INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

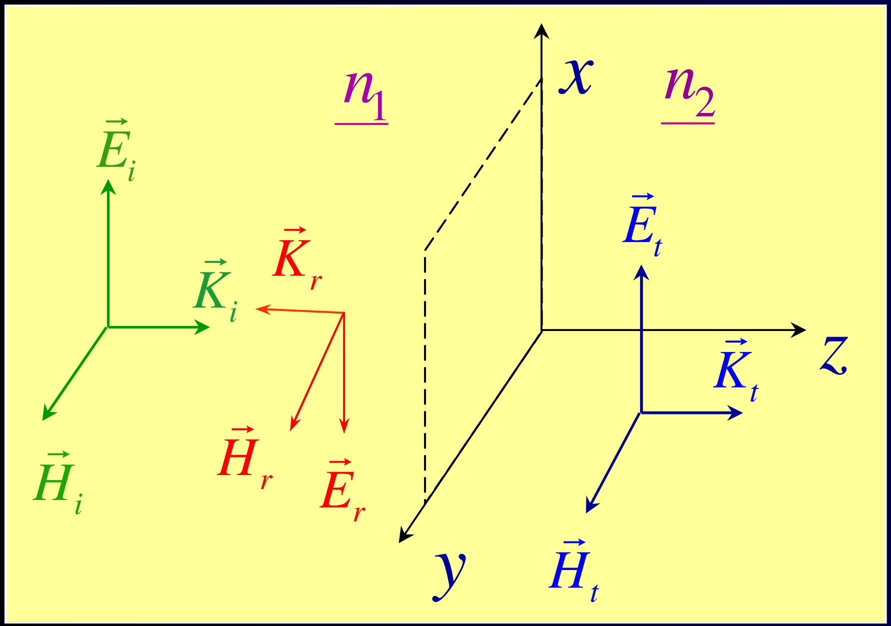
Eletromagnetismo II

14ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Na última aula vimos...

- Incidência Normal – Interface entre 2 meios dielétricos (do meio 1 p/ o meio 2)



$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i \\ E_t = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1} E_i \end{cases}$$

de forma que, se $\begin{cases} n_2 > n_1 \Rightarrow \vec{E} \text{ inverte a fase} \\ n_2 < n_1 \Rightarrow \vec{B} \text{ inverte a fase} \end{cases}$

- *Coeficientes de Fresnel (incidência normal)*

$$r_{12} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad t_{12} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

(índices indicam passagem do meio 1 para o meio 2)

- Em termos da *intensidade da radiação:* $\left(I = \overline{S}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a *Refletância* e a *Transmitância*, são dadas por:

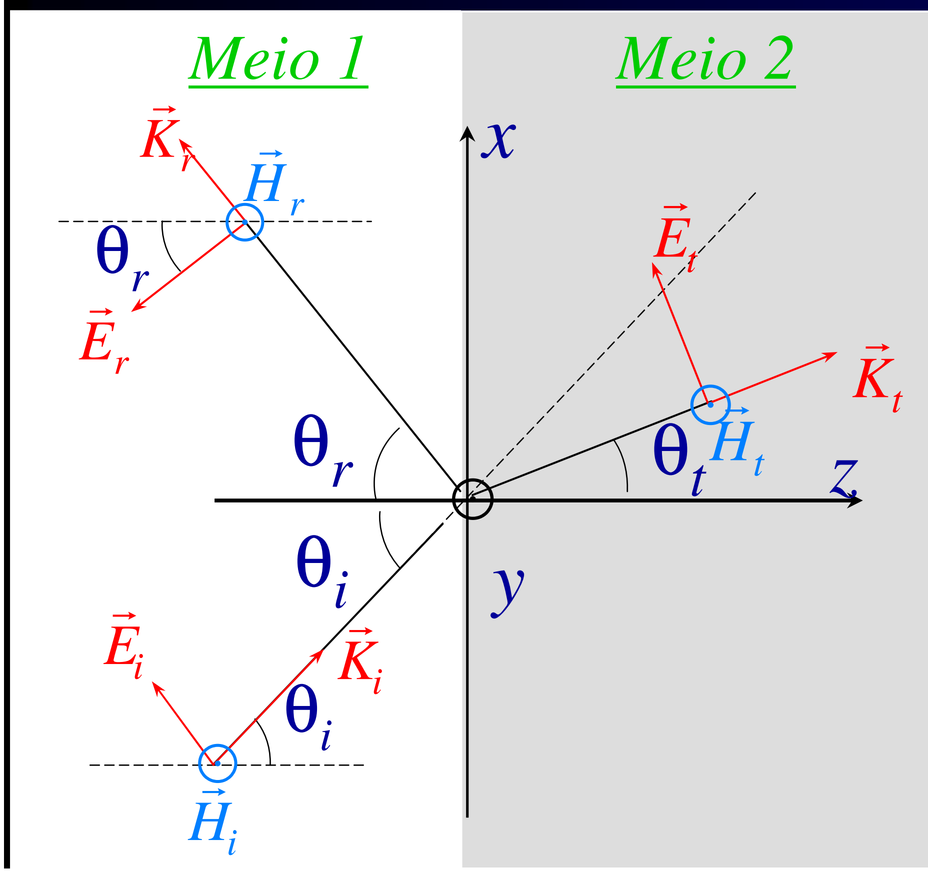
$$\begin{cases} R_N = \dfrac{\overline{S}_r}{\overline{S}_i} \\ T_N = \dfrac{\overline{S}_t}{\overline{S}_i} \end{cases} \Rightarrow \text{(} \textit{Incidência Normal} \text{)} \Rightarrow \begin{cases} R_N = r_{12}^2 \\ T_N = \dfrac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \end{cases}$$

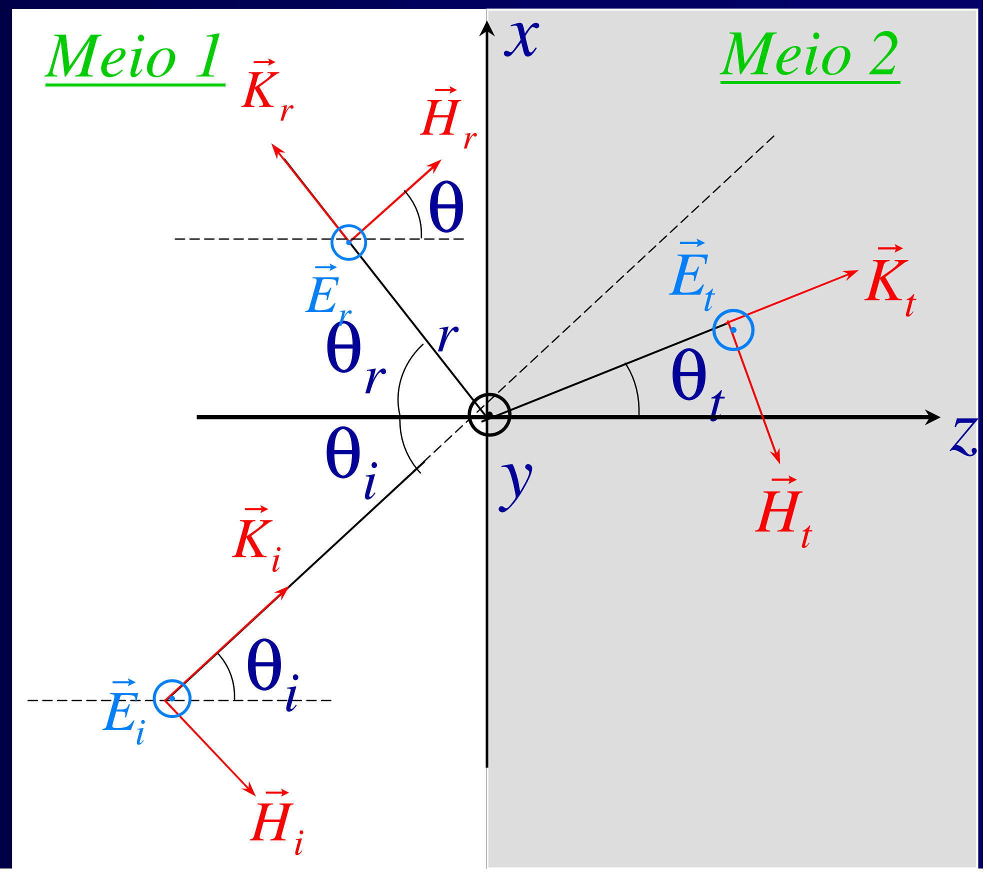
Incidência oblíqua:

- Temos que resolver dois casos diferentes:

1º) $\vec{E}^{\parallel}$ ao plano de incidência da onda EM

2º) $\vec{E}^{\perp}$ ao plano de incidência da onda EM





• Isto porque qualquer onda, com qualquer polarização, terá as componentes dos campos em uma dessas duas situações.

• Para resolver o problema, vamos aplicar as *condições de continuidade* dos campos:

$$\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} & (\textit{não há correntes reais}) \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$

• Para isto, vou inicialmente pegar as ondas que se propagam no plano *xz*; sendo que:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos\left(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega t\right) \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos\left(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t\right) \\ \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos\left(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega t\right) \end{cases}$$

- Mas, supondo a interface entre os 2 planos em $z = 0$:

$$\boxed{\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x + \cancel{K_y y} + \cancel{K_z z}} \qquad \left\{\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{K}_i\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right\}$$

= 0 pois onda propaga-se apenas no plano xz

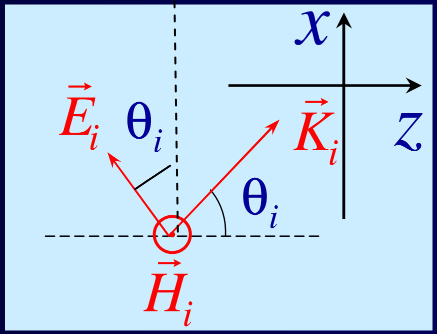
= 0 pois z=0 na interface

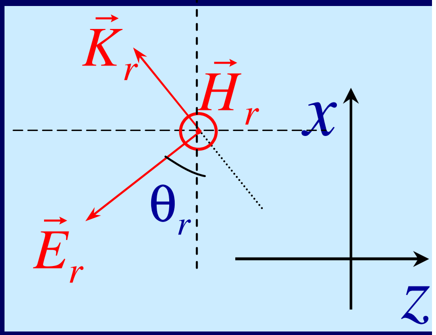
- Portanto: $\boxed{\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x}$

(para as 3 ondas, na interface (quanto à onda refletida, o <u>sentido de propagação</u> é -x, mas $\vec{K}$ também é no sentido de -x !)

- Aplicando a <u>condição de continuidade:</u> $E_{1t} = E_{2t}$ (na interface)

(no 1º caso, $\vec{E}^{\parallel}$, por exemplo):





$$E_{0i}\cos\theta_i\cos(K_i x\sin\theta_i - \omega_i t) - E_{0r}\cos\theta_r\cos(K_r x\sin\theta_r - \omega_r t) =$$

$$= E_{0t}\cos\theta_t\cos(K_t x\sin\theta_t - \omega_t t)$$

- Como esta igualdade:

$$\{E_{0i}\cos\theta_i\cos(K_i x\sin\theta_i-\omega_i t)-E_{0r}\cos\theta_r\cos(K_r x\sin\theta_r-\omega_r t)=$$
$$=E_{0t}\cos\theta_t\cos(K_t x\sin\theta_t-\omega_t t)\}$$

- *Deve valer* para qualquer *x* e qualquer *t* $\Rightarrow$ a dependência funcional em relação a *x* e *t*, de cada parcela, deve ser a mesma!

- Ou seja:

$$\cos(K_i x\sin\theta_i-\omega_i t)=\cos(K_r x\sin\theta_r-\omega_r t)=\cos(K_t x\sin\theta_t-\omega_t t)$$

- Como deve valer para qq. ponto da interface $\Rightarrow$ pegando $x=0$:

$$\boxed{\omega_i=\omega_r=\omega_t}$$

- E como deve valer para qq. *t* $\Rightarrow$ escolho $t=0$ (do cronômetro)

- Assim:

$$\underline{\underline{K_i\ x \sin\theta_i = K_r\ x \sin\theta_r}} = K_t\ x \sin\theta_t$$

- Agora, como

$\boxed{K = \dfrac{n\omega}{c}}$ $\Rightarrow$ quando *n* for o mesmo, *K* também é o mesmo!

$\therefore\ K_i = K_r \Rightarrow$ da 1ª igualdade: $\sin\theta_i = \sin\theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$

"***Lei da Reflexão***"
(já conhecida da ótica geométrica)

- Da 2ª igualdade: $\left\{K_i x \sin\theta_i = \underline{\underline{K_r x \sin\theta_r = K_t x \sin\theta_t}}\right\}$

$$\frac{n_1 \cancel{\omega}}{\cancel{c}} \sin\theta_i = \frac{n_2 \cancel{\omega}}{\cancel{c}} \sin\theta_t \Rightarrow n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

"***Lei de Snell***"

(também já conhecida da ótica geométrica)

- Agora, veja que interessante; deste último resultado:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{quando } \boxed{\sin\theta_i = \frac{n_2}{n_1}} \Rightarrow \sin\theta_t = 1$$

$$\therefore \boxed{\theta_t = \frac{\pi}{2}}$$

Onda sai "rasante"; e não tem muito sentido falar em "radiação refratada" neste caso

- Agora, se $\boxed{\theta_t = \pi/2} \Rightarrow \boxed{\sin\theta_i = \dfrac{n_2}{n_1}}$ $\boxed{\therefore\ \theta_i^{\text{crítico}} = \arcsin\dfrac{n_2}{n_1}}$

$$\left\{\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1}\right\}$$

- Ou seja, se $\boxed{\theta_i > \theta_i^{\text{crítico}}} \Rightarrow$ Há <u>reflexão total</u>!

- Note também que <u>isto só ocorre</u> quando $\boxed{n_1 > n_2}$! ; ou seja, n_2 <u>não pode</u> ser maior que n_1

- Retornando agora aos casos de *incidência oblíqua*, do início da aula, e lembrando que as *relações de continuidade*:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \quad \textit{(meios dielétricos)}$$

<u>valem para qualquer valor *x* e *t*</u> ($\therefore$ posso fazer x=0 e t=0)

- Desta forma, podemos trabalhar <u>apenas com as amplitudes</u> dos campos de forma a obter os *Coeficientes de Fresnel*.

- Assim fazendo:

$$\begin{cases} r_{12//} = \left(\dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \dfrac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \\[2ex] t_{12//} = \left(\dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i} \end{cases}$$

(note que, para $\theta_i = \theta_r = 0^o$ caímos na Incidência Normal)

- Quanto a outra componente:

$$\begin{cases} r_{12\perp} = \left(\dfrac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \dfrac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \\[2ex] t_{12\perp} = \left(\dfrac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

- Vamos exemplificar um destes casos (o 1º deles):

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_r = \underline{\underline{E_{0t}}}\cos\theta_t \\ H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \quad \Rightarrow \quad (\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0) \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \Rightarrow \left(E_0 = vB_0 = \frac{c}{n}B_0 \rightarrow B_0 = \frac{nE_0}{c} \right) \Rightarrow$$

$(n = c/v)$

$$\Rightarrow n_1 E_{0i} + n_1 E_{0r} = n_2 E_{0t} \quad \Rightarrow \quad E_{0t} = \frac{1}{n_2}\left(n_1 E_{0i} + n_1 E_{0r}\right)$$

- Então: $E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_r = \dfrac{1}{n_2}\left(n_1 E_{0i} + n_1 E_{0r}\right)\cos\theta_t \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad n_2 E_{0i}\cos\theta_i - n_1 E_{0i}\cos\theta_t = n_1 E_{0r}\cos\theta_t + n_2 E_{0r}\cos\theta_r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t\right) E_{0i} = \left(n_1\cos\theta_t + n_2\underbrace{\cos\theta_r}_{\equiv\,\theta_i}\right) E_{0r} \quad \checkmark$$

- Vamos agora tratar da *Potência* da radiação *Incidente*, *Refletida* e *Transmitida*.

- Nos cálculos, só nos interessará as <u>Componentes Perpendiculares</u> do Vetor de Poynting com respeito à interface.

- De modo que a *Refletância* e a *Transmitância* serão:

$$\begin{cases} R = \dfrac{\bar{S}_r \cancel{\cos\theta_r}}{\bar{S}_i \cancel{\cos\theta_i}} = \dfrac{I_r}{I_i} = r_{12}^{\ 2} \qquad \left(S \propto E_0^2 \;\; ; \left|\vec{S}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\right| = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{\mu_0 c}E^2 \right) \\[2ex] T = \dfrac{\bar{S}_t \cos\theta_t}{\bar{S}_i \cos\theta_i} = \dfrac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{n_2}{\cancel{\mu_0 c}}\right)E_{ot}^{\ 2}\cos\theta_t}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{\cancel{\mu_0 c}}\right)E_{oi}^{\ 2}\cos\theta_i} = \dfrac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\left(\boxed{\dfrac{E_{ot}}{E_{oi}}}\right)^2 \end{cases}$$

$$= t_{12}$$

• Ou seja: $\begin{cases} R_\perp = r_\perp{}^2 \\ T_\perp = \dfrac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i} t_\perp{}^2 \end{cases}$; $\begin{cases} R_{//} = r_{//}^2 \\ T_{//} = \dfrac{n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i} t_{//}{}^2 \end{cases}$

• De forma que os *Coeficientes de Fresnel* permitem que se obtenha R e T, a partir de n_1, n_2, θ_i e θ_t, que são facilmente obtidos

$\theta_\mathrm{i} = \theta_r$

• Pode-se verificar facilmente (faça em casa!) que nestes casos o *Princípio de Conservação de Energia* também é satisfeito:

$$\begin{cases} R_{//} + T_{//} = 1 \\ R_\perp + T_\perp = 1 \end{cases}$$

- As vezes, é útil escrever os *Coeficientes de Fresnel* da forma:

$$\begin{cases} r_{12//} = \dfrac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{12//} = \dfrac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_{12\perp} = \dfrac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \\ t_{12\perp} = \dfrac{2\cos\theta_i \sin\theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{cases}$$

- Exemplo:

$$t_{12//} = \frac{2\cos\theta_i \left(\dfrac{n_1 \sin\theta_i}{n_2} \right)}{(\sin\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin\theta_t)(\cos\theta_i \cos\theta_t + \sin\theta_i \sin\theta_t)} =$$

(usando a *Lei de Snell*)

$$= \frac{2n_1 \cos\theta_i}{\frac{n_2}{\sin\theta_i}\left(\sin\theta_i \cos^2\theta_t \cos\theta_i + \sin^2\theta_i \cos\theta_t \sin\theta_t + \cos^2\theta_i \sin\theta_t \cos\theta_t + \cos\theta_i \sin^2\theta_t \sin\theta_i\right)}$$

colocando em evidência parcelas do tipo:

$$(\quad)\left(\sin^2 + \cos^2\right) = (\quad)$$

$$\Rightarrow\ t_{12//} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{\frac{n_2}{\sin\theta_i}\left[\sin\theta_i \cos\theta_i + \sin\theta_t \cos\theta_t\right]} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2\left[\cos\theta_i + \left(\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\right)\cos\theta_t\right]}$$

n_2/n_1

$$\therefore\ \boxed{t_{12//} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}}$$

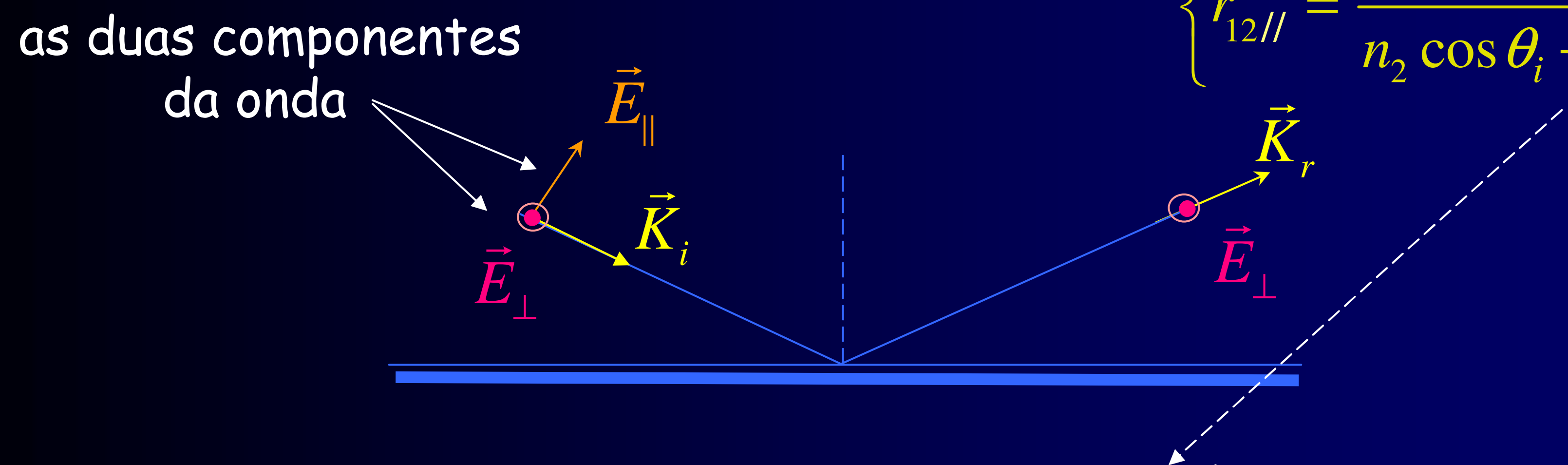
- A partir destas *relações alternativas dos Coeficientes de Fresnel* fica fácil também mostrar (verifique!) que:

$$\begin{cases} r_{12} = -r_{21} \\ {r_{12}}^2 + t_{12}t_{21} = 1 \end{cases}$$

(*vamos precisar disto em uma aula futura*)

- Agora, um outro resultado interessante envolve a situação na qual *não há onda refletida paralelamente ao plano da incidência*, ou seja, apenas a componente *paralela à interface entre os dois meios* é que subsiste após a reflexão.

$$\left\{ r_{12//} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} \right\}$$



- Para isto acontecer devemos ter $r_{12//} = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t = 0}$

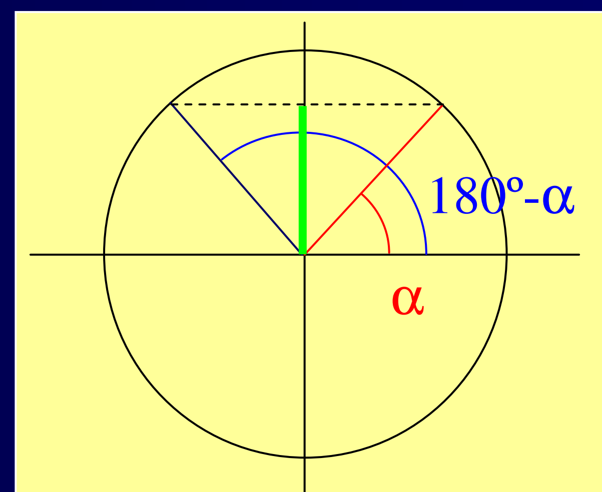
- Então: $\boxed{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t = 0}$ $\Rightarrow$ usando Snell: $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \Rightarrow \underbrace{\sin\theta_i\cos\theta_i}_{=1/2\sin(2\theta_i)} = \underbrace{\sin\theta_t\cos\theta_t}_{=1/2\sin(2\theta_t)}$$

- Então: $\boxed{\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_t} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\theta_i = \theta_t} & \rightarrow \text{(meios indistinguíveis, não há interface!)} \\ 2\theta_i = 180^\circ - 2\theta_t & \end{cases}$

mas

$$\sin(2\theta_t) = \sin(180^\circ - 2\theta_t)$$

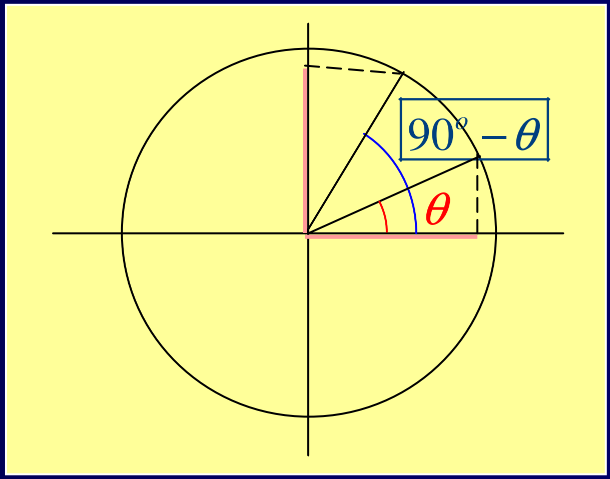


- Assim: $\boxed{\theta_i + \theta_t = \pi/2}$

condição para que só haja componente de $\vec{E}$ paralela à interface ($\perp$ *ao plano de incidência*) na reflexão!

- Forma mais interessante (útil) de expressar este resultado:

- Faço $\theta_i = \pi/2 - \theta_t$, e tiro o cosseno dos dois lados:



$$\cos\theta_i = \cos(\pi/2 - \theta_t) = \sin\theta_t =$$

$$= \text{(Snell)} = \frac{n_1 \sin\theta_i}{n_2}$$

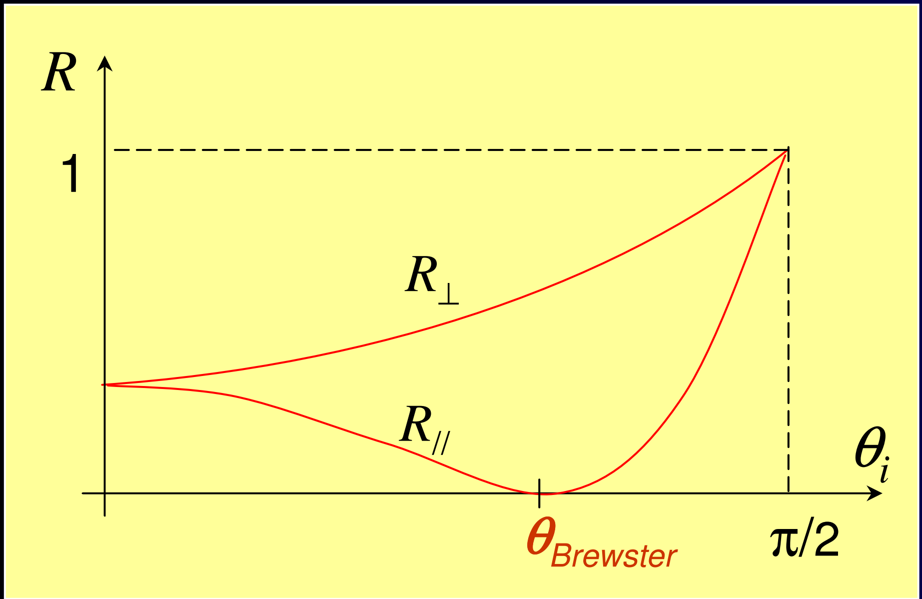
$$\therefore \boxed{tg\theta_i = n_2/n_1}$$

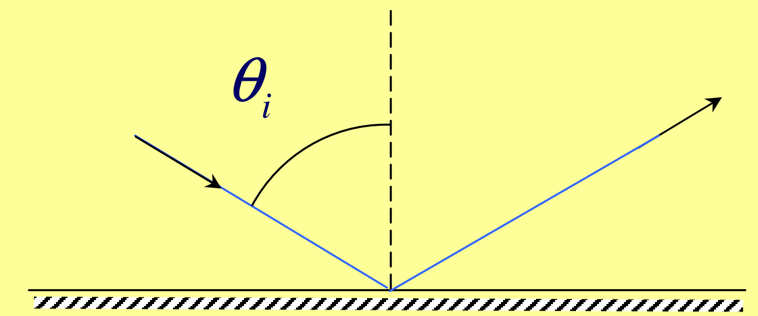
" Lei de Brewster "

Só depende de θ_i e dos índices refração.

- Esta lei fornece a <u>*condição*</u> necessária para <u>*haver a Polarização*</u> da onda *EM* <u>*por reflexão*</u> na interface entre dois meios dielétricos.

- Para uma interação ar-vidro, por exemplo ($n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$) um gráfico de valores de $R_{//}$ e $R_\perp$ em função de θ_i será:

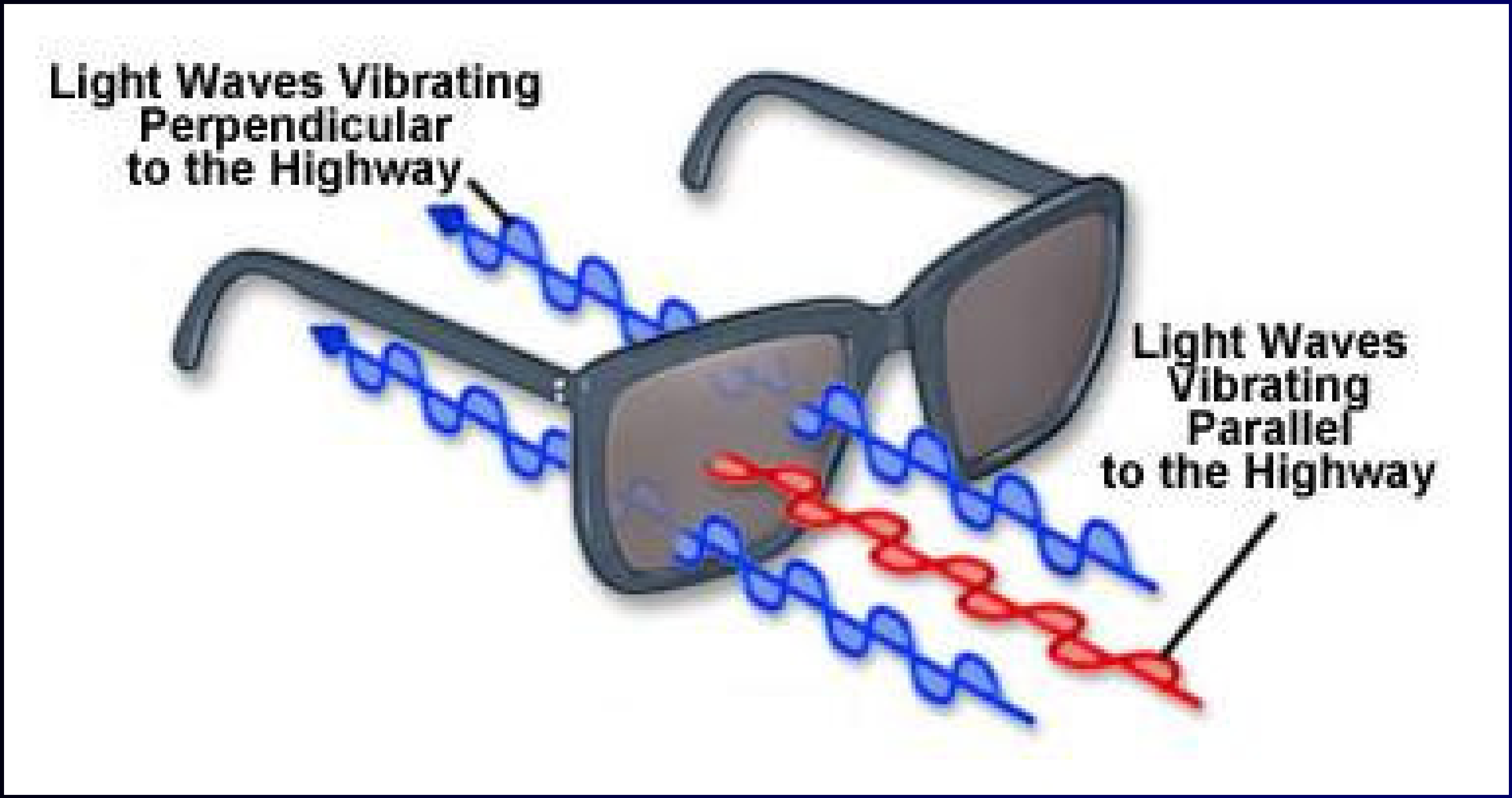




(qdo $\theta_i = \pi/2 \rightarrow$ "tudo passa")

- Fazendo as contas: $\theta_B = arctg\left(\frac{1{,}5}{1{,}0}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\theta_B \approx 56{,}3°}}$

- Nos dias ensolarados, parte dos raios solares refletidos (θ_B) nas diversas superfícies horizontais são polarizados paralelamente a estas $\Rightarrow$ as lentes dos óculos polaróides são posicionadas de forma a cortar esta componente (ou seja, o eixo de polarização das lentes é posicionado na direção vertical!).


Light Waves Vibrating
Perpendicular
to the Highway
Light Waves
Vibrating
Parallel
to the Highway