Eletromagnetismo II

11ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Das últimas aulas:

- Ondas EM em meios condutores:

i) $\vec{E} \perp \vec{B}$ somente quando polarização é linear ($\phi = 0$ ou π);

ii) Mesmo quando polarização é linear, $\vec{B}$ e $\vec{E}$ estão defasados;

iii) A <u>componente magnética</u> da energia <u>domina</u>;

iv) Energia "perdida" pela onda EM é <u>dissipada no condutor</u> (por efeito Joule)

- Considerando:

$$\boxed{\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\omega}{c}} \; ; \; \boxed{\tilde{n} = n + i\, n_*} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \\ n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \end{cases}$$

- Considerando que: $\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\varepsilon_{Ri} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \dfrac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$

e

$$\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = \left(K_r + iK_i\right)\hat{u} = \tilde{K}\,\hat{u}$$

- Temos também: $\begin{cases} \boxed{K_r = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2}} \\ \boxed{K_i = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2}} \end{cases}$

- *Valor Médio* do Vetor de Poynting: $\boxed{\bar{\vec{S}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{K_r E_0^2}{\mu\omega} e^{-2K_i u}\,\hat{u}}$

- Voltando agora à expressão de $\vec{E}$ para ondas propagando-se na direção de û , *em um meio condutor*:

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\tilde{K}u - \omega t\right)} = \left(\tilde{K} = K_r + iK_i\right) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-K_i u} e^{i\left(K_r u - \omega t\right)}$$

(e o mesmo para $\vec{B}$)

sendo que $\begin{cases} \boxed{K_r = \dfrac{n\omega}{c}} \\ \boxed{K_i = \dfrac{n_* \omega}{c}} \end{cases}$

(n e n_* são as *ctes. óticas*)

de onde vemos que $K_i = n_* \omega / c$ é a "*constante de atenuação*", que define quão rapidamente decaem as amplitudes dos campos com a distância.

- Definiu-se a grandeza "profundidade de penetração" (ou *atenuação*):

$$\boxed{\delta = \frac{1}{K_i} = \frac{c}{n_* \omega}}$$

como sendo a distância (na direção de $\hat{u}$) em que as amplitudes dos campos decaem a $1/e \approx 0,37$ de seu valor.

- Note que, sendo $\delta = c/n_* \omega = \delta(\omega, n_*)$ $\rightarrow$ em dielétricos essa distância tende a ser infinita, enquanto que, para condutores, isso só ocorrerá quando $\omega \rightarrow 0$!

- Agora, com relação às expressões: $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{n = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)}} \\ \boxed{n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)}} \end{array} \right.$

- Talvez fosse possível simplificá-las, considerando algumas situações:

1º caso: Meio é um "*mau condutor*": (lembrando: $\varepsilon_R \rightarrow \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\varepsilon_{Ri}$)

$$\boxed{\varepsilon_{Ri} << \varepsilon_R} \Rightarrow \frac{\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}\omega} << \frac{\varepsilon}{\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\omega >> \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

- Sendo $\varepsilon_{Ri} << \varepsilon_R \left(\Rightarrow \omega >> \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)$ $\Rightarrow$ substituindo: $\boxed{n \approx \sqrt{\varepsilon_R}}$ e $n_* \rightarrow 0$

- Quanto a $n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)}$, vamos expandir a raiz:

$$\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} = \varepsilon_R\left(1 + \left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2\right)^{1/2} = \left[(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx\right] = (\varepsilon_R)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2\right]$$

- De forma que, substituindo:

$$n_* = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\cancel{-\varepsilon_R} + \cancel{\varepsilon_R} + \frac{\varepsilon_R}{2}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_R}{4}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2} = \frac{\varepsilon_{Ri}}{2\underbrace{\sqrt{\varepsilon_R}}_{=\,n}}$$

$\therefore$ $\boxed{n_*^{(mau)} \approx \dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2n}}$ e também (como já vimos): $\boxed{n^{(mau)} \approx \sqrt{\varepsilon_R}}$

- Desta forma: $\delta = \dfrac{c}{n_* \omega} = \dfrac{c}{\omega}\dfrac{2n}{\varepsilon_{Ri}} = \left(\varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) = \dfrac{2nc}{\cancel{\omega}}\dfrac{\varepsilon_0 \cancel{\omega}}{\sigma}$

$\therefore \boxed{\delta^{(mau)} = \dfrac{2nc\varepsilon_0}{\sigma}}$

Ou seja, no caso de mau condutores, em 1ª aproximação, a profundidade de penetração não depende de ω !

- Em termos de K_r e K_i (ainda no caso de *mau condutores*):

$$\begin{cases} K_r = \dfrac{n\omega}{c} \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon_R \omega^2}{c^2}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\omega^2 \cancel{\varepsilon_0} \mu_0}{\cancel{\varepsilon_0}}} \Rightarrow K_r \simeq \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\ K_i = \dfrac{n_*\omega}{c} \approx \dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2n}\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \cancel{\omega}}\dfrac{1}{2n}\dfrac{\cancel{\omega}}{c} = \left(n = \sqrt{\varepsilon_R} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \right) = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\dfrac{1}{4c^2}\dfrac{\cancel{\varepsilon_0}}{\varepsilon}} = \end{cases}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{4}\frac{\mu\varepsilon_0}{\varepsilon}} \Rightarrow \boxed{K_i^{(mau)} \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

2º caso) Meio é um *bom condutor*

$$\boxed{\varepsilon_{Ri} >> \varepsilon_R} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} >> \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\omega << \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

- Neste caso, desprezando ε_R na raiz: $\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} \approx \varepsilon_{Ri} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \sim \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_R + \varepsilon_{Ri})} \Rightarrow \boxed{n \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_{Ri}}{2}}} \\ n_* \sim \sqrt{\frac{1}{2}(-\varepsilon_R + \varepsilon_{Ri})} \Rightarrow \boxed{n_* \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_{Ri}}{2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n^{(bom)} \approx n_*^{(bom)} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_{Ri}}{2}}} \\ \text{e sendo } K = n\omega/c: \\ \boxed{K_r^{(bom)} \sim K_i^{(bom)} \sim \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}} \end{cases}$$

- Agora, como

$$\underset{1/K_i}{\underset{/\!/}{\delta}} = \frac{c}{n_* \omega} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_{Ri}} \frac{c^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \cancel{\omega}}{\sigma} \frac{c^2}{\cancel{\omega^2}}} = \sqrt{\frac{2\cancel{\varepsilon_0}}{\sigma} \frac{1}{\omega\mu\cancel{\varepsilon_0}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^{(bom)} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}}$$

Portanto, quando $\omega\uparrow$, $\delta\downarrow$ e vice-versa!

(Note a dependência de δ com o inverso da raiz de ω)

- Ou seja, a discussão do que é "*bom*" ou "*mau*" condutor depende da freqüência ω de trabalho: a mesma substância pode ser um bom condutor a baixas freqüências e mau condutor a freqüências elevadas.

Exemplo 1: Metais em geral possuem $\sigma \sim 10^{7} \left(\Omega^{-1}.\, m^{-1}\right)$

(não varia muito com a freqüência)

$\left(\Omega^{-1} \equiv mho \equiv Siemens\right)$

e, também: $\mu \sim \mu_0 \sim 10^{-8}\, N/A^{2}$ e $\varepsilon \sim 10^{-11}\, C^{2}/N\cdot m^{2}$

a) Para qual faixa de freqüências eles são bons condutores?

b) Qual o valor típico de profundidade de atenuação, supondo

$\omega = 2\pi f \sim 10^{15}\, s^{-1}$ (faixa do visível)?

a) Bons condutores: $\omega << \dfrac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \omega << \dfrac{10^7}{10^{-11}} \sim 10^{18}\, s^{-1}$

- Ou seja: $f << \dfrac{10^{18}}{2\pi} Hz$

$\therefore$ Metais são <u>bons condutores</u> até $\pm$ <u>a faixa do Ultravioleta</u>.

b) Para $f \sim \omega \sim 10^{15}\, Hz \Rightarrow$ são bons condutores!!

- Então: $\delta^{(bom)} = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma}} \sim \sqrt{\dfrac{2}{10^{-8}.\,10^{15}.\,10^{7}}} \quad \therefore \quad \delta = 10^{-8}\, m$

Exemplo 2: Calcule a profundidade de atenuação para a prata, com $\sigma = 3\times10^{7}\,(\Omega.m)^{-1}$, para ondas com $f = 10^{10}Hz$ (μ-ondas)

- Neste caso: ($\delta^{(bom)} = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma}}$)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(4\pi\times10^{-7})(2\pi\times10^{10})(3\times10^{7})}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \cong 9,2\times10^{-7}\,m \cong 0,9\,\mu m$$

- Ou seja, pelo fato da prata ser um excelente condutor $\Rightarrow$ δ é muito pequeno e na construção de guias de ondas, por exemplo, basta um banho de prata em latão, em vez de se usar peças de prata maciça.

(causa o mesmo efeito)

Material	Resistividade
Alumínio	$2,65\times10^{-8}$
Cobre	$1,67\times10^{-8}$
Ouro	$2,35\times10^{-8}$
Ferro	$9,71\times10^{-8}$
Níquel	$6,84\times10^{-8}$
Prata	$1,59\times10^{-8}$
Mercúrio	$95,8\times10^{-8}$
Tungstênio	$5,51\times10^{-8}$
Grafite	$1,4\times10^{-5}$
Solução NaCl (saturada)	$4,4\times10^{-2}$
Quartzo(SiO_2)	1×10^{13}
Vidro	$2,65\times10^{14}$

Exemplo 3: Calcule a frequência para a qual a profundidade de atenuação das ondas EM para a água do mar $\left(\sigma = 4,3\,\Omega^{-1}.\,m^{-1} \text{ e } \mu = \mu_0\right)$ seja $\delta \sim 1m$; e para $\delta \cong 100\ m$?

para bons condutores

- Sendo $\begin{cases} \omega = \dfrac{2}{\mu\sigma\delta^2} \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f \sim 60\,kHz \quad (\delta \sim 1\text{m})$

- Agora, para $\delta = 100\ m \quad \Rightarrow \quad f \sim 6\,Hz\,! \quad (\delta \sim 100\text{m})$

O projeto ELF ("Extremely Low Frequency" communication) usa 76Hz (http:www.oldradio.com.archives/jurassic; ver artigo 'The world Largest Radio Station')

• Mas, comparando com os valores da tabela anterior, para água do mar:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{4,3} \sim 2,3\times10^{-1}\left(\Omega.m\right) \quad \left\{\rho_{cobre} = 1,67\times 10^{-8}\left(\Omega.m\right)\right\}$$

• Ou seja, ela seria classificada como um meio mau condutor $\rightarrow$ por que usamos a aproximação para bons condutores?

• Reposta: Porque, no caso da água do mar:

$$\mu \sim \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\left(T/A\right),\ \sigma \sim 5\left(\Omega.m\right)^{-1},\ \varepsilon \sim 70\varepsilon_0 = 6\times10^{-10}\ C^2/N.m^2$$

$$e,\ assim: \quad \sigma/\varepsilon \sim \frac{5}{6\times10^{-10}} \sim 10^{10}$$

- Ou seja, só é má condutora para freqüências bem acima desta ($\omega >> \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$); incluindo aí a região do visível!

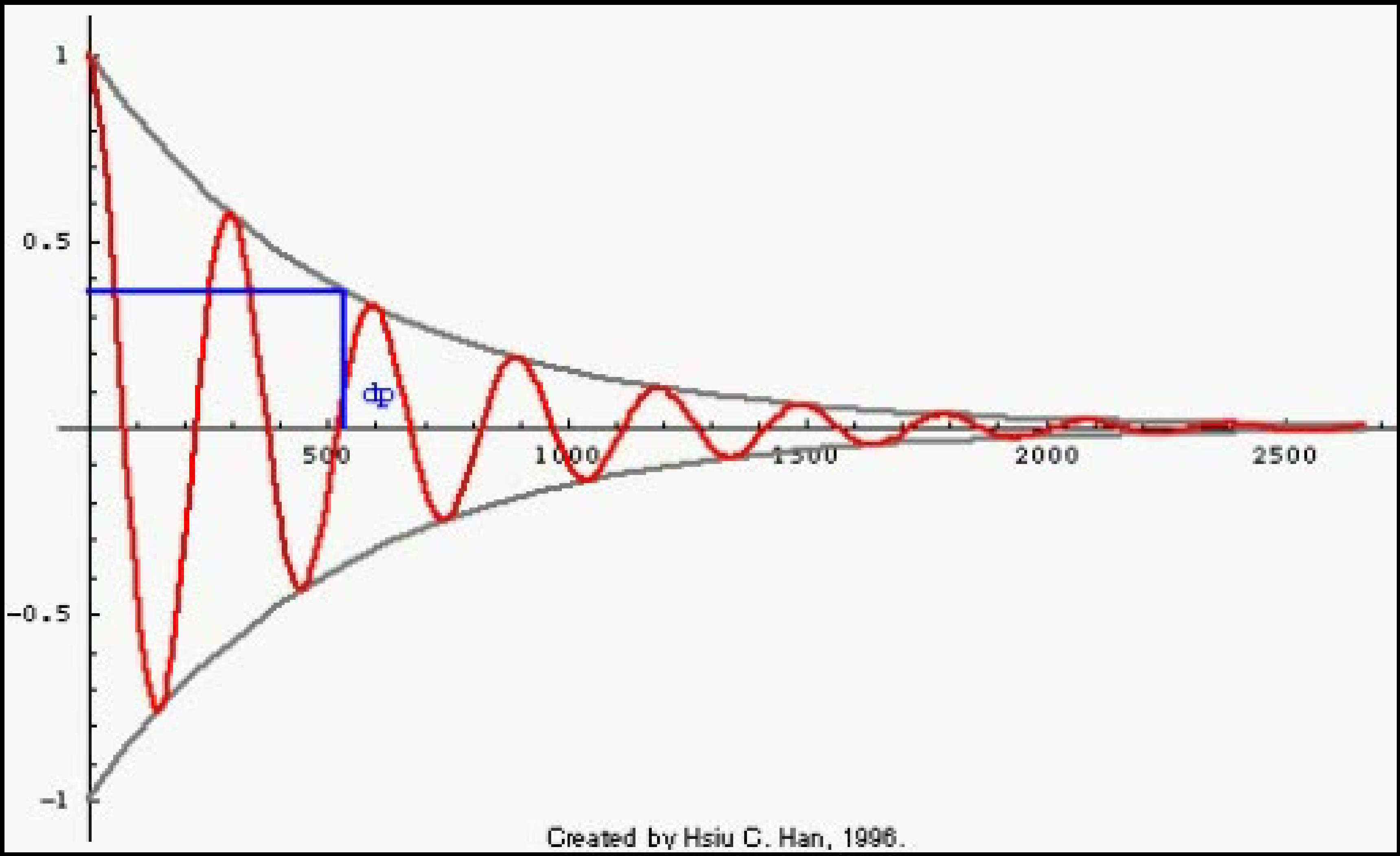
- Aliás, esta conta deveria ter sido feita antes de se iniciar a resolução do exercício!

- Nesta radio-freqüência, $(f \sim 60KHz) \Rightarrow 5\delta$ corresponde a $\sim 5m$, e a amplitude do campo elétrico cai a apenas $\sim 1\%$ do seu valor inicial

$$(0,37 \times 0,37 \times 0,37 \times 0,37 \times 0,37 = 0.007 \equiv 0,7\% \, de \, E_0)$$

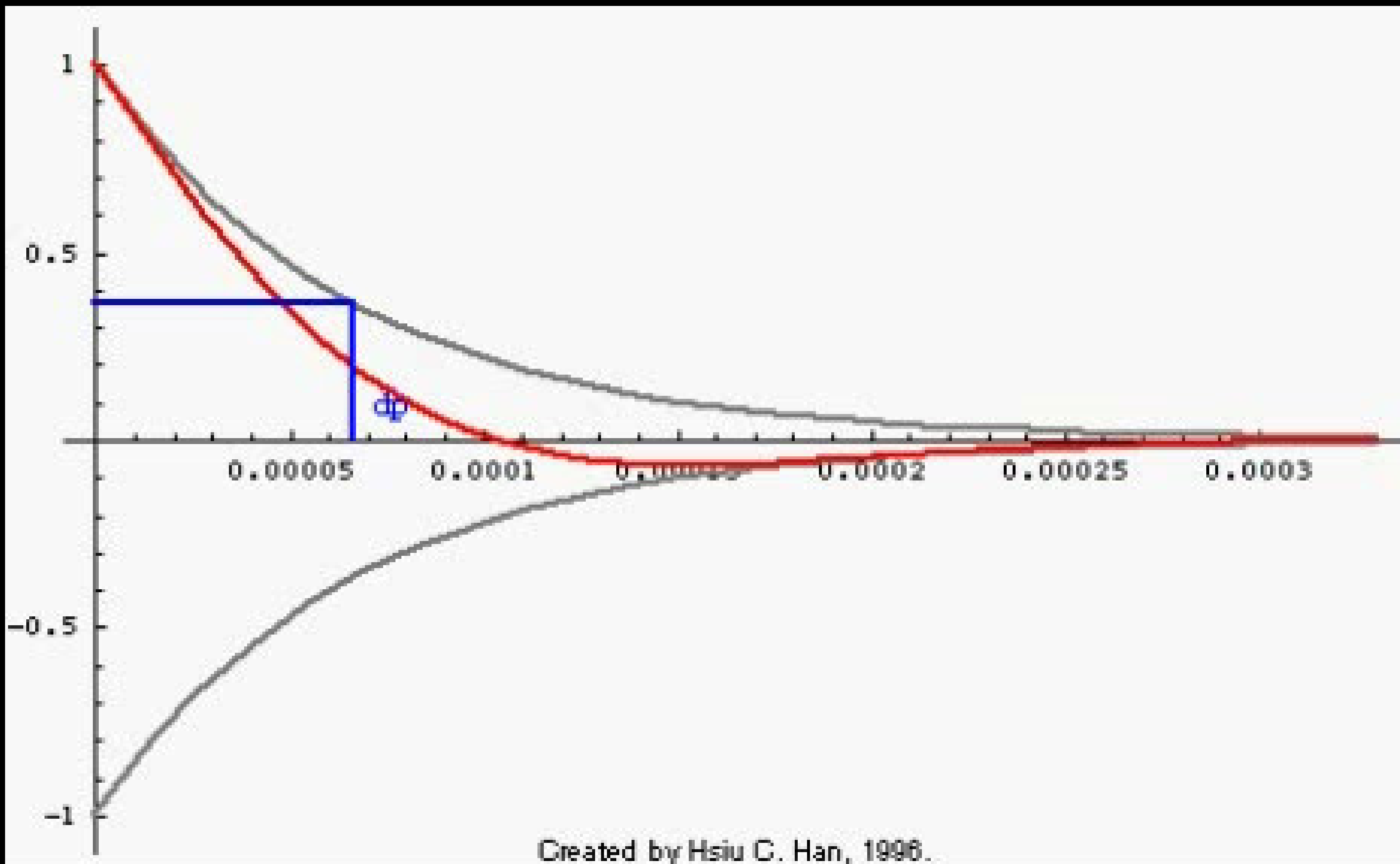
- Assim, para ocorrer comunicação com submarinos, transmissor muito potente e receptor bastante sensível são necessários, além de se necessitar que o submarino esteja próximo da superfície (daí também o uso de *sonares*, e não *radares*, para a detecção de submarinos).

onda na água



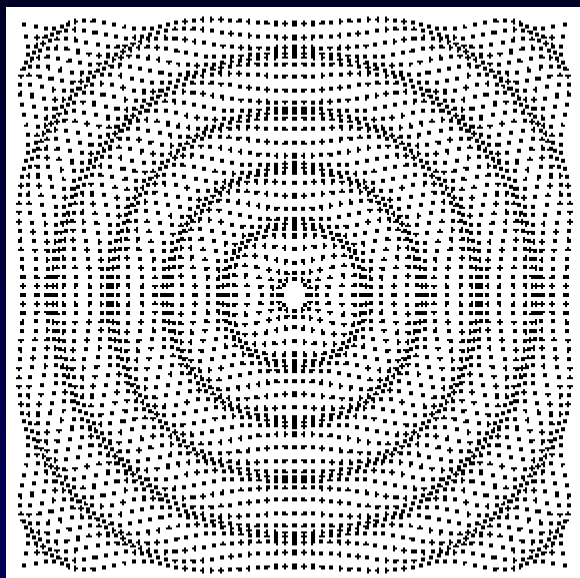
Repare nos valores da escala

onda no cobre

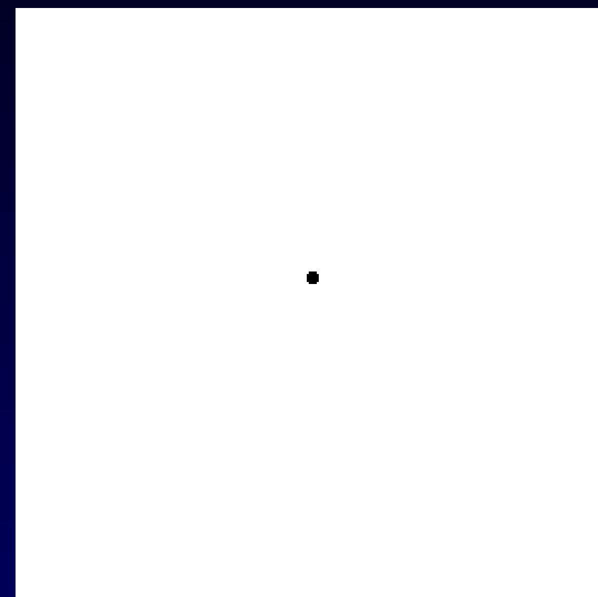


Ondas esféricas (em vácuo)

- Neste caso, a propagação não ocorre em uma única direção.



(animações em 2D)



- Devemos, novamente, procurar a solução adequada para a equação de onda: $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ (vácuo)

- Sendo que, como anteriormente: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$; e estaremos supondo ondas monocromáticas, de forma que as componentes espaciais de $\vec{E}$ serão funções de r, θ, ϕ

- Substituindo a função de onda: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(r,\theta,\phi)\,e^{-i\omega t}$

- Na equação da onda: $\nabla^2_{esf.}\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{r}) = 0$

temos a *Equação de Helmholtz*, que não é de fácil resolução!

(ver Reitz-Milford, página 360)

- Mostraremos, porém, que esta equação admite solução :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{r} \times \vec{\nabla}\Psi}$$

sendo Ψ a solução da *Equação escalar de Helmholtz*:

$$\boxed{\nabla^2_{esf.}\Psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Psi = 0}$$

... faremos isso na próxima aula.