

Eletromagnetismo II

13ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Vimos, na última aula:

- Ondas Esféricas (em vácuo)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi \\ \vec{B} = -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) \end{array} \right. \quad \text{(modo TE)}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}' = \frac{1}{c} \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi \\ \vec{E}' = \frac{ic}{\omega} \vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) \end{array} \right. \quad \text{(modo TM)}$$

- sendo que ψ satisfaz:

$$\nabla^2 \Psi + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \Psi = 0$$

“equação escalar de Helmholtz”

- Solução geral:

Funções de Bessel

Polinômios de Legendre

$$\psi_{\ell,m} = \sqrt{\frac{\pi}{2Kr}} Z_{\ell}(Kr) P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{\pm im\phi}$$

(obtida pela **Técnica de Separação de Variáveis**)

$$P_0^0(u)$$

$$1$$

$$P_1^0(u)$$

$$u = \cos \theta$$

$$P_1^1(u)$$

$$(1-u^2)^{1/2} = \sin \theta$$

$$P_2^0(u)$$

$$1/2 (3u^2 - 1) = 1/4 (3 \cos 2\theta + 1)$$

$$P_2^1(u)$$

$$3u(1-u^2)^{1/2} = 3/2 \sin 2\theta$$

$$P_2^2(u)$$

$$3(1-u^2) = 3/2 (1 - \cos 2\theta)$$

$$j_0(\rho)$$

$$(1/\rho) \sin \rho$$

$$n_0(\rho)$$

$$-(1/\rho) \cos \rho$$

$$h_0(\rho)$$

$$\mp (i/\rho) e^{\pm i\rho}$$

; sendo $\rho = Kr$

$$j_1(\rho)$$

$$(1/\rho^2) \sin \rho - (1/\rho) \cos \rho$$

$$n_1(\rho)$$

$$-(1/\rho) \sin \rho - (1/\rho^2) \cos \rho$$

$$h_1(\rho)$$

$$-(1/\rho) e^{\pm i\rho} (1 \pm i/\rho)$$

- Por exemplo: Para $m=0$ (*simetria em ϕ*) e $\ell=1$

$$\psi_{\ell,m} = \psi_{1,0} = \frac{1}{Kr} e^{iKr} \left(1 + \frac{i}{Kr} \right) \cos \theta$$

- De forma que, em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \psi_{1,0} = \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \phi} \hat{e}_\phi = 0$$

- Então:

$$\frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{iKr}}{Kr} + \frac{ie^{iKr}}{K^2 r^2} \right) \cos \theta = \left(\frac{iKe^{iKr}}{Kr} - \frac{e^{iKr}}{Kr^2} - \frac{Ke^{iKr}}{K^2 r^2} - 2i \frac{e^{iKr}}{K^2 r^3} \right) \cos \theta$$

e

$$\frac{\partial \psi_{1,0}}{\partial \theta} = \left(\frac{e^{iKr}}{Kr} + \frac{ie^{iKr}}{Kr^2} \right) (-) \sin \theta$$

- Assim:

$$\vec{\nabla} \psi_{1,0} = e^{iKr} \left[\frac{i}{r} - \frac{2}{Kr^2} - \frac{2i}{K^2 r^3} \right] \cos \theta \hat{e}_r - e^{iKr} \left[\frac{1}{Kr^2} + \frac{1}{K^2 r^3} \right] \sin \theta \hat{e}_\theta$$

- De forma que:

$$\vec{E} = \vec{r} \times \vec{\nabla} \psi = r \hat{e}_r \times \vec{\nabla} \psi = \cancel{r} e^{iKr} \left(\frac{1}{\cancel{Kr^2}} + \frac{i}{\cancel{K^2 r^3}} \right) \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\begin{cases} \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0 \\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E} = -E_0 e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr} + \frac{i}{K^2 r^2} \right) \sin \theta \hat{e}_\phi$$

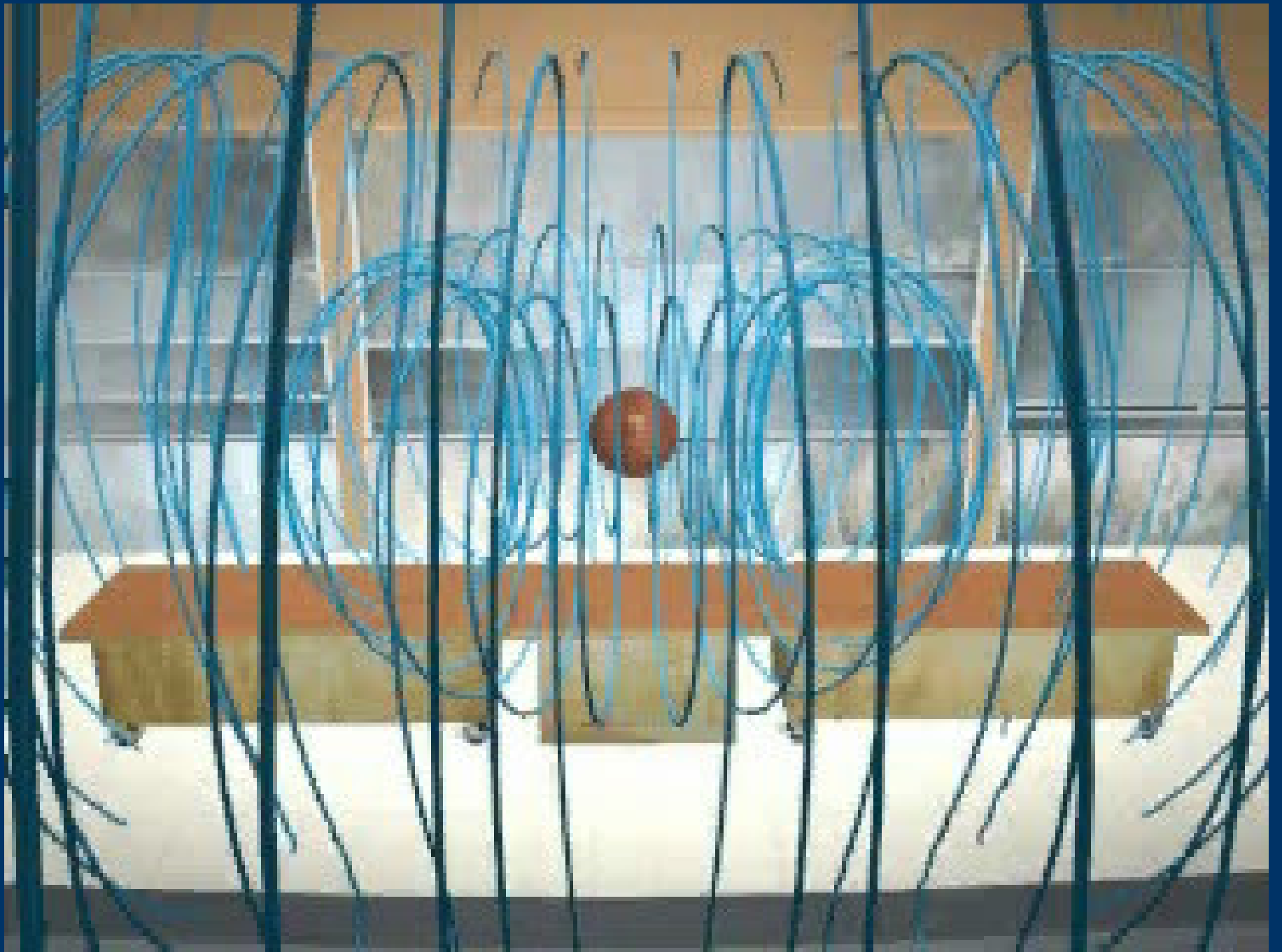
introduzido para expressão ficar dimensionalmente correta.

- Quanto ao campo $\vec{B}$ correspondente:

$$\vec{B} = -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla}_{esf} \times \vec{E} \quad \left(\vec{E} = -E_0 e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr} + \frac{i}{K^2 r^2} \right) \sin \theta \hat{e}_\phi \right)$$

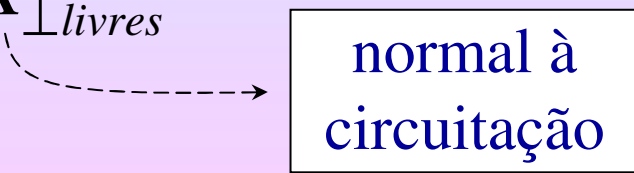
$$\vec{B} = \frac{i}{\omega} E_0 e^{iKr} \left(\frac{1}{Kr^2} + \frac{i}{K^2 r^3} \right) 2 \cos \theta \hat{e}_r - \frac{i}{\omega} E_0 e^{iKr} \left(\frac{i}{r} - \frac{1}{Kr^2} - \frac{i}{K^2 r^3} \right) \sin \theta \hat{e}_\theta$$

- Note que $\vec{B}$ também possui componente em $\hat{e}_r$!
- Depois veremos que estes são justamente os **campos TE** produzidos por um **dipolo magnético**
- Veremos também que somente os termos $\propto 1/r$ de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ contribuirão para os campos de onda EM irradiada!



Ondas na Interface entre dois meios materiais

- Vamos analisar agora o que ocorre quando uma onda EM encontra a *interface entre dois meios*.
- Neste estudo, será importante fazermos uso das *condições de continuidade* dos campos EM:

$$\begin{cases} E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \\ D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_{\text{livres}} \\ H_{1\parallel} - H_{2\parallel} = \kappa_{\perp \text{livres}} \\ B_{1\perp} = B_{2\perp} \end{cases}$$


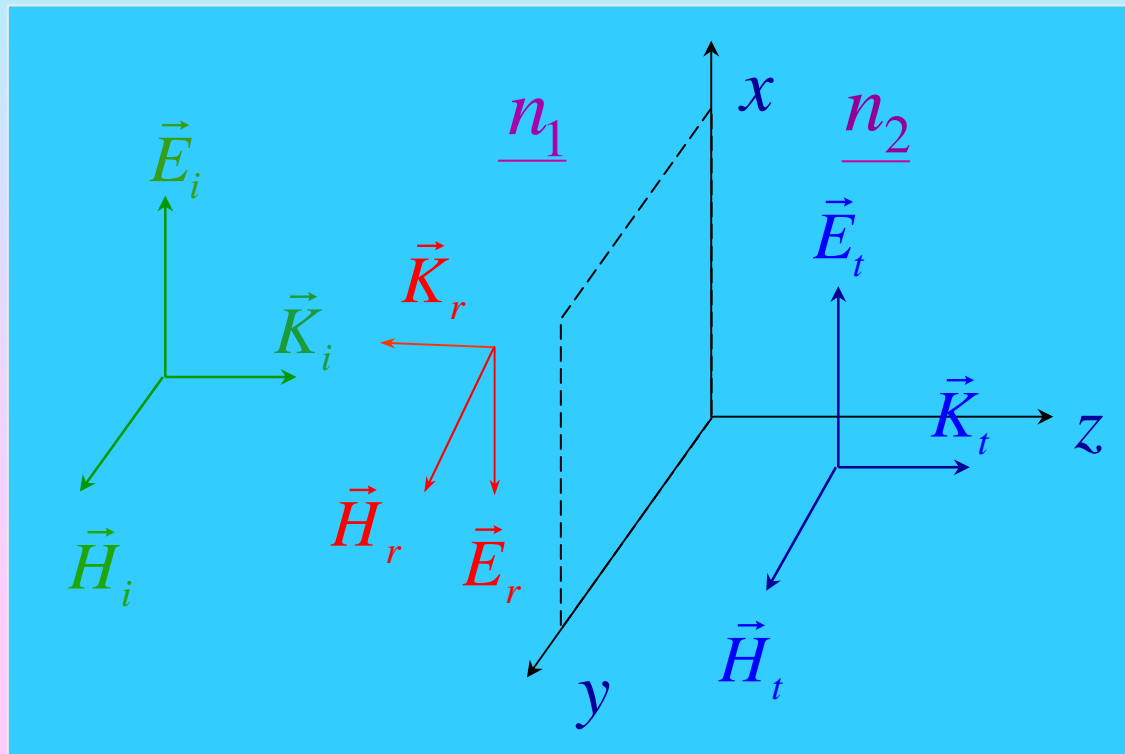
normal à
circulação

- Analisemos primeiro a Incidência Normal na interface de dois meios não-condutores.

- Para facilitar, vamos trabalhar com ondas planas, linearmente polarizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_i = \hat{e}_x E_i e^{i(K_i z - \omega t)} \\ \vec{E}_r = -\hat{e}_x E_r e^{-i(K_r z + \omega t)} \\ \vec{E}_t = \hat{e}_x E_t e^{i(K_t z - \omega t)} \end{array} \right. \quad \text{sendo que:} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_r = K_i = \frac{n_1 \omega}{c} \\ K_t = \frac{n_2 \omega}{c} \end{array} \right.$$

$\xrightarrow{\text{inverte a fase}}$
 $\xrightarrow{\text{propagação para esquerda}}$



- Na configuração dos campos, assumimos que $\vec{E}_r$ inverte a fase, em vez de $\vec{H}_r$ (por causa de $\vec{S}$).

- Veremos depois se isto é verdade...

- Campos magnéticos correspondentes: $\left(\vec{B} = \frac{n}{c} \hat{u} \times \vec{E} \right)$

- Como $\hat{e}_z \times \hat{e}_x = \hat{e}_y$:
$$\begin{cases} \vec{E}_i = \hat{e}_x E_i e^{i(K_i z - \omega t)} \\ \vec{E}_r = -\hat{e}_x E_r e^{-i(K_r z + \omega t)} \\ \vec{E}_t = \hat{e}_x E_t e^{i(K_t z - \omega t)} \end{cases}$$

$\equiv \pm \hat{e}_z$

direção da propagação da onda

$$\begin{cases} c\vec{B}_i = \hat{e}_y n_1 E_i e^{i(K_i z - \omega t)} \\ c\vec{B}_r = +\hat{e}_y n_1 E_r e^{-i(K_r z + \omega t)} \\ c\vec{B}_t = \hat{e}_y n_2 E_t e^{i(K_t z - \omega t)} \end{cases}$$

- Agora, na interface ($z = 0$), note que a condição de continuidade $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$ impõe que:

$$E_i e^{-i\omega t} - E_r e^{-i\omega t} = E_t e^{-i\omega t}$$

; que deve valer para qualquer instante t !

- Portanto, dados E_i, E_r e $E_t \Rightarrow$ igualdade será sempre satisfeita (**para qualquer t**) apenas se :

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$$

- O mesmo vale para o campo $\vec{B}$

- No caso da incidência normal, como só há componentes tangenciais dos campos (ainda supondo interface em $z = 0$):

$$\boxed{E_{1\parallel} = E_{2\parallel}} \Rightarrow (E_i - E_r) e^{-i\omega t} = E_t e^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{E_i - E_r = E_t} \quad (1)$$

$$\boxed{H_{1\parallel} = H_{2\parallel}} \Rightarrow (\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0) \Rightarrow B_{1\parallel} = B_{2\parallel} \quad (B = n/c E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{c} (E_i + E_r) = \frac{n_2}{c} E_t} \quad (2)$$

- Destas duas equações obtêm-se as amplitudes das ondas *Refletida* e *Transmitida* em função da onda *Incidente*:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i \\ E_t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_i \end{array} \right. \quad (3)$$

- De forma que as **razões entre as amplitudes** são totalmente determinadas pelos índices de refração dos dois meios.

- Da mesma maneira:
$$\begin{cases} B_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} B_i \\ B_t = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} B_i \end{cases} \quad \left(E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i \right)$$

- Agora, a partir destas relações, podemos adotar um critério para estabelecer **qual campo inverte a fase**.

- Por exemplo, se $n_2 > n_1 \Rightarrow \begin{cases} E_r \propto +E_i \\ B_r \propto +B_i \end{cases}$

- Os sinais (+) para ambos os campos (elétrico e magnético) indicam que a hipótese inicial ($\vec{E}$ **inverte a fase**) está correta!

- Tivéssemos suposto, de início, $\vec{B}$ invertendo a fase (para $n_2 > n_1$) $\Rightarrow$ na equação anterior *senal seria negativo*.

- Portanto, para $\begin{cases} n_2 > n_1 \Rightarrow \underline{\vec{E} \text{ inverte a fase}} \\ n_2 < n_1 \Rightarrow \underline{\vec{B} \text{ inverte a fase}} \end{cases}$ $\begin{pmatrix} E_r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i \\ E_t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_i \end{pmatrix}$

- Agora, as Razões entre as Amplitudes dos campos elétricos recebem o nome de “*Coeficientes de Fresnel*”.

$$r_{12} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad t_{12} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

(para incidência normal, sendo que os índices indicam passagem do meio 1 para o meio 2)

- Mas, usualmente, queremos obter a potência média (Energia/Tempo) da radiação refletida e transmitida, ou seja, queremos a **intensidade** ($\bar{S}$) das ondas:

$$I = \bar{S} = \overline{|\vec{E} \times \vec{H}|} = \frac{1}{\mu_0} \overline{EB} = \left(E = vB = \frac{c}{n} B \right) = \frac{n}{\mu_0 c} \overline{E^2} = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} E_0^2$$

$$\therefore \boxed{\bar{S} \propto n E_0^2}$$

- Definem-se então a Refletância e a Transmitância:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\bar{S}_r}{\bar{S}_i} \\ T = \frac{\bar{S}_t}{\bar{S}_i} \end{array} \right. \Rightarrow \text{(Incidência Normal)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{R_N = r_{12}^2} \\ \boxed{T_N = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2} \end{array} \right.$$

- Pode-se mostrar, facilmente, usando os Coeficientes de Fresnel, que $R_N + T_N = 1$ para qualquer par de meios Não-Condutores.
- Esta expressão representa a “*Conservação de Energia*” na interface entre os dois meios.
- Caso a onda seja circularmente/elípticamente polarizada $\Rightarrow$ os campos terão componentes nas direções $\hat{s}$ e $\hat{p}$ em cada meio
- Pode-se mostrar, porém, que os mesmos Coeficientes de Fresnel valem para cada componente, de forma que:

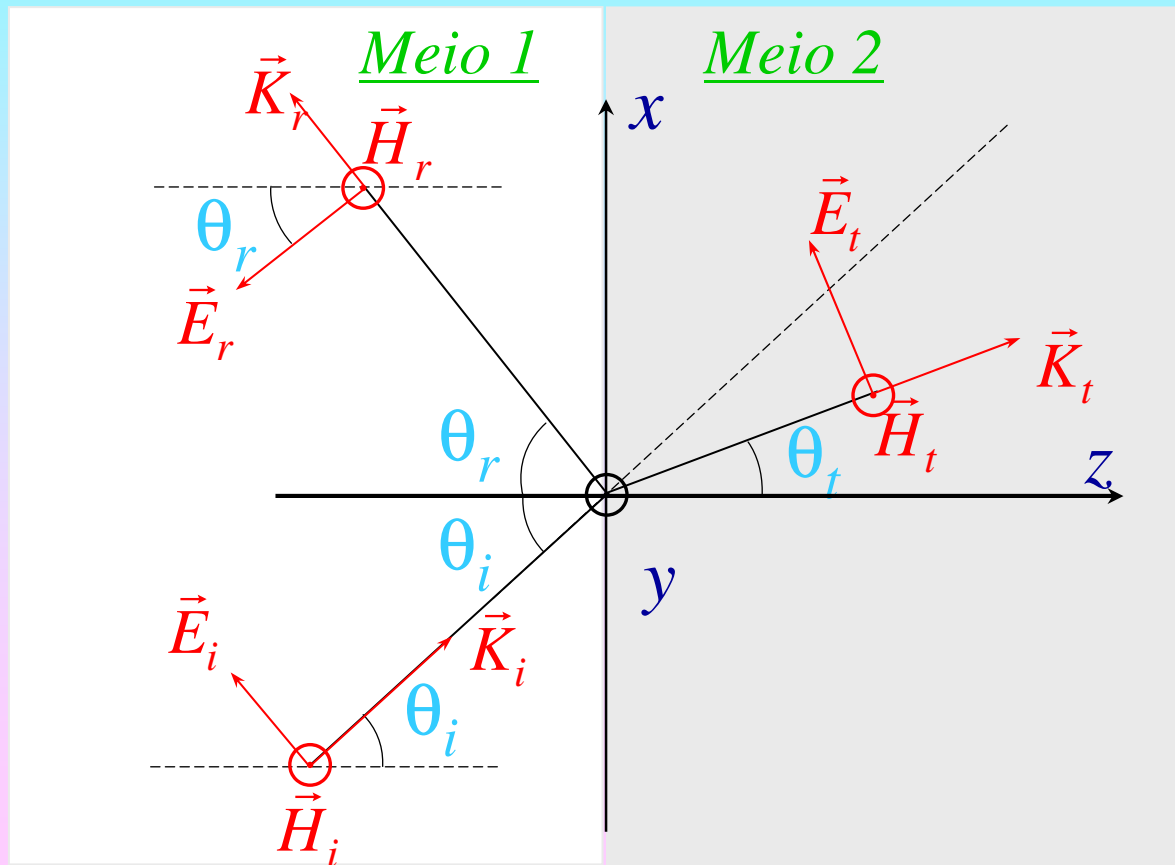
$$I = \bar{S} = \bar{S}_p + \bar{S}_s$$

(a soma das potências equivale à potência total!)

Incidência Oblíqua

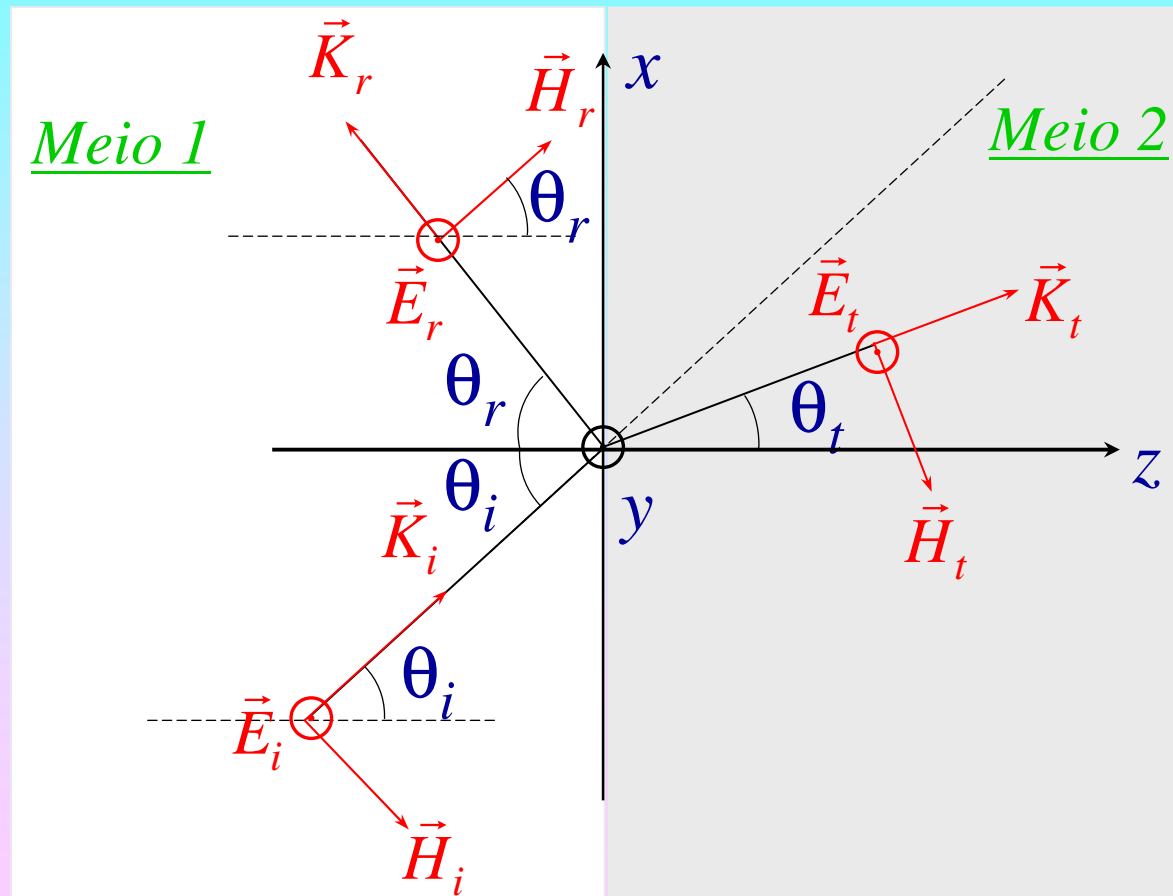
- 1º caso:

$\vec{E} \parallel$ Paralelo ao plano de incidência da onda EM.



2º caso:

$\vec{E}^\perp$ Perpendicular ao plano de incidência da onda.



- Estes 2 casos têm que ser analisados, pois qualquer onda com polarização qualquer, terá componentes dos campos que estarão em uma destas duas situações.
- A idéia é utilizar as *condições de continuidade* dos campos adequados:

$$\begin{cases} H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \\ E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \end{cases} \quad (\text{não há correntes livres})$$

- E obter as equações de Fresnel correspondentes, de forma que alguns resultados de Óptica Física sejam facilmente obtidos.

- Os Coeficientes de Fresnel correspondentes serão:

$$\begin{cases} r_{12\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \\ t_{12\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \end{cases} \quad (\vec{E} \text{ oscilando no eixo } x)$$

Note que nesta situação, para $\theta_i = \theta_r = 0^\circ$,
caímos no *caso de Incidência Normal*

- De forma que:

$$\begin{cases} r_{12\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ t_{12\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \end{cases}$$

- Agora, quando formos tratar da Potência de radiação incidente, refletida e transmitida, note que só irá nos interessar, nos cálculos, as componentes perpendiculares dos campos com respeito à interface.
- Assim, a *Refletância* e a *Transmitância* serão dadas:

$$R = \frac{\overline{S_r} \cos \theta_r}{\overline{S_i} \cos \theta_i} = \frac{\overline{S_r}}{\overline{S_i}} = \frac{I_r}{I_i} = r_{12}^2$$

$$T = \frac{\overline{S_t} \cos \theta_t}{\overline{S_i} \cos \theta_i} = \frac{\left(\cancel{\frac{1}{2}}\right) \left(\cancel{\frac{n_2}{\mu_0 c}}\right) E_{0t}^2 \cos \theta_t}{\left(\cancel{\frac{1}{2}}\right) \left(\cancel{\frac{n_1}{\mu_0 c}}\right) E_{0i}^2 \cos \theta_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = t_{12}^2$$

- Ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\perp} = r_{\perp}^2 \\ T_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\perp}^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} R_{\parallel} = r_{\parallel}^2 \\ T_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\parallel}^2 \end{array}$$

- Assim, os Coeficientes de Fresnel permitem que se obtenha R e T a partir de n_1 , n_2 , θ_i e θ_t ($\theta_r = \theta_i$), que são facilmente determinados.