



# Eletromagnetismo II

## 15<sup>a</sup> Aula

Professor Alvaro Vannucci

## Na última aula, vimos...

- Incidência oblíqua:  
(2 meios dielétricos)  $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\theta_i = \theta_r} \text{ (Lei da Reflexão)} \\ \boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t} \text{ (Lei de Snell)} \end{array} \right.$
- Obtivemos os Coeficientes de Fresnel  $\left( r_{12}^{//}, r_{12}^{\perp}, t_{12}^{\perp}, t_{12}^{//} \right)$

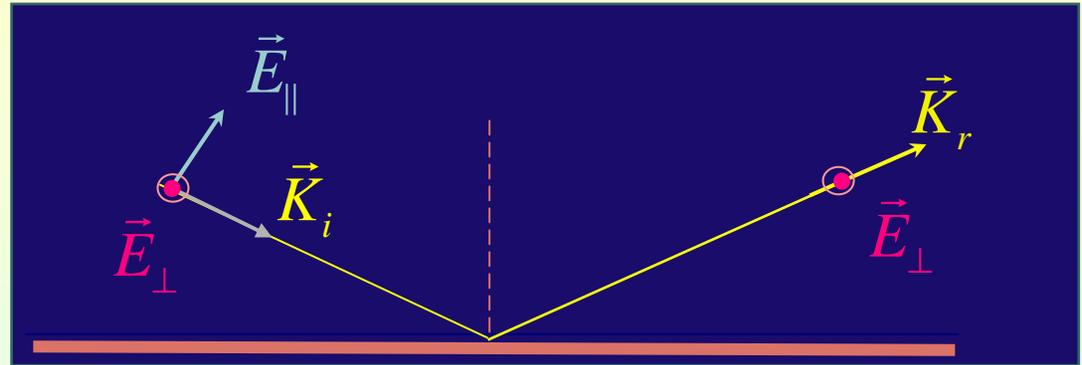
de forma que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{(R)^{// \text{ ou } \perp} = (r^2)^{// \text{ ou } \perp}} \\ \boxed{(T)^{// \text{ ou } \perp} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} (t^2)^{// \text{ ou } \perp}} \end{array} \right.$$

- Também vimos  $\begin{cases} r_{12} = -r_{21} \\ r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1 \end{cases}$

- Lei de Brewster:

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$



- Outro resultado interessante refere-se à situação na qual a onda *EM* é totalmente refletida; ou seja, nada passa para o meio 2 -> **Reflexão Total**:  $(\theta_i \geq \pi/2)$

$$R^\perp = R^\parallel = 1 \Rightarrow r_{12}^\parallel = r_{12}^\perp = 1$$

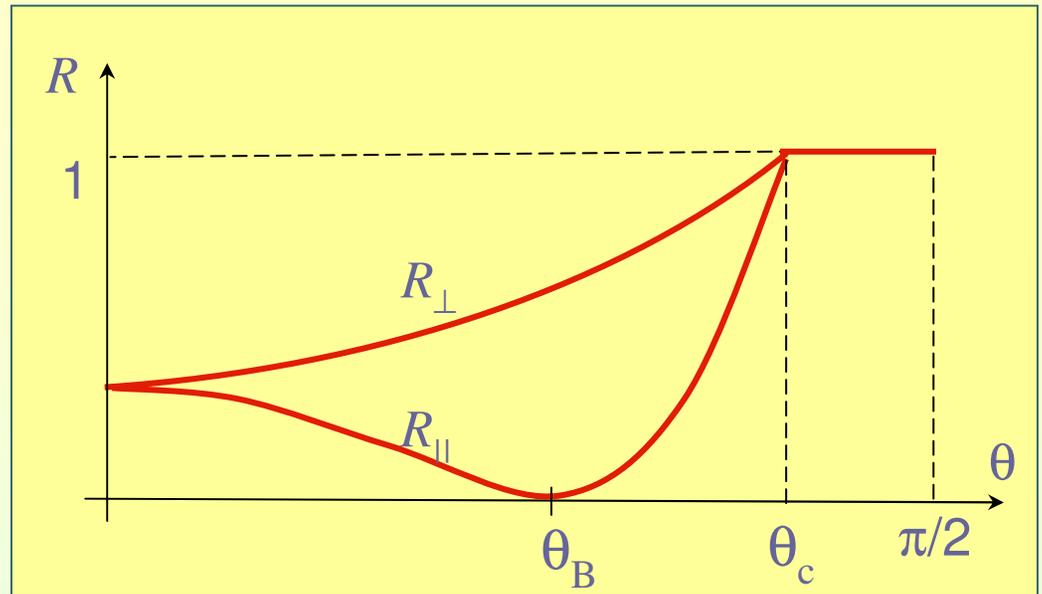
- Dos Coeficientes de Fresnel:

$$\sin \theta_i^{\text{crítico}} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow n_2 < n_1$$

$$\begin{cases} r_{12}^\perp = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ r_{12}^\parallel = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \end{cases}$$

- Comparando resultados da Lei de Brewster e da Reflexão Total ( $n_2 < n_1$ ):

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \sin \theta_C \Rightarrow$$



$$\left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \leftarrow (\cos \theta \leq 1)$$

$$\Rightarrow \text{como } \operatorname{tg} \theta \geq \sin \theta \text{ sempre} \Rightarrow \boxed{\theta_B \leq \theta_C}$$

- Retomando o problema vidro-ar da aula passada ( $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1,0$ )  
 $\Rightarrow \theta_B \approx 54^\circ$  e  $\theta_C \approx 42^\circ$
- Portanto, quando  $n_2 < n_1$  e  $\theta_i \geq \theta_C \Rightarrow$  ocorre *Reflexão Total*
- Aplicação tecnológica deste conceito: “*Fibras Óticas*”. (ver ‘lanterna’)

## Incidência de Onda EM Planas na Interface Dielétrico-Condutor

- O procedimento a ser adotado, para analisar este caso, é análogo ao utilizado para dielétricos, realizado anteriormente!
- Diferença básica: certas grandezas adquirem caráter complexo.
- Supondo o meio 2 condutor:

$$\Rightarrow \tilde{K}_t = \frac{\tilde{n}_2 \omega}{c} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_{R2}} \frac{\omega}{c}$$

*nº de onda* (pointing to  $\tilde{K}_t$ )

*constante dielétrica* (pointing to  $\tilde{\epsilon}_{R2}$ )

*índice de refração* (pointing to  $\tilde{n}_2$ )

Sendo que:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i = (K_r + iK_i)\hat{u} = K\hat{u} \\ \tilde{n} = n + in_* \\ \tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + i\epsilon_{Ri} \end{cases} \begin{cases} K_r = \frac{n\omega}{c} \\ K_i = \frac{n_*\omega}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \\ \epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \end{cases} \quad \tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R}$$

- Novamente, sendo complexo o  $\tilde{\vec{K}}_t$  da onda refratada (transmitida):

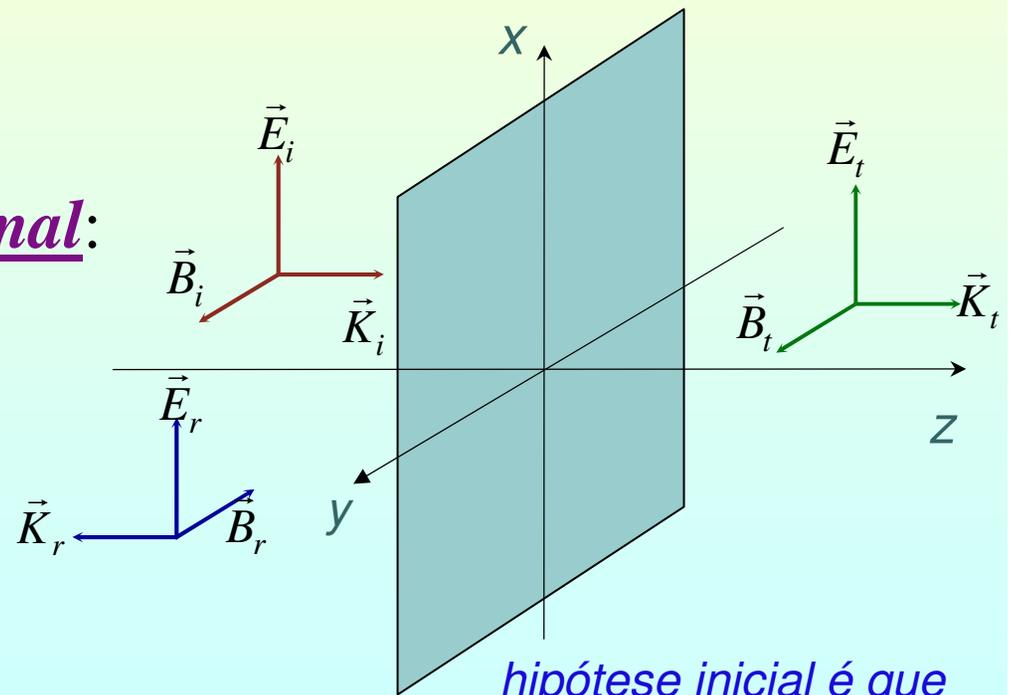
$$\tilde{\vec{E}}_t = \tilde{\vec{E}}_{0t} e^{i(\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \tilde{\vec{E}}_{0t} \underbrace{e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}}_{\text{termo de amortecimento da onda}} e^{i(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- Na interface entre 2 meios, vamos considerar:

- ✓ meio 1  $\equiv$  dielétrico
- ✓ meio 2  $\equiv$  condutor

- No caso de *Incidência Normal*:

$$\begin{cases} \tilde{\vec{E}}_i(z, t) = \tilde{E}_{0i} \hat{e}_x e^{i(K_1 z - \omega t)} \\ \tilde{\vec{E}}_r(z, t) = \tilde{E}_{0r} \hat{e}_x e^{i(-K_1 z - \omega t)} \\ \tilde{\vec{E}}_t(z, t) = \tilde{E}_{0t} \hat{e}_x e^{i(\tilde{K}_2 z - \omega t)} \end{cases}$$



hipótese inicial é que  $\vec{B}$  inverte a fase

$$(\tilde{K}_2 = K_r + i K_i) \rightarrow \left\{ \tilde{\vec{K}} = \vec{K}_r + i \vec{K}_i = \tilde{K} \hat{u} = (K_r + i K_i) \hat{u} \right\}$$

- Condições de Continuidade:

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ H_{1t} - H_{2t} = \frac{B_1}{\mu_1} - \frac{B_2}{\mu_2} = \kappa_{\perp}^{\text{livre}} = 0 \end{cases}$$

*(Só haverá cargas em movimento em resposta ao campo  $\vec{E}$  da onda.)*

- Então:  $(E_{1t} = E_{2t})_{z=0} \Rightarrow (\tilde{E}_{0i}e^{iK_1z} + \tilde{E}_{0r}e^{-iK_1z} = \tilde{E}_{0t}e^{i\tilde{K}_2z})_{z=0} \Rightarrow$   

$\downarrow$   
interface

sempre posso adotar  $\tilde{E}_0$  e pegar depois a parte real!

$\Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t}} \quad (1)$   
(na interface)

- Lembrando que para ondas planas:  $E_0 = vB_0 = \frac{c}{n} B_0$
- Da 2ª condição de continuidade (*em*  $z = 0$ ):  $\{H_{1t} - H_{2t} = 0\}$

$$\frac{n_1}{c} (\tilde{E}_{0i} - \tilde{E}_{0r}) = \frac{\tilde{n}_2}{c} \tilde{E}_{0t} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_{0i} + \tilde{E}_{0r} = \tilde{E}_{0t} \\ \tilde{E}_{0r} = \frac{n_1 - \tilde{n}_2}{n_1 + \tilde{n}_2} \tilde{E}_{0i} \\ \tilde{E}_{0t} = \frac{2n_1}{n_1 + \tilde{n}_2} \tilde{E}_{0i} \end{array} \right.$$

- É interessante também escrever a amplitude da onda refletida de outra maneira:

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{\left( \frac{n_1}{\tilde{n}_2} - 1 \right)}{\left( \frac{n_1}{\tilde{n}_2} + 1 \right)} \tilde{E}_{0i} \quad e \quad \tilde{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \frac{\tilde{n}_2}{n_1}} \tilde{E}_{0i} \quad (3)$$

- De forma que, para *excelentes condutores* (cond. perfeito,  $\sigma \rightarrow \infty$ ):

$$\left\{ c = a + ib \Rightarrow |c|^2 = a^2 + b^2 \right\} \quad \text{parte imaginária} \rightarrow \infty \Rightarrow c \rightarrow \infty$$

$$\left( \tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \rightarrow \infty \right) \Rightarrow \tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R} \rightarrow \infty \quad \therefore \begin{cases} \tilde{E}_{or} = -\tilde{E}_{oi} \\ \tilde{E}_{ot} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{E}_{or} = \frac{\left( \frac{n_1}{\tilde{n}_2} - 1 \right)}{\left( \frac{n_1}{\tilde{n}_2} + 1 \right)} \tilde{E}_{oi} \\ \tilde{E}_{ot} = \frac{2}{1 + \frac{\tilde{n}_2}{n_1}} \tilde{E}_{oi} \end{cases}$$

(contrário à nossa hipótese inicial)

o campo elétrico da onda refletida muda de fase; o magnético não.

este resultado vale para  $\sigma \rightarrow \infty$

- Neste caso, onda  $EM$  é Totalmente Refletida: por isso os ótimos condutores (faixa do visível: prata, por exemplo) são utilizados na fabricação de espelhos (uma fina camada basta, já que  $\delta_{luz}^{prata} \sim 100\text{Å}$ )

profundidade de atenuação

- Note que o vidro tem apenas a função de dar sustentação à película de prata, sem interferir no processo!

- Já na situação de bons condutores ( $\sigma$  é muito grande, mas não  $\infty$ ):

$$\left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg \epsilon_R \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_R \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_2 \right) \therefore \tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R} \text{ é muito grande!}$$

$$\left( \tilde{\epsilon}_R = \epsilon_R + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

permissividade elétrica do condutor

- Para analisar as equações (3), vou chamar  $\boxed{\frac{\tilde{n}_2}{n_1} = \tilde{\beta}}$  (muito grande!)

$$\tilde{E}_{0r} = \frac{\left(\frac{n_1}{\tilde{n}_2 - 1}\right)}{\left(\frac{n_1}{\tilde{n}_2 + 1}\right)} \tilde{E}_{0i} \quad ; \quad \tilde{E}_{0t} = \frac{2}{1 + \frac{\tilde{n}_2}{n_1}} \tilde{E}_{0i}$$

- De forma que:  $\tilde{E}_{0r} = -\left(\frac{1 - 1/\tilde{\beta}}{1 + 1/\tilde{\beta}}\right) \tilde{E}_{0i} \Rightarrow$  expandindo denominador:  
 $(1+x)^n = 1 + nx + \dots; \frac{1}{\tilde{\beta}}$  muito pequeno

$$\Rightarrow \tilde{E}_{0r} \approx -\left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}}\right) \left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}}\right) \tilde{E}_{0i} = -\left(1 - \frac{1}{\tilde{\beta}}\right)^2 \tilde{E}_{0i} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  (expandindo novamente...)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{E}_{0r} \sim -\left(1 - \frac{2}{\tilde{\beta}}\right) \tilde{E}_{0i} \Rightarrow \boxed{\tilde{E}_{0r} \sim \left(\frac{2}{\tilde{\beta}} - 1\right) \tilde{E}_{0i}} ; \tilde{\beta} \equiv \text{grandeza complexa.}$$

- Chamando Refletância:

$$R = \frac{|\tilde{E}_{0r}|^2}{|\tilde{E}_{0i}|^2} = \left| \frac{2}{\tilde{\beta}} - 1 \right|^2 = \left( \frac{2}{\tilde{\beta}} - 1 \right) \left( \frac{2}{\tilde{\beta}^*} - 1 \right) =$$

tiro o módulo por não me preocupar com a fase.

$$= \frac{4}{\tilde{\beta}\tilde{\beta}^*} - \frac{2}{\tilde{\beta}} - \frac{2}{\tilde{\beta}^*} + 1 \approx 1 - 2 \frac{\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^*}{\tilde{\beta}\tilde{\beta}^*}$$

muito pequeno

- Assim  $\left( \frac{\tilde{n}_2}{n_1} = \tilde{\beta} \right)$ :  $R = 1 - 2 \frac{\frac{\tilde{n}_2}{n_1} + \frac{\tilde{n}_{*2}}{n_1}}{\left( \frac{\tilde{n}_2}{n_1} \right) \left( \frac{\tilde{n}_{*2}}{n_1} \right)}$  ;  $\begin{cases} \tilde{n}_2 = n_2 + in_{*2} \\ \tilde{n}_2\tilde{n}_{*2} = n_2^2 + n_{*2}^2 + \cancel{n_2n_{*2}} - \cancel{n_2n_{*2}} \end{cases}$

$$\therefore R = 1 - 2 \frac{\frac{n_2 + \cancel{in_{*2}} + n_2 - \cancel{in_{*2}}}{n_1}}{\frac{n_2^2 + n_{*2}^2}{n_1^2}} \Rightarrow R = 1 - (2n_1) \left( \frac{2n_2}{n_2^2 + n_{*2}^2} \right)$$

- Lembrando agora que, para bons condutores:  $n_{*2} \sim n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_{Ri}}{2}}$  ;

sendo que  $\epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$  e  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{R1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}$  :

*meio 1*

*componentes de  $\tilde{n}_2$*

$$\left\{ R = 1 - (2n_1) \left( \frac{2n_2}{n_2^2 + n_{*2}^2} \right) \right\}$$

- Então:  $R = 1 - 2n_1 \left( \frac{\cancel{2} n_2}{\cancel{2} n_2^2} \right) = 1 - 2 \frac{n_1}{n_2} = 1 - 2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{\epsilon_0} \omega}{\sigma}}$

$$\therefore R \sim 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_1 \omega}{\sigma}}$$

*meio 1*

- Define-se “**Absorvância**”, a energia não-refletida, que é dissipada eventualmente no meio condutor:

$$A = 1 - R$$

- De forma que, para bons condutores:

$$R \sim 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\omega}{\sigma}} \rightarrow A = 1 - R \rightarrow A_N = \sqrt{\frac{8\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \equiv \text{“Relação de Hagen-Rubens”}$$

*Incidência Normal*

- Esta relação vale para bons condutores na faixa de até  $\mu$ -ondas e para metais em geral até  $\sim$  infra-vermelho; fora destas condições uma expressão mais correta deve ser obtida.

Exemplo: Prata ( $\sigma = 3 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ), meio 1  $\equiv$  ar,  $f = 10^{10} s^{-1}$  (I.V.)

$$A_N = \sqrt{(8)(9 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^{10})\left(\frac{1}{3} \times 10^{-7}\right)} \Rightarrow \boxed{A_N \sim 4 \times 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{R_N = 99,96\%}$$

( $\therefore$  pouca energia é absorvida/dissipada)

- Pegando a faixa do visível (ex. Griffiths):

$$\sigma_{prata} = 6 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1} \quad e \quad \omega = 4 \times 10^{15} s^{-1} : \quad R_N = 0,93$$

*$\sigma$  varia com a frequência!*

- Para a água do mar  $\sigma = 4,3 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  e  $f = 60 kHz$  (rádio):

$$A_N = 2,5 \times 10^{-3} \quad R_N = 99,75\%$$

- Uma indicação em física da boa reflexão dos metais, em função da frequência da onda incidente, na faixa do visível, envolve a cor da luz refletida.

### Exemplos:

➤ **cobre**: reflete ondas até ~ vermelho (amarelo, azul, são transmitidos!).

➤ **ouro**: reflete ondas até ~ amarelo.

➤ **alumínio**: reflete todas as cores.

- Quanto ao caso de *Incidência Oblíqua*, resultados são semelhantes aos já obtidos, só que os *Coeficientes Fresnel* são agora *grandezas complexas* ( $\tilde{n}_2$  é complexo).

- A única coisa interessante refere-se ao fato das ondas refletidas, em relação à onda incidente, terem *fases* que agora dependem do ângulo de fase e do fato do ângulo  $\tilde{\theta}_t$  ser complexo.

- Por exemplo: 
$$\begin{cases} \tilde{r}_{12//} = |\tilde{r}_{12//}| e^{i\alpha_{//}} \\ \tilde{t}_{12\perp} = |\tilde{t}_{12\perp}| e^{i\beta_{\perp}} \end{cases}$$

- Também veremos, na próxima aula, que será possível usar equação semelhante à Lei de Snell para interface com meio condutor; supondo que o ângulo  $\tilde{\theta}_t$  possa ser complexo:

$$n_1 \sin \theta_i = \tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_t$$

Note que  $\tilde{n}$  há meio de se representar  $\tilde{\theta}_t$  graficamente como fizemos para dielétricos!