Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

12ª aula – 17/abr/2007

- Vimos: $\begin{cases} \tilde{K} = K_r + iK_i \\ \tilde{n} = n + in_* \end{cases}$ $\begin{cases} K_r = \dfrac{n\omega}{c} \\ K_i = \dfrac{n_*\omega}{c} \end{cases}$ e $\begin{cases} n = \sqrt{1/2\left(\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \\ n_* = \sqrt{1/2\left(-\varepsilon_R + \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right)} \end{cases}$

- Meio **mau condutor**: $\boxed{\varepsilon_{Ri} << \varepsilon_R} \Rightarrow \boxed{\omega >> \sigma/\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n \sim \sqrt{\varepsilon_R}} \\ \boxed{n_* \sim \dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2n}} \end{cases}$

- Profundidade de penetração: $\boxed{\delta^{mau} = \dfrac{c}{n_*\omega} = \dfrac{2nc\varepsilon_0}{\sigma}}$

- Meio **bom condutor**: $\boxed{\varepsilon_{Ri} >> \varepsilon_R} \Rightarrow \boxed{\omega << \sigma/\varepsilon} \Rightarrow \boxed{n \sim n_* \sim \sqrt{\varepsilon_{Ri}/2}}$

- Profundidade de penetração correspondente: $\boxed{\delta^{bom} = \sqrt{\dfrac{2}{\mu\omega\sigma}}}$

Ondas Esféricas (em vácuo)

- Neste caso, propagação não ocorre em uma única direção, e queremos procurar solução adequada para a equação da onda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{(vácuo)}$$

- Sendo que, novamente, $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(r,\theta,\phi)\, e^{-i\omega t}$, supondo ondas monocromáticas e permitindo que componentes espaciais de $\vec{E}$ sejam funções de r, θ e ϕ.

- Ou seja: $\begin{cases} \vec{E}_r = \vec{E}_r(r,\theta,\phi) \\ \vec{E}_\theta = \vec{E}_\theta(r,\theta,\phi) \\ \vec{E}_\phi = \vec{E}_\phi(r,\theta,\phi) \end{cases}$

- Substituindo $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$ na equação de onda, obtemos:

$$\nabla^2_{esf,}\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

Equação de Helmholtz que não é fácil de resolver diretamente

- Vamos ver, porem, que esta equação admite solução: $\boxed{\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\Psi}$; (2)

  sendo Ψ a solução da equação escalar de Helmholtz: $\boxed{\nabla^2\Psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\Psi = 0}$ (3)

- O primeiro termo da equação (1) pode ser escrito como:

$$\nabla^2\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0 \qquad (4)$$

- Sendo que $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0$, pois $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ para $\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\varphi$ (*ver apêndice*).

- Quanto ao termo $-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}$, temos que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\underbrace{\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi}_{=\vec{E}}\right)$.

- Utilizando a identidade vetorial: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)\vec{F} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\vec{G} + \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G}$

  fazendo $\left(\vec{F}\rightarrow\vec{r}\ e\ \vec{G}\rightarrow\nabla\psi\right)$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right) = r\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right)}_{(i)} - \vec{\nabla}\psi\left(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}_{(ii)}\right) + \underbrace{\left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}}_{(iii)} - \underbrace{\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\psi}_{(iv)}$$

- Parcela (i): $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\psi\right) = \vec{\nabla}^2\psi = (da\, eq.3) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\psi$

- Parcela (ii): $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ (*ver apêndice*)

- Parcela (iii): $\left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \vec{\nabla}\psi$, pois: $\boxed{\left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \vec{G}}$, para qualquer vetor $\vec{G}$, uma vez que:

$$\left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \left(G_x\frac{\partial}{\partial x} + G_y\frac{\partial}{\partial y} + G_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_x + z\hat{e}_x\right) = G_x\hat{e}_x + G_y\hat{e}_x + G_z\hat{e}_x = \vec{G}$$

- Quanto à última parcela (iv), usando a Identidade Vetorial:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\underbrace{r}_{(\vec{F})}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\psi}_{(\vec{G})}\right) = \underbrace{\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\nabla}\psi}_{(e'o\ que\ temos)} + \underbrace{\left(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}}_{=\vec{\nabla}\psi} + \underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi\right)}_{=0\ \text{(rot do grad)}} + \vec{\nabla}\psi\times\left(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{r}}_{=0}\right)$$

$$pois\ \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r} = \vec{G}$$

- Assim: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\vec{r}\psi - 3\vec{\nabla}\psi + \vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\psi\right) + \vec{\nabla}\psi \quad \Rightarrow$

  $\Rightarrow$ (*tirando o rotacional*) $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2}\right)\underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\psi\right)}_{=\left(\vec{\nabla}\psi\right)\times\vec{r} + \psi\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{r}}_{=0}} - \underbrace{\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\psi\right)}_{=0} - \underbrace{\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\psi\right)\right]}_{=0\ \text{(rot do grad)}}$

- Portanto, a equação (4) pode ser escrita:

$$\nabla^2\vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla}\psi \times \vec{r}}_{=-\vec{E};\ \text{da eq (2)}} \right) \;\Rightarrow\; \underbrace{\nabla^2\vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} = 0}_{\equiv eq.(1)!}$$

- Ou seja, $\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\varphi$ é solução da equação da onda, desde que ψ satisfaça a equação diferencial escalar de Helmholtz.

- Para o cálculo do $\vec{B}$ correspondente, podemos usar a 3ª Equação de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

- Supondo dependência temporal $e^{i\omega t} \Rightarrow \partial/\partial t = -i\omega$,

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{i}{\omega}\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right)}.$$

- Observe, desta equação, que $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right)\right] = 0 \;\therefore\; \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

- Observe que estas soluções $\vec{E}$, $\vec{B}$ encontradas não são únicas para um dado valor de ψ!

- Podemos inverter e mostrar que $\begin{cases} \boxed{\vec{B}' = \frac{1}{c}\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi} \\ \boxed{\vec{E}' = \frac{ic}{\omega}\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right)} \end{cases}$,

  também são soluções para as Equações de Maxwell.

- Logo veremos que estas duas soluções possíveis diferem pelo fato de $\vec{E}$, na 1ª situação, em qualquer ponto do espaço, ***ser tangencial à superfície esférica da frente de onda*** (centrada na origem) que inclui aquele ponto.

- Ou seja, $\vec{E}$ é $\perp$ (**transversal**) à direção de propagação da onda, enquanto que $\vec{B}$ tem componente naquela direção.

- Isto pode ser visto, lembrando que $\psi = \psi(r,\theta,\phi)$, de forma que

$$\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}_{esf.}\psi = \left(\cancel{r}\hat{e}_r\right)\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{\cancel{r}\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi\right) \Rightarrow$$

$= 0$ $\quad = \hat{e}_\phi$ $\quad = -\hat{e}_\theta$

$$\Rightarrow\; \vec{E} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_\phi - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_\theta = E_\theta\hat{e}_\theta + E_\phi\hat{e}_\phi$$

- Agora, se eu for calcular $\vec{B}$, devo obter o $\nabla_{esf}\times\vec{E}$ (não tenho componente E_r):

$$\vec{\nabla}_{esf}\times\vec{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(E_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}(-)\frac{\partial\left(rE_\phi\right)}{\partial r}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rE_\theta\right)}{\partial r}\right]\hat{e}_\phi.$$

- Ou seja, $\vec{B}$ poderá ter componentes nas direções $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$!

- Então, solução com $\vec{E}$ e $\vec{B} \equiv$ **Transversal Elétrica** (**modo TE**) e, pelo mesmo motivo,
$\vec{E}$' e $\vec{B}$' $\equiv$ **Transversal Magnética** (**modo TM**).

- Agora, para obtermos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ explicitamente, precisamos determinar o valor de ψ, resolvendo a equação escalar de Helmholtz em coordenadas esféricas:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+K^2\psi=0};\quad K=\frac{n\omega}{c}\ \text{(n=1} \equiv \text{vácuo).}$$

{obtendo ψ $\Rightarrow$ calculo $\vec{E}=\vec{r}\times\vec{\nabla}\varphi$ $\Rightarrow$ depois obtenho $\vec{B}$: $\vec{B}=(-i/\omega)\nabla\times\vec{E}$ }

- A resolução desta equação é usualmente feita pela *técnica de separação de variáveis* pela qual consideramos:

$$\psi = R(r)\ \Theta(\theta)\ \Phi(\phi)$$

- Substituindo na equação diferencial e multiplicando as parcelas por $\dfrac{r^2\sin\theta}{R.\Theta.\Phi}=\dfrac{r^2\sin\theta}{\psi}$:

$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\sin^2\theta K^2r^2=0$$

- Note que o 3º termo depende apenas de ϕ $\Rightarrow$ podemos igualá-lo a uma constante (m^2, por conveniência), de forma que:

$$\frac{d^2\Phi_m}{d\phi^2}+m^2\Phi_m=0$$ (Φ_m indica que Φ depende apenas de m).

- Substituindo então o 3º termo da eq. diferencial por $(-m)$ e multiplicando tudo por $\left(\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)$:

$$\underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+K^2r^2}_{\text{(depende apenas de } r)}+\underbrace{\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{(depende apenas de } \theta)}=0$$

- Igualando as componentes acima às constantes: $-\ell(\ell+1)$ em θ e $+\ell(\ell+1)$ em r:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial\Theta_{\ell,m}}{\partial\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_{\ell,m}=0\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R_\ell}{\partial r}\right)-\left[\ell(\ell+1)-K^2r^2\right]R_\ell=0\end{cases}$$

- Soluções:

i) Equação em ϕ: $\boxed{\Phi_m=e^{\pm im\phi}}$, já bem conhecida

ii) Equação em θ: *Polinômios de Legendre* ($P_\ell(\cos\theta)$) para $m = 0$ e, para m arbitrário ($m \le \ell$): soluções correspondem aos *Polinômios Associados de Legendre*:

$$\boxed{P_\ell^m(u)=\left(1-u^2\right)^{m/2}\frac{d^mP_\ell(u)}{du^m}};\qquad u=\cos\theta$$

(os polinômios são tabelados!)

iii) Equações em r: Fazendo $Kr = \zeta$ e $R_\ell = \zeta^{-1/2} Z_\ell$:

$$\boxed{\zeta^2 \frac{d^2 Z_\ell}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dZ_\ell}{d\zeta} - \left[\left(\ell + 1/2\right)^2 - \zeta^2\right] Z_\ell = 0} \quad (\equiv \textit{Equação de Bessel})$$

- Soluções: $\begin{cases} \text{Funções de Bessel: } Z_l = J_{\ell+1/2}(Kr) \\ \text{Funções de Neumann: } Z_l = N_{\ell+1/2}(Kr) \end{cases}$ (ambas de ordem ℓ+1/2)

- No estudo das *Equações de Onda* é conveniente definir estas funções (esféricas) como

$$\boxed{j_\ell(Kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\,r}} J_{\ell+1/2}(Kr)} \text{ e } \boxed{n_\ell(Kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\,r}} N_{\ell+1/2}(Kr)}$$

que são soluções da equação diferencial radial (ver forma explícita no Reitz-Milford, pg. 364).

- Portanto, a solução geral p/ ψ: $\boxed{\psi_{\ell,m} = \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} Z_\ell(Kr)\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\phi}}$,

de onde obtém-se a Solução TE: $\begin{cases} \vec{E} = \vec{r} \times \vec{\nabla}\psi \\ \vec{B} = -\dfrac{i}{\omega} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi\right) \end{cases}$ (e, igualmente, a Solução TM).

- Por exemplo: Para $m = 0$ (simetria em ϕ) e $\ell = 1$: $\psi_{1,0} = \dfrac{1}{Kr} e^{ikr} \left(1 + \dfrac{i}{Kr}\right) \cos\theta$

  ; sendo que, em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\psi_{1,0} = \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \underbrace{\cancel{\frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \phi}}}_{simetria} \hat{e}_\phi \,.$$

- Então: (*ver apêndice*)

$$\frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{iKr}}{Kr} + \frac{ie^{iKr}}{K^2 r^2} \right) \cos\theta = \left(\frac{iKe^{iKr}}{Kr} - \frac{e^{iKr}}{Kr^2} - \frac{Ke^{ikr}}{K^2 r^2} - 2i \frac{e^{iKr}}{K^2 r^3} \right) \cos\theta$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \theta} = \left(\frac{e^{iKr}}{Kr} + \frac{ie^{iKr}}{Kr^2} \right) (-) \sin\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{\nabla}\psi_{1,0} = e^{iKr} \left[\frac{i}{r} - \frac{2}{Kr^2} - \frac{2i}{K^2 r^3} \right] \cos\theta \; \hat{e}_r - e^{ikr} \left[\frac{1}{Kr^2} + \frac{1}{K^2 r^3} \right] \sin\theta \; \hat{e}_\theta}$$

- Assim: $\vec{E} = \vec{r} \times \vec{\nabla}\psi = r\hat{e}_r \times \vec{\nabla}\psi = \begin{pmatrix} \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0 \\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \end{pmatrix} = \cancel{r} e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr^{\cancel{2}}} + \frac{i}{K^2 r^{\cancel{3}2}} \right) \sin\theta \, \hat{e}_\phi$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{E} = -E_0 e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr} + \frac{i}{K^2 r^2} \right) \sin\theta \, \hat{e}_\phi}$$

(E_0 foi introduzido para tornar a função dimensionalmente correta)

- Quanto ao campo $\vec{B}$ correspondente: $\vec{B} = \frac{-i}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{i}{\omega} E_0 e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr^2} + \frac{i}{K^2 r^3} \right) 2\cos\theta \, \hat{e}_r - \frac{i}{\omega} E_0 e^{iKr} \left(\frac{i}{r} - \frac{1}{Kr^2} - \frac{i}{K^2 r^3} \right) \sin\theta \, \hat{e}_\theta}$$

(note que $\vec{B}$ também possui componente em $\hat{e}_r$!.)

- Posteriormente veremos que estes são justamente os campos TE produzidos por um dipolo magnético irradiante.
- Veremos também que somente os termos $\propto \frac{1}{r}$ de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ contribuirão para os campos de onda eletromagnética irradiada!

Apêndices

(i)

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\psi \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\psi \times \vec{r} \right) \Rightarrow \text{usando a identidade:} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{r}\psi) = \vec{\nabla} \times (\psi\vec{r}) = \left(\vec{\nabla}\psi \right) \times \vec{r} + \psi \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{r} \right)}_{=0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times (\vec{r}\psi) \right]}_{\text{div do rot}=0\text{, sempre!}} \quad \therefore \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \end{gathered}}$$

(ii)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) \cdot \left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \right) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3}$$

(iii)

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi_{1,0} = \frac{1}{Kr} e^{iKr} \left(1 + \frac{i}{Kr} \right) \cos\theta = \frac{e^{iKr}}{Kr} \cos\theta + i \frac{e^{iKr}}{K^2 r^2} \cos\theta \\ &\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_{1,0}}{\partial r} = \dfrac{ke^{iKr}}{Kr} \cos\theta - \dfrac{e^{iKr}}{Kr^2} \cos\theta - \dfrac{Ke^{iKr}}{K^2 r^2} \cos\theta - \dfrac{2ie^{iKr}}{K^2 r^3} \cos\theta \\ \dfrac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \theta} = -\dfrac{e^{iKr}}{Kr} \sin\theta - \dfrac{e^{iKr}}{K^2 r^2} \sin\theta \end{cases} \\ &\vec{\nabla}\psi_{1,0} = e^{iKr} \left[\frac{i}{r} - \frac{2}{Kr^2} - \frac{2i}{K^2 r^3} \right] \cos\theta \, \hat{e}_r - e^{iKr} \left[\frac{1}{Kr^2} + \frac{1}{K^2 r^3} \right] \sin\theta \, \hat{e}_\theta \end{aligned}}$$