# Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 14ª aula – 24/abr/2007

- Vimos: *Incidência Normal* – Interface entre 2 meios dielétricos (do meio 1 para o meio 2)

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_i \\ E_t = \dfrac{2n_1}{n_2 + n_1} E_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_2 > n_1 \Rightarrow \vec{E} \text{ inverte a fase} \\ n_2 < n_1 \Rightarrow \vec{B} \text{ inverte a fase} \end{cases}$$

- "Coeficientes de Fresnel":

$$\begin{cases} \boxed{r_{12} = \dfrac{E_r}{E_i} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}} \\ \boxed{t_{12} = \dfrac{E_t}{E_i} = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}} \end{cases}$$

*onda propaga-se do meio 1 para o meio 2*

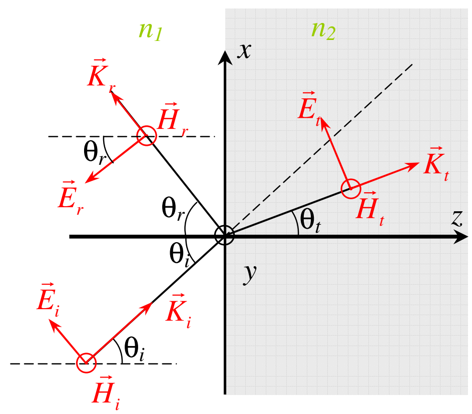
- Em termos de Intensidade de radiação: $\boxed{I = \bar{S}}$

$$\begin{cases} \text{Refletância: } R_N = \dfrac{\bar{S}_r}{\bar{S}_i} \\ \text{Transmitância: } T_N = \dfrac{\bar{S}_t}{\bar{S}_i} \end{cases} \Rightarrow \underline{\textit{Incidência Normal}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{R_N = r_{12}^2} \\ \boxed{T_N = \dfrac{n_2}{n_1} t_{12}^2} \end{cases}$$

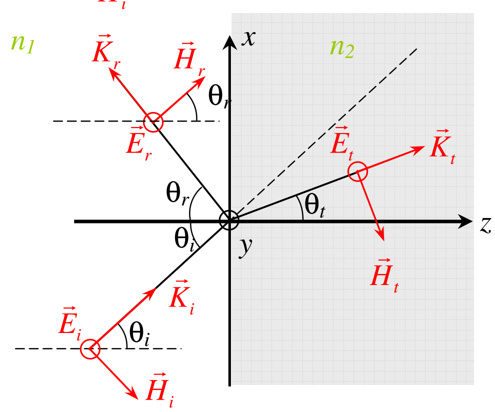
- ***Incidência oblíqua***: Temos que resolver para dois casos diferentes:

1º) $\vec{E}_{\parallel}$ *ao plano de incidência* da onda EM.

*Observe que os vetores sempre obedecem* $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$




2º) $\vec{E}_{\perp}$ *ao plano de incidência* da onda.



- Isto porque qualquer onda, com qualquer polarização, terá as componentes dos campos em uma dessas duas situações.

- Para resolver o problema, vamos aplicar as condições de continuidade dos campos: $\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$ Não há correntes livres

- Para isto, vamos considerar a parte real dos campos, que se propagam no plano *xz*:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = \vec{E}_{0i}\cos\left(\vec{K}_i\cdot\vec{r}-\omega t\right) \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{0r}\cos\left(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega t\right) \\ \vec{E}_t = \vec{E}_{0t}\cos\left(\vec{K}_t\cdot\vec{r}-\omega t\right) \end{cases}$$

- De forma que supondo a interface entre os dois planos em $z = 0$:

$$\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x + \underbrace{\cancel{K_y y}}_{\substack{=0\text{ ; pois a onda se}\\ \text{propaga apenas no}\\ \text{plano } xz.}} + \underbrace{\cancel{K_z z}}_{\substack{=0\text{ ; pois z=0}\\ \text{(na interface)}}}$$

- Portanto, $\boxed{\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x}$ para as três ondas (*incidente, refletida e transmitida*) na interface.

Note que *para a onda refletida o sentido de propagação é –x, mas o* $\vec{K}$ *também é no sentido de –x!*

- Aplicando a condição de continuidade $\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$ na interface (no 1º caso, por exemplo):

$$E_{0i}\cos\theta_i \cos s(K_i \sin\theta_i . x - \omega_i t) - E_{0r}\cos\theta_r \cos(K_r x \sin\theta_r - \omega_r t) = E_{0t}\cos\theta_t \cos(K_t x \sin\theta_t - \omega_t t)$$

- Como esta igualdade deve valer para qualquer *x* e qualquer *t* $\Rightarrow$ a dependência funcional em relação a *x* e *t*, de cada parcela, deve ser a mesma!

- Ou seja: $\cos(K_i x \sin\theta_i - \omega_i t) = cos(K_r x \sin\theta_r - \omega_r t) = \cos(K_t x \sin\theta_t - \omega_t t)$

- E como deve valer para qualquer ponto da interface, pegando $x = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t}$.

- Como deve valer para qualquer *t* $\Rightarrow$ pego para $t = 0$ (do cronômetro).

- Assim: $\boxed{K_i x \sin\theta_i = K_r x \sin\theta_r = K_t x \sin\theta_t}$ (1)

- Agora, como $K = \dfrac{n\omega}{c} \Rightarrow$ quando *n* for o mesmo, *K* também é o mesmo!

  $\therefore K_i = K_r \Rightarrow$ da 1ª igualdade (equação 1): $\sin\theta_i = \sin\theta_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r} \equiv \text{"}\textit{Lei da Reflexão}\text{"}$$ (já conhecida da ótica geométrica)

- Portanto, da 2ª igualdade: $\dfrac{n_1 \cancel{\omega}}{\cancel{c}}\sin\theta_i = \dfrac{n_2\cancel{\omega}}{\cancel{c}}\sin\theta_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t} \equiv \text{"}\textit{Lei de Snell}\text{"}$$

- Veja agora que interessante. Deste último resultado:

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{quando } \boxed{\sin\theta_i = \sin\theta_i^{\text{crítico}} = \frac{n_2}{n_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{n_2}{n_1} = 1 \Rightarrow \boxed{\theta_t = \pi/2}$$

- Ou seja, $\boxed{\theta_i^{\text{crítico}} = \arcsin\frac{n_1}{n_2}} \Rightarrow$ se $\boxed{\theta_i > \theta_i^{\text{crítico}}} \Rightarrow$ há ***reflexão total***.

*Onda sai "rasante", e não tem muito sentido falar em "luz refratada"*

- Note também que isto só ocorre quando $n_1 > n_2$ ($n_2$ não pode ser maior que $n_1$!).

- Retornando agora aos casos de incidência oblíqua do início da aula e lembrando que as relações de continuidade:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases}$$ (meios dielétricos, *componentes tangenciais à interface entre os 2 meios*)

devem valer para qualquer valor $x$ e $t$ (*posso fazer $x = 0$ e $t = 0$*) $\Rightarrow$ podemos trabalhar apenas com as amplitudes dos campos de forma a obter os *Coeficientes de Fresnel*:

$$r_{12}// = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}$$

$$t_{12}// = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t + n_2\cos\theta_i}$$

Note que, com respeito a este caso, para $\theta_i = \theta_r = 0^o$, caímos no caso de *Incidência Normal*

$$r_{12}\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

$$t_{12}\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}$$

- Vamos exemplificar um destes casos (o 1º deles - os outros, demonstrar em casa):

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta r = E_{0t}\cos\theta_t \\ H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow H_{0i} + H_{0r} = H_{0t} \Rightarrow (\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0) \Rightarrow B_{0i} + B_{0r} = B_{0t} \Rightarrow \left(E_0 = vB_0 = \frac{c}{n}B_0\right) \end{cases} \quad (2)$$

$(n = c/v)$

$$\therefore\ n_1E_{0i} + n_1E_{0r} = n_2E_{0t} \quad \Rightarrow \quad E_{0t} = \frac{1}{n_2}\left(n_1E_{0i} + n_1E_{0r}\right) \quad (3)$$

- Então, de (3) em (2): $E_{0i}\cos\theta_i - E_{0r}\cos\theta_r = \frac{1}{n_2}\left(n_1E_{0i} + n_1E_{0r}\right)\cos\theta_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow n_2E_{0i}\cos\theta_i - n_1E_{0i}\cos\theta_t = n_1E_{0r}\cos\theta_t + n_2E_{0r}\cos\theta r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t\right)E_{0i} = \left(n_1\cos\theta_t + n_2\cos\underbrace{\theta_r}_{=\theta_i}\right)E_{0r}$$

- Agora, quando formos tratar da *Potência da Radiação* Incidente, Refletida e Transmitida, veja que só irá nos interessar, nos cálculos, as *Componentes Perpendiculares do Vetor de Poynting com respeito à interface*.

- De modo que a *Refletância* e a *Transmitância* serão:

$$R=\frac{\bar{S}_r\cos\theta_r}{\bar{S}_i\cos\theta_i}=\frac{I_r}{I_i}=r_{12}{}^2 \qquad (\text{pois } \vec{S}_r\propto E_{0r}^2) \qquad \left(\bar{S}=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 c}\overline{E\,E^*}\right)$$

$$T=\frac{\bar{S}_t\cos\theta_t}{\bar{S}_i\cos\theta i}=\frac{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{n_2}{\cancel{\mu_0 c}}\right)\boxed{E_{ot}{}^2}\cos\theta_t}{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{\cancel{\mu_0 c}}\right)\boxed{E_{oi}{}^2}\cos\theta_i}=\frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)^2$$

$= t_{12}^2$

- Ou seja: $\begin{cases} R_\perp=r_\perp^2 \\ T_\perp=\dfrac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}t_\perp^2\end{cases}$ ; $\begin{cases} R_{//}=r_{//}^2 \\ T_{//}=\dfrac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}t_{//}^2\end{cases}$

- De forma que os *Coeficientes de Fresnel* permitem que se obtenha $R$ e $T$ a partir de $n_1,\ n_2,\ \theta_i(=\theta_r),\ \theta_t$ ; que são facilmente obtidos.

- Pode-se verificar facilmente (*ver apêndice 1*) que nestes casos o *Princípio de Conservação de Energia* também é satisfeito:

$$R_{//}+T_{//}=1 \qquad \text{e} \qquad R_\perp+T_\perp=1$$

- As vezes, é útil escrever os Coeficientes de Fresnel da forma:

$$\begin{cases} r_{12}\,//=\dfrac{tg(\theta_i-\theta_t)}{tg(\theta_i+\theta_t)} \\ t_{12}\,//=\dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}\end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r_{12}\perp=\dfrac{\sin(\theta_t-\theta_i)}{\sin(\theta_t+\theta_i)} \\ t_{12}\perp=\dfrac{2\cos\theta_i\sin\theta_t}{\sin(\theta_i+\theta_t)}\end{cases}$$

- Exemplo: a eq. acima que envolve $t_{12}\,//$ :

$$t_{12}\,// = (\text{usando a } \textit{Lei de Snell}) = \frac{2\cos\theta_i\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)}{(\sin\theta_i\cos\theta_t+\cos\theta_i\sin\theta_t)(\cos\theta_i\cos\theta_t+\sin\theta_i\sin\theta_t)}=$$

$$=\frac{2n_1\cos\theta_i}{\frac{n_2}{\sin\theta_i}\left(\underbrace{\sin\theta_i\cos^2\theta_t\cos\theta_i}+\underline{\sin^2\theta_i\cos\theta_t\sin\theta_t}+\underline{\cos^2\theta_i\sin\theta_t\cos\theta_t}+\underbrace{\cos\theta_i\sin^2\theta_t\sin\theta_i}\right)}=$$

Colocando em evidência termos tipo (...) $(\sin^2+\cos^2)$ = (...)

$$=\frac{2n_1\cos\theta_i}{\cancel{\frac{n_2}{\sin\theta_i}}[\sin\theta_i\cos\theta_i+\sin\theta_t\cos\theta_t]}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\left[\cos\theta_i+\underbrace{\left(\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}\right)}_{=n_1/n_2}\cos\theta_t\right]}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i+n_1\cos\theta_t}$$

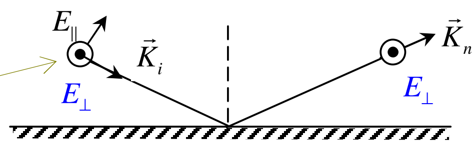
√

- A partir destas *relações alternativas dos Coeficientes de Fresnel* fica fácil também mostrar (ver apêndice 2) que:

$$\begin{cases} r_{12} = -r_{21} \\ r_{12}{}^2 + t_{12}t_{21} = 1 \end{cases} \qquad \text{( \textit{vamos utilizá-las em uma aula futura})}$$

- Um outro resultado interessante envolve a situação na qual não há onda *refletida perpendicularmente ao plano da incidência*, ou seja, componente da onda *paralela à interface* entre os dois meios.

estou representando as duas componentes da onda




- Para isto acontecer devemos ter $r_{12}\,// = 0 \Rightarrow \boxed{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t = 0} \Rightarrow$

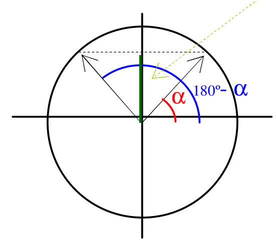
$$\Rightarrow \text{( usando Snell: } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \text{ )} \Rightarrow \underbrace{\sin\theta_i \cos\theta_i}_{=\,1/2\sin(2\theta_i)} = \underbrace{\sin\theta_t \cos\theta_t}_{=\,1/2\sin(2\theta_t)}$$

- Então: $\sin^2\theta_i = \sin^2\theta_t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cancel{\theta_i = \theta_t} \Rightarrow \\ 2\theta_i = 180° - 2\theta_t \end{cases}$ meios indistinguíveis, não há interface!

$$\Big\downarrow \textit{mas!}$$

$$\underline{\sin(2\theta_i) = \sin(180° - 2\theta_t)}$$

$\sin(180° - 2\theta_t) = \sin 2\theta_t$



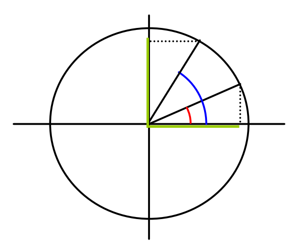

- Assim: $\boxed{\theta_i + \theta_t = \pi/2}$ ≡ Condição para que só haja componente de $\vec{E}$ **paralela à interface** (⊥ ao plano de incidência) na reflexão!

- Forma mais interessante (útil) de expressar este resultado: Faço $\boxed{\theta_i = \pi/2 - \theta_t}$ e tiro o cosseno dos 2 lados:

$$\cos\theta_i = \cos(\pi/2 - \theta_t) = \sin\theta_t = \text{(Snell)} = \frac{n_1 \sin\theta_i}{n_2}$$

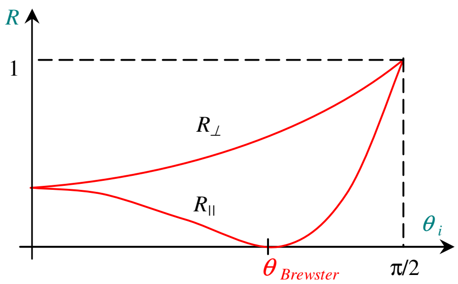
$$\therefore \boxed{tg\,\theta_i = n_2/n_1} \equiv \textbf{\textit{“Lei de Brewster”}}$$

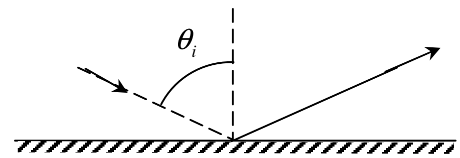
só depende de $\theta_i$ e dos índices refração



- Note que esta lei fornece a <u>*condição necessária*</u> para que haja a <u>Polarização da onda *EM* por reflexão</u>, quando tivermos interface entre 2 meios dielétricos.

- Para uma interação ar-vidro, por exemplo $(n_1 = 1,\ n_2 = 1{,}5)$ um gráfico de valores de $R_{\perp}$ e $R_{//}$ em função de $\theta_i$ será:




(quando $\theta_i = \pi/2 \rightarrow$ "tudo passa")

- Fazendo as contas: $\theta_B = arctg\left(\frac{1,5}{1,0}\right) \Rightarrow \theta_B \approx 56,3°$.

- Nos dias ensolarados, parte dos raios solares refletidos nas diversas superfícies horizontais são polarizados $\perp$ ao plano de incidência $\Rightarrow$ as lentes dos óculos polaróides são posicionadas de forma a cortar esta componente (ou seja, o eixo de polarização das lentes é posicionado na direção vertical!).

## ***Apêndice 1***

$$R_{//} + T_{//} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_{//} + \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_{//} = \frac{n_2^2\cos^2\theta_i + n_1^2\cos\theta_t - 2n_1n_2\cos\theta_i\cos\theta_t}{\left(n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t\right)^2} +$$

$$+ \frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\,\frac{4n_1^2\cos^2\theta_i}{\left(n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t\right)^2} =$$

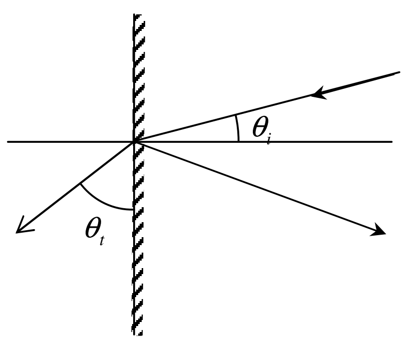
$$= \frac{n_2^2\cos^2\theta_i + n_1^2\cos^2\theta_t - 2n_1n_2\cos\theta_i\cos\theta_t + \cancel{4}^{2}n_1n_2\cos\theta_i\cos\theta_t}{\left(n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t\right)^2} = 1$$

## ***Apêndice 2***

Como $r_{12}\,// = \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg\left(\theta_i + \theta_t\right)} \Rightarrow$ onda vinda <u>do meio 2</u>: $\theta_i < \theta_t \Rightarrow$ surge o sinal $\ominus$

$\Downarrow$

O mesmo raciocínio para $r_{12\perp}$




Nota: $r^2{}_{12} + t_{12}t_{21} = tg^2\left(\theta_i - \theta_t\right)$ .... fica mais fácil usar os coeficientes na forma original?