \frac{1}{2}\mu\omega\sigma$$; o que é verdade, pois:

$$K_i K_r = \left\{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2}\right\}\cdot\left\{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\left(\cancel{1}+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)-\cancel{\sqrt{\ldots}}+\cancel{\sqrt{\ldots}}-\cancel{1}\right]^{1/2} = \cancel{\omega^2}\frac{\varepsilon\mu}{2}\frac{\sigma}{\cancel{\varepsilon\omega}} \quad \checkmark$$

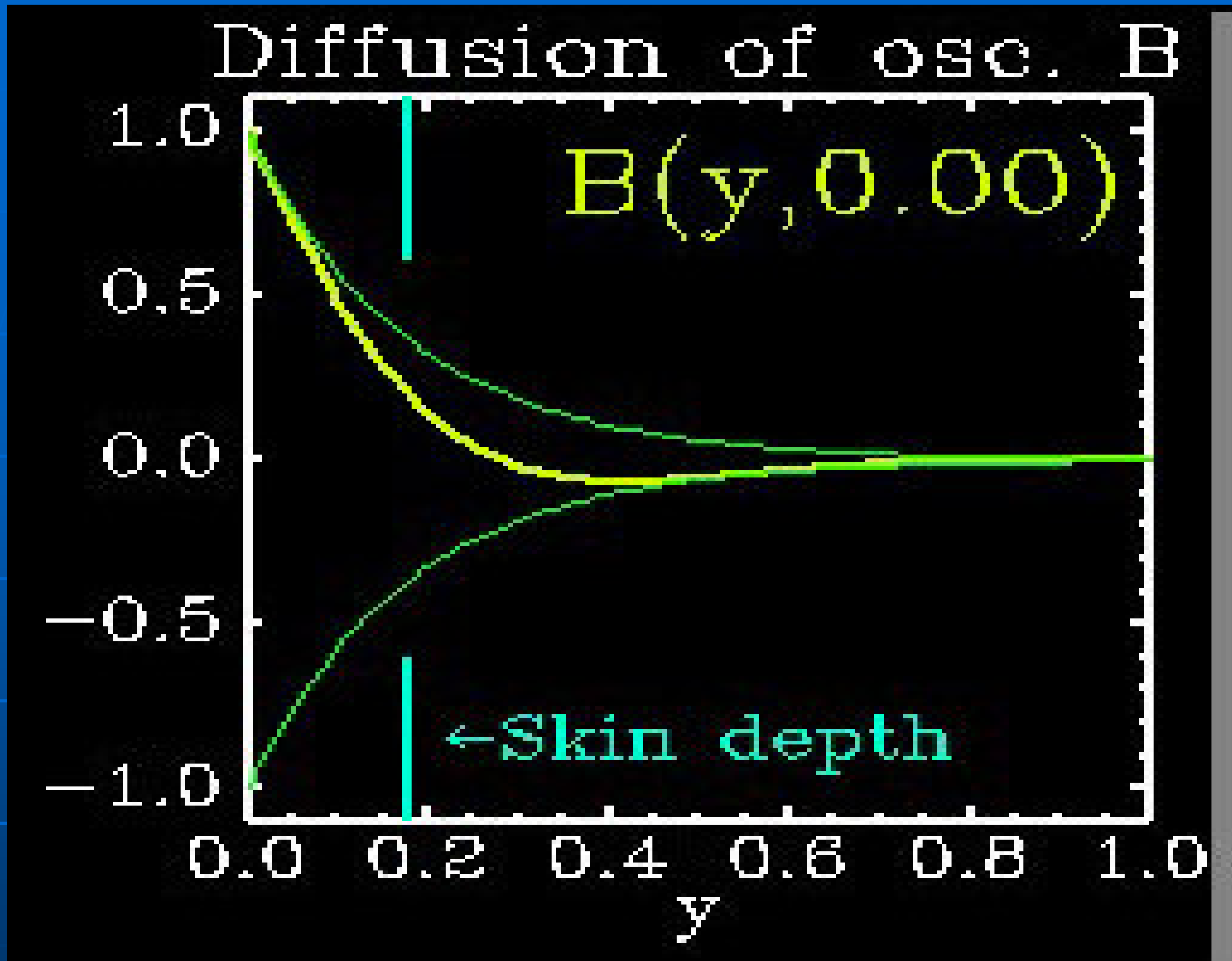
- É costume definir a grandeza “Profundidade de Atenuação” (ou “Penetração”) :

$$\boxed{\delta = \frac{c}{n_* \omega} = \frac{1}{K_i}}$$

como sendo a *distância* (na direção da propagação) em que a amplitude do campo decai a

$\frac{1}{e} \approx 0,37$ do seu valor original

$$\left\{ \tilde{\vec{E}} = \left(\tilde{\vec{E}}_0 e^{-K_i u} \right) \left(e^{i(K_r u - \omega t)} \right) \right\}$$



- Sendo: $\boxed{\delta = \dfrac{c}{n_* \omega} = \dfrac{1}{K_i}}$ observe que, para dielétricos, δ tende a ser infinito, enquanto que para condutores, isto só ocorre quando $\omega \to 0$