# Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 11ª aula – 13/abr/2007

- Vimos: Ondas EM em meios condutores:

$$\begin{cases} i) & \vec{E} \perp \vec{B} \text{ somente quando polarização é linear } \phi = 0 \text{ ou } \pi \\ ii) & \text{Mesmo quando polarização é linear, } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ estão defasados} \\ iii) & \text{A componente magnética da energia domina.} \\ iv) & \text{Energia "perdida" da onda EM é dissipada no condutor por efeito Joule.} \end{cases}$$

- $\boxed{\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\,\omega}{c}}$; $\boxed{\tilde{n} = n + i\,n_*} \Rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \\ n_* = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \end{cases}$

- Sendo que $\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\varepsilon_{Ri} = \varepsilon_R + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$ e $\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = (K_r + iK_i)\hat{u} = \tilde{K}\,\hat{u}$.

- Também: $\begin{cases} K_r = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right]^{1/2} \\ K_i = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]^{1/2} \end{cases}$

- Vetor de Poynting: $\boxed{\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\frac{K_r E_0^2}{\mu\omega} e^{-2K_i u}\,\hat{u}}$

- Voltando agora à expressão de $\vec{E}$ para ondas propagando-se na direção de $\hat{u}$, em um meio condutor:

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{K}u)} = \left(\tilde{K} = K_r + iK_i\right) = \vec{E}(u,t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-K_i u} e^{-i(\omega t - K_r u)}$$

*o mesmo para* $\vec{B}$

sendo que $\begin{cases} K_r = \frac{n\omega}{c} \\ K_i = \frac{n_*\omega}{c} \end{cases}$ são as constantes óticas.

de onde vimos que $K_i$ é a "*constante de atenuação*", que define quão rapidamente decaem as amplitudes dos campos com a distância.

- Define-se a "***profundidade de penetração***" $\boxed{\delta = \dfrac{c}{n_* \omega} = \dfrac{1}{K_i}}$ como sendo a distância (direção de $\hat{u}$) em que as amplitudes dos campos decaem a $\dfrac{1}{e} \approx 0,37...$ de seu valor.

- Note também que, sendo $\delta = \delta(n_*, \omega)$ $\Rightarrow$ para dielétricos $(n_* = 0)$ $\Rightarrow$ essa distância tende a ser infinita, enquanto que, para condutores, isso só ocorrerá quando $\omega \to 0$ !

- Agora, com relação às expressões $\begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \\ n_* = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \end{cases}$, talvez possamos simplificá-las considerando:

  (**1º caso**) Meio é um "**mau condutor**": $\varepsilon_{Ri} << \varepsilon_R \Rightarrow \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} << \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \omega >> \dfrac{\sigma}{\varepsilon}$

  *nas eqs. de Maxwell:* $\varepsilon_R \to \tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\varepsilon_{Ri}$

- Para não sermos drásticos, desprezando $\varepsilon_{Ri}$ nas equações com $n$ e $n_*$ (pois aí $n = \sqrt{\varepsilon_R}$ e $n_* = 0$, caso do dielétrico), vamos expandir a raiz:

$$\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} = \varepsilon_R \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2} = (\varepsilon_R)\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2\right] \text{ (com } \left[(1 \pm x)^n \approx 1 = nx\right]\text{).}$$

- Então:

$$\begin{cases} n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_R + \varepsilon_R + \frac{\varepsilon_R}{2}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\left(\varepsilon_R + \frac{\varepsilon_R}{4}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2}_{\simeq 0}\right)} \approx \sqrt{\varepsilon_R} \\ n_* = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_R}{4}\left(\frac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2} = \frac{\varepsilon_{Ri}}{2\sqrt{\varepsilon_R}} \qquad \therefore\ n_* \approx \frac{\varepsilon_{Ri}}{2n} \end{cases}$$

*pois, se* $\left(\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)$ *é pequeno,* $\left(\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{\varepsilon_R}\right)^2$ *é menor ainda!*

- Como $\begin{cases} \delta = \dfrac{c}{n_* \omega} \Rightarrow \delta = \dfrac{c}{\omega}\dfrac{2n}{\varepsilon_{Ri}} = \dfrac{2nc}{\omega}\dfrac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \\ \varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{2nc\varepsilon_0}{\sigma}}$

  *nestes casos, em 1ª aproximação, a profundidade de penetração não depende de* $\omega$*!*

- Em termos de $K_r$ e $K_i$ $\left(\tilde{K} = K_r + iK_i\right)$:

$$\begin{cases} K_r = \dfrac{n\omega}{c} \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon_R \omega^2}{c^2}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon \omega^2}{\varepsilon_0 c^2}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon \omega^2 \cancel{\varepsilon_0} \mu_0}{\cancel{\varepsilon_0}}} \Rightarrow \boxed{K_r \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \\ K_i = \dfrac{n_i \omega}{c} \approx \dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2n}\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \cancel{\omega}}\dfrac{1}{2n}\dfrac{\cancel{\omega}}{c} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0^{\cancel{2}}}\dfrac{1}{4c^2}\mu\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{K_r \approx \dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}} \end{cases}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_R} = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$$

- **(2º caso)** Meio é **"bom condutor"**: $\varepsilon_{Ri} >> \varepsilon_R \Rightarrow \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} >> \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\omega << \dfrac{\sigma}{\varepsilon}}$
- Neste caso, desprezando $\varepsilon_R$ na raiz: $\sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2} \approx \varepsilon_{Ri} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \approx \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\underbrace{\varepsilon_R}_{\to 0} + \varepsilon_{Ri}\right)} \Rightarrow \boxed{n \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2}}} \\ n_* \approx \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(-\underbrace{\varepsilon_R}_{\to 0} + \varepsilon_{Ri}\right)} \Rightarrow \boxed{n_* \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2}}} \end{cases} \qquad \therefore\ n \approx n_* \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2}} \ \text{ e } \ K_r \approx K_i \approx \sqrt{\dfrac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

- Agora, como $\delta = \dfrac{c}{n_* \omega} \Rightarrow \delta = \sqrt{\dfrac{2}{\underbrace{\varepsilon_{Ri}}_{=\sigma/\omega\varepsilon_0}}\dfrac{c^2}{\omega^2}} = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 \omega}{\mu\varepsilon_0 \omega^2 \sigma}} \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma}}}$
- Portanto, quando $\omega\uparrow$ , $\delta\downarrow$, e vice-versa! (Note a dependência de $\delta$ com $\sqrt{\omega}$).
- Para fins práticos, a discussão do que é "bom" ou "mau" condutor **depende da freqüência ω de trabalho**: A mesma substância pode ser um bom condutor a baixas freqüências e mau condutor a freqüências elevadas.

não varia muito com a freqüência

- *Exemplo 1*: Metais em geral possuem $\sigma \sim 10^7\,(\Omega^{-1}.m^{-1}) \to (\Omega^{-1} \equiv Siemens)$, $\mu \sim \mu_0 \sim 10^{-8}\, N/A^2$ e $\varepsilon \sim 10^{-11}\, C^2/N.m^2$.

a) Para qual faixa de freqüências eles são bons condutores?
b) Qual o valor típico de profundidade de atenuação, supondo $\omega = 2\pi f \sim 10^{15}\, s^{-1}$ (faixa do visível)?

Solução:

a) Bons condutores: $\omega << \dfrac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \omega << \dfrac{10^7}{10^{-11}} \sim 10^{18}\, s^{-1}$

$\therefore\ f << \sim 10^{18}\, Hz$ (metais são bons condutores até a faixa do *Ultra-Violeta*)

b) Para $f \sim \omega \sim 10^{15} \Rightarrow \delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma}} \sim \sqrt{\dfrac{2}{10^{-8}.10^{15}.10^{7}}} \Rightarrow \boxed{\delta \approx 10^{-8} m}$

- *Exemplo 2*: Calcule a profundidade de atenuação para a prata, com $\sigma = 3\times10^{7}\left(\Omega.m\right)^{-1}$, quando $f \sim 10^{10}\,Hz$ ($\mu$-ondas).

| Material | Resistividade $(\Omega.m)$ |
|---|---|
| Alumínio | $2{,}65\times10^{-8}$ |
| Cobre | $1{,}67\times10^{-8}$ |
| Ouro | $2{,}35\times10^{-8}$ |
| Ferro | $9{,}71\times10^{-8}$ |
| Níquel | $6{,}84\times10^{-8}$ |
| Prata | $1{,}59\times10^{-8}$ |
| Mercúrio | $95{,}8\times10^{-8}$ |
| Tungstênio | $5{,}51\times10^{-8}$ |
| Grafite | $1{,}4\times10^{-5}$ |
| Solução NaCl (saturada) | $4{,}4\times10^{-2}$ |
| Quartzo($SiO_2$) | $1\times10^{13}$ |
| Vidro | $2.65\times10^{14}$ |

- Neste caso: $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(2\pi\times10^{10}\right)\left(3\times10^{7}\right)}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad \delta \cong 9{,}2\times10^{-7}m \approx 0{,}9\mu m$

- Ou seja, pelo fato da prata ser um excelente condutor, $\delta$ é muito pequeno $\Rightarrow$ na construção de guias de ondas, basta um *banho de prata* (sobre latão) ao invés de usar peças de prata maciça.

- *Exemplo 3*: Calcule a freqüência para a qual a profundidade de atenuação das ondas EM para a água do mar $\left(\sigma = 4{,}3\Omega^{-1}.\,m^{-1} \text{ e } \mu = \mu_0\right)$ seja $\delta \sim 1m$. E para $\delta \sim 100m$?

- Como $\begin{cases} \omega = \dfrac{2}{\mu\sigma\delta^2} \\ \omega = 2\pi f \end{cases} \Rightarrow f \sim 6Hz! \rightarrow$

  *O projeto ELF ("Extremely Low Frequency" Communication), por exemplo, usa f = 76Hz* - ver na página http://www.oldradio.com/archives/jurassic/ o artigo "*The World Largest Radio Station*" (uma antena de 14 milhas!).

- Mas, olhando na tabela acima, a ***água do mar***: $\rho = \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{4{,}3} \sim 2{,}3\times10^{-1}\left(\Omega.m\right)$ seria classificada como um meio mau condutor. Por que usamos a aproximação para bons condutores?

- Reposta: água do mar $\rightarrow$ $\mu \sim \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$; $\sigma \sim 5\left(\Omega\cdot m\right)^{-1}$ e $\varepsilon \sim 70\varepsilon_0 \approx 6\times10^{-10}\,C^2/N.m^2$ ,

  $\therefore \quad \sigma/\varepsilon \sim \dfrac{5}{6\times10^{-10}} \sim 10^{10} \quad \Rightarrow$ ela só é um mau condutor para freqüências bem acima desta (incluindo a região do visível).

- Nesta radiofreqüência ($\sim 60KHz$) $\Rightarrow 5\delta$ corresponde a ~5$m$; e a amplitude do campo elétrico cai a apenas ~1% do seu valor inicial ($0{,}37\times0{,}37\times0{,}37\times0{,}37\times0{,}37 = 0{,}7\%$).

- Assim, para haver comunicação com ondas de rádio, são necessários um transmissor muito potente e um receptor bastante sensível; além da necessidade dos submarinos estarem próximos da superfície (daí a opção pelo uso de *sonares*, e não *radares*, para a detecção de submarinos).

# Ondas esféricas em vácuo

- Neste caso, a propagação não ocorre em uma única direção.

- Para resolver este caso devemos, novamente, procurar a solução adequada para a equação de onda:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(vácuo)}$$

- Sendo que, novamente, $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ e estaremos considerando ondas monocromáticas; sendo que as componentes espaciais de $\vec{E}$ serão funções de $r,\ \theta\ e\ \phi$.
- Substituindo na equação da onda: $\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{r})=0$, obtemos a *Equação de Helmholtz*, que não é "fácil de se resolver diretamente! (ver Reitz-Milford, página 360).
- Mostraremos, porém, que esta equação *admite solução* :

$$\vec{E}=\vec{r}\times\vec{\nabla}\Psi$$

sendo $\Psi$ a solução da *equação escalar de Helmholtz*:

$$\nabla^2\Psi+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\Psi=0$$

- Faremos isso em detalhes na próxima aula ....