Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

13ª aula – 20/abr/2007

- Vimos: Ondas Esféricas (vácuo):

$$\begin{cases} \boxed{\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\Psi} \\ \boxed{\vec{B} = -\dfrac{i}{\omega}\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right)} \end{cases} \text{(modo TE)} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \boxed{\vec{E}' = \dfrac{ic}{\omega}\vec{\nabla}\times\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi\right)} \\ \boxed{\vec{B}' = \dfrac{1}{c}\vec{r}\times\vec{\nabla}\psi} \end{cases} \text{(modo TM)} \;;$$

sendo que ψ satisfaz: $\boxed{\nabla^2\Psi + \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\Psi = 0}$

(*equação Escalar de Helmholtz*)

- Solução geral: $\boxed{\psi_{\ell m} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2Kr}}\, Z_\ell(kr)\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{\pm im\phi}}$

funções de Bessel — *polinômios de Legendre*

(obtida pela "*Técnica de Separação de Variáveis*")

- Por exemplo: Para $m = 0$ (simetria em ϕ) e $\ell = 1$: $\psi_{1,0} = \dfrac{1}{Kr}e^{ikr}\left(1+\dfrac{i}{Kr}\right)\cos\theta$

sendo que, em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\psi_{1,0} = \frac{\partial\psi_{1,0}}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_{1,0}}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\cancel{\frac{\partial\psi_{1,0}}{\partial\phi}}}_{simetria}\hat{e}_\phi$$

- De forma que: $\boxed{\vec{\nabla}\psi_{1,0} = e^{iKr}\left[\dfrac{i}{r} - \dfrac{2}{Kr^2} - \dfrac{2i}{K^2r^3}\right]\cos\theta\;\hat{e}_r - e^{iKr}\left[\dfrac{1}{Kr^2} + \dfrac{1}{K^2r^3}\right]\sin\theta\;\hat{e}_\theta}$,

- Então: $\vec{E} = \vec{r}\times\vec{\nabla}\psi \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{E} = -E_0e^{iKr}\left(\dfrac{1}{K} + \dfrac{i}{K^2r^2}\right)\sin\theta\;\hat{e}_\phi}$

- Quanto ao campo $\vec{B}$ correspondente: $\vec{B} = \dfrac{-i}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}$ (*ver apêndice*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{i}{\omega}E_0e^{iKr}\left(\frac{1}{K} + \frac{i}{K^2r^2}\right)\cos\theta\;\hat{e}_r - \frac{i}{\omega}E_0e^{iKr}\left(\frac{i}{r} - \frac{1}{Kr^2} - \frac{i}{K^2r^3}\right)\sin\theta\;\hat{e}_\theta}.$$

(notando que $\vec{B}$ também possui componente em $\hat{e}_r$!)

Ondas na Interface entre dois meios materiais

- Vamos analisar o que ocorre quando uma onda EM encontra a interface entre dois meios. Neste estudo, será importante fazermos uso das condições de continuidade dos campos EM:

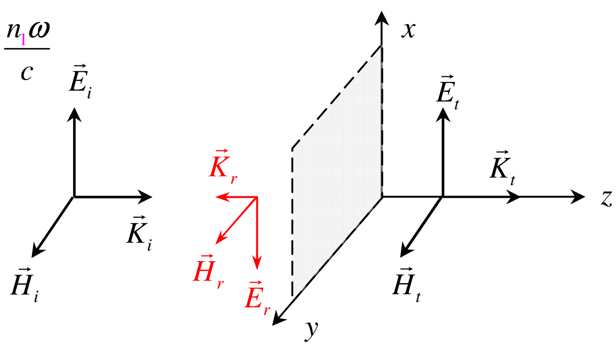
$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{livres} \\ H_{1t} - H_{2t} = \kappa_{\perp livres} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$

densidade superficial de corrente <u>normal</u> à circuitação

- Analisemos primeiro a *Incidência Normal* na <u>interface de 2 meios não-condutores</u>.

- Para facilitar, vamos trabalhar com ondas planas, linearmente polarizadas:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \hat{e}_x\, E_{ix}\, e^{i(K_i z - \omega t)} \\ \vec{E}_r = -\hat{e}_x\, E_{rx}\, e^{i(K_r z + \omega t)} \\ \vec{E}_t = \hat{e}_x\, E_{tx}\, e^{i(K_t z - \omega t)} \end{cases} \text{ ; sendo que } \begin{cases} K_r = K_i = \dfrac{n_1 \omega}{c} \\ K_t = \dfrac{n_2 \omega}{c} \end{cases}$$



- Na configuração dos campos acima, <u>assumimos</u> que $\vec{E}_r$ <u>inverte a fase</u>, em vez de $\vec{B}_r$ (por causa de $\vec{S}$). Veremos depois se isto é verdade...

- Campos magnéticos correspondentes: $\left(\vec{B} = \dfrac{n}{c}\,\hat{u} \times \vec{E}\right)$

$\hat{e}_z \equiv$ *direção da propagação da onda*

$$\begin{cases} c\vec{B}_i = \hat{e}_y\, n_1\, E_{ix} e^{i(K_i z - \omega t)} \\ c\vec{B}_r = \hat{e}_y\, n_1\, E_{rx} e^{-i(K_r z + \omega t)} \\ c\vec{B}_t = \hat{e}_y\, n_2\, E_{tx} e^{i(K_t z - \omega t)} \end{cases}$$

- Agora, na *interface* ($z = 0$), note que a <u>condição de continuidade</u> $E_{1t} = E_{2t}$ impõe que:
  $E_{ix}e^{-i\omega t} - E_{rx}e^{-i\omega t} = E_{tx}e^{-i\omega t}$; que deve valer para qualquer instante t.

- Então, dados E_{ix}, E_{rx} e E_{tx} $\Rightarrow$ a <u>igualdade será sempre satisfeita</u> (***para qualquer t***) se :
  $\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega}$ (o mesmo vale para o campo $\vec{B}$).

- Na <u>incidência normal</u>, como só há componentes tangenciais dos campos (ainda supondo interface em $z = 0$):

$$E_{1t} = E_{2t} \;\Rightarrow\; \left(E_{ix} - E_{rx}\right)e^{-i\omega t} = E_{tx}\, e^{-i\omega t} \;\Rightarrow\; \boxed{E_{ix} - E_{rx} = E_{tx}} \qquad (1)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \;\Rightarrow\; (\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0) \;\Rightarrow\; B_{1t} = B_{2t} \;\Rightarrow\; \frac{n_1}{\cancel{c}}(E_{ix} - E_{rx}) = \frac{n_2}{\cancel{c}} \Rightarrow \boxed{(E_{ix} - E_{rx}) = \frac{n_2}{n_1}} \qquad (2)$$

- Destas duas equações obtêm-se ondas *Refletidas* e *Transmitidas* em função da onda *Incidente*:

$$(\textit{ver apêndice}) \begin{cases} E_{rx} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{ix} \\ E_{tx} = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{ix} \end{cases} \quad \text{(obs: não confundir } \underline{t \text{ de } transmitida} \text{ com } \underline{transversal}\text{)} \qquad (3)$$

- De forma que as *Razões entre as Amplitudes* são totalmente determinadas pelos índices de refração dos 2 meios.

- Da mesma maneira: $\begin{cases} B_{ry} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} B_{iy} \\ B_{ty} = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1} B_{iy} \end{cases}$ (4)

- Agora, a partir das equações (3) e (4), podemos adotar um critério para estabelecer qual campo inverte a fase.

- Por exemplo, se $n_2 > n_1 \Rightarrow \begin{cases} E_{rx} \propto +E_{ix} \\ B_{ry} \propto +B_{iy} \end{cases}$ (!)

- O sinal do campo elétrico (e do campo magnético) indica que a hipótese inicial ($\vec{E}$ inverte a fase) está correta!

- Se tivéssemos suposto, inicialmente, que $\vec{B}$ inverte a fase (para $n_2 > n_1$), teríamos obtido acima sinal negativo no lado direito.

- Portanto, para $\begin{cases} n_2 > n_1 \Rightarrow \vec{E} \text{ inverte a fase} \\ n_2 < n_1 \Rightarrow \vec{B} \text{ inverte a fase} \end{cases}$

- Agora, as razões entre as amplitudes dos campos elétricos recebem o nome de "*Coeficientes de Fresnel*":

$$\boxed{r_{12} = \frac{E_{rx}}{E_{ix}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}} \quad \text{e} \quad \boxed{t_{12} = \frac{E_{tx}}{E_{ix}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} \;; \;\textbf{\textit{para incidência normal}}$$

(índices indicam passagem *do meio 1 para o meio 2*)

- Mas, usualmente, estaremos interessados na ***potência*** (Energia/Tempo) ***média*** da radiação refletida e transmitida, ou seja, queremos a intensidade $(\overline{S})$ das ondas:

$$I = \overline{S} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} = \frac{1}{\mu_0}\overline{EB} = \left(E = vB = \frac{c}{n}B\right) = \frac{n}{\mu_0 c}\overline{E^2} = \frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 c}E_0^2 \;; \quad \therefore \; \boxed{\overline{S} \propto n\,E_0^2}$$

- Definem-se então "***Refletância***" e "***Transmitância***" **:** $\begin{cases} \boxed{R_N = \dfrac{\overline{S}_r}{\overline{S}_i}} \\ \boxed{T_N = \dfrac{\overline{S}_t}{\overline{S}_i}} \end{cases}$ (5)

- Na *Incidência Normal* (substituindo): $\begin{cases} R_N = n_{12}^2 \\ T_N = \dfrac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \end{cases}$ (6)

- Pode-se mostrar, facilmente, usando os Coeficientes de Fresnel (ver apêndice), que $\boxed{R_N + T_N = 1}$ para qualquer par de meios não-condutores.

- Esta expressão representa a "*Conservação de Energia*" da onda, na interface entre os dois meios.

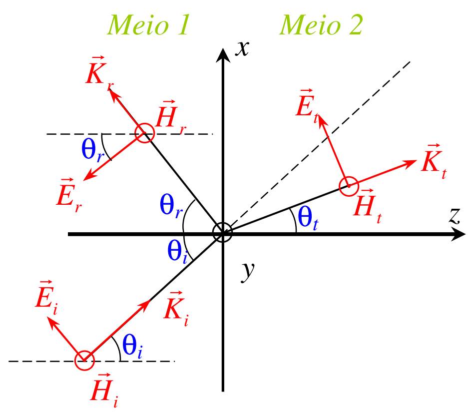
- No caso da onda ser ***circularmente/elipticamente polarizada*** $\Rightarrow$ os campos terão componentes nas direções $\hat{p}$ e $\hat{s}$, em cada meio.

- Pode-se mostrar, porém, que os mesmos Coeficientes de Fresnel valem para cada componente, de forma que:

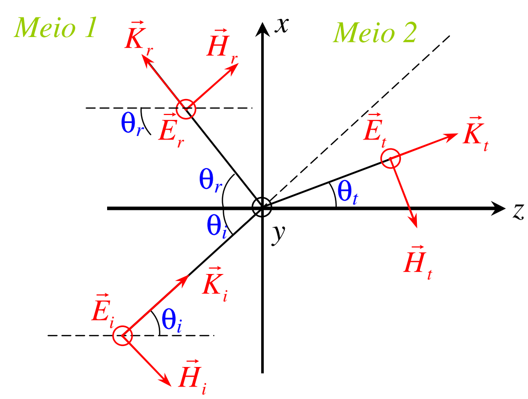
$$\boxed{I = \overline{S} = \overline{S}_p + \overline{S}_s} \quad \text{(a soma das potências equivale à potência total)}$$

Incidência Oblíqua

- **1º caso**: $\vec{E}$ // ao plano de incidência da onda.



2º caso: $\vec{E} \perp$ ao plano de incidência da onda.



- Estes casos têm que ser analisados porque, qualquer onda, com polarização qualquer, poderá ter componentes dos campos satisfazendo uma destas duas situações.

- A idéia agora é utilizar adequadamente as condições de continuidade dos campos:

$$\begin{cases} H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \\ E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \end{cases} \quad \text{(equivalentes às componentes tangenciais)}$$

- E obter as ***Equações de Fresnel*** correspondentes, de forma que alguns resultados já conhecidos da Óptica Física sejam facilmente obtidos.

- Os *Coeficientes de Fresnel* correspondentes serão:

$$\begin{cases} r_{12\parallel} = \left(\dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \dfrac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \\ t_{12\parallel} = \left(\dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\parallel} = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} r_{12\perp} = \left(\dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \dfrac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \\ t_{12\perp} = \left(\dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

note que, com respeito a este caso ($\vec{E}$ oscilando no eixo x), para $\theta_i = \theta_r = 0º$ caímos no caso de *Incidência Normal.*

(iremos manter os índices $\perp$ e $\parallel$ com relação ao plano de incidência, e os t e n com relação ao plano da interface!)

- Na próxima aula, mostraremos um destes casos como exemplo.
- Mas agora, vamos tratar das *Potências de Radiação* incidente, refletida e transmitida; note que só irá nos interessar, nos cálculos, as componentes perpendiculares dos campos com respeito à interface.
- Assim, a ***Refletância*** e a ***Transmitância*** serão dadas:

$$R = \frac{\overline{S_r}\cos\theta_r}{\overline{S_i}\cos\theta_i} = \frac{\overline{S_r}}{\overline{S_i}} = \frac{I_r}{I_i} = r_{12}^2$$

$$T = \frac{\overline{S_t}\cos\theta_t}{\overline{S_i}\cos\theta_i} = \frac{\left(1/2\right)\left(n_2/\mu_0 c\right)E_{0t}^2\cos\theta_t}{\left(1/2\right)\left(n_1/\mu_0 c\right)E_{0i}^2\cos\theta_i} = \frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2 = t_{12}^2$$

- Ou seja: $\begin{cases} \boxed{R_\perp = r_\perp^2}; & \boxed{R_\parallel = r_\parallel^2} \\ \boxed{T_\perp = \dfrac{n_2\cos\theta_t}{n1\cos\theta_i}t_\perp^2}; & \boxed{T_\parallel = \dfrac{n_2\cos\theta_t}{n1\cos\theta_i}t_\parallel^2} \end{cases}$

- Assim, os *Coeficientes de Fresnel* permitem que se obtenha R e T a partir de n_1, n_2, θ_i e θ_t ($\theta_r = \theta_i$) que são facilmente obtidos.

Apêndices

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{-i}{\omega}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta E_{\phi}\right)\right)\hat{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_{\phi}\right)\hat{e}_{\theta}\right]$$

(fazendo E apenas na direção ϕ)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta E_{\phi}\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\sin\theta\right)\left(-E_0e^{iKr}\right)\left(\frac{1}{Kr}+\frac{i}{K^2r^2}\right)\sin\theta\right]$$

$$=-E_0e^{iKr}\left(\frac{1}{Kr}+\frac{i}{K^2r^2}\right)\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta}_{=2\sin\theta\cos\theta}$$

$$B_r=-\frac{i}{\omega}\frac{1}{r\cancel{\sin\theta}}\left(-\right)E_0e^{iKr}\left(\frac{1}{Kr}+\frac{i}{K^2r^2}\right)2\cancel{\sin\theta}\cos\theta$$

$$=\frac{2i}{\omega}E_0e^{ikr}\left(\frac{1}{Kr^2}+\frac{i}{K^2r^3}\right)\cos\theta$$

...o mesmo processo sendo empregado para B_{θ}.

De (1)

$$n_1E_{ix}+n_1E_{rx}=n_2E_{ix}-n_2E_{rx}\rightarrow(n_1-n_2)E_{ix}=-\left(n_1+n_2\right)E_{rx}$$

$$\Rightarrow E_{rx}=\frac{(n_2-n_1)}{\left(n_1+n_2\right)}E_{ix}$$

$$R_N+T_N=r_{12}^2+\frac{n_2}{n_1}t_{12}^2=\frac{n_1^2+n_2^2-2n_1n_2}{\left(n_1+n_2\right)^2}+\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{4n_1^2}{\left(n_1+n_2\right)^2}$$

$$=\frac{n_1^2+n_2^2-2n_1n_2+4n_1n_2}{\left(n_1+n_2\right)^2}=\frac{n_1^2+n_2^2+2n_1n_2}{\left(n_1+n_2\right)^2}=\frac{\left(n_1+n_2\right)^2}{\left(n_1+n_2\right)^2}=1$$