Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

15ª aula – 27/abr/2007

- Vimos, para *Incidência Oblíqua*: (2 meios dielétricos)
$$\begin{cases} \boxed{\theta_i = \theta_r} & \text{(Lei de Reflexão)} \\ \boxed{n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t} & \text{(Lei de Snell)} \end{cases}$$

- Obtivemos também os *Coeficientes de Fresnel* correspondentes $r_{12\perp}$, $r_{12//}$, $t_{12\perp}$ e $t_{12//}$:
$$\begin{cases} \boxed{(R)_{//\text{ou}\perp} = (r)^2_{//\text{ou}\perp}} \\ \boxed{(T)_{//\text{ou}\perp} = \dfrac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}(t)^2_{//\text{ou}\perp}} \end{cases}$$

- De forma que:
$$\begin{cases} \boxed{r_{12} = -r_{21}} \\ \boxed{r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1} \end{cases}$$

- E a *Lei de Brewster*, que rege a <u>polarização</u> da onda <u>por reflexão</u>: $\boxed{tg\,\theta_i = {n_2}/{n_1}}$

- Outro resultado interessante que analisamos refere-se à situação na qual a onda *EM* é totalmente refletida (*reflexão total*) $\Rightarrow$ nada passa para o meio 2. Neste caso:
$$\boxed{R_\perp = R_{//} = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_{12//} = r_{12\perp} = 1}$$

- Ou seja, dos *Coeficientes de Fresnel*:
$$\begin{cases} r_{12\perp} = \dfrac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} \\ r_{12//} = \dfrac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \end{cases} \Rightarrow$$
Reflexão Total ocorre quando $\theta_t = {\pi}/{2}$

- Lembrando que, com relação ao <u>*ângulo de incidência*</u>: $\boxed{\sin\theta_i^{\text{crítico}} = \dfrac{n_2}{n_1}}$, de forma que $n_2 < n_1$, necessariamente, para que a <u>*reflexão total*</u> ocorra.

- Mas, da *Lei de Brewster*: $tg\theta_B = \dfrac{n_2}{n_1} = \sin\theta_C \Rightarrow$ como $tg\theta$ é sempre $\geq \sin\theta \Rightarrow \boxed{\theta_B \leq \theta_C}$

  $\left({\sin\theta}/{\cos\theta}\right)$ valor máximo = 1

- Pegando novamente o problema vidro-ar da aula passada: $n_2 = 1{,}0$, $n_1 = 1{,}5 \Rightarrow \theta_B \approx 54^\circ$; $\theta_C \approx 42^\circ$

- Portanto, quando $\theta_i \geq \theta_C \Rightarrow$ ocorre *Reflexão Total*

- Aplicação tecnológica deste conceito: fabricação de *“Fibras Óticas”*

- Lembrando agora, para ondas planas: $E_0 = c\,B_0 = c/n\,B_0 \Rightarrow$ da 2ª eq. de continuidade (em $x=0$):

$$\boxed{\frac{n_1}{\cancel{c}}\left(\tilde{E}_{0i}-\tilde{E}_{0r}\right)=\frac{\tilde{n}_2}{\cancel{c}}\tilde{E}_{0t}} \qquad (2)$$

- De (1) e (2), lembrando que $\boxed{\tilde{n}=\frac{\tilde{K}c}{\omega}}$ (ver *apêndice*): $\begin{cases}\boxed{\tilde{E}_{0r}=\dfrac{n_1-\tilde{n}_2}{n_1+\tilde{n}_2}\tilde{E}_{0i}}\\ \boxed{\tilde{E}_{0t}=\dfrac{2n_1}{n_1+\tilde{n}_2}\tilde{E}_{0i}}\end{cases}$

- É interessante também escrever a amplitude de reflexão de outra maneira:

$$\tilde{E}_{0r}=\frac{\left(\frac{n_1}{\tilde{n}_2}-1\right)}{\left(\frac{n_1}{\tilde{n}_2}+1\right)}\tilde{E}_{0i} \qquad \text{e} \qquad \tilde{E}_{0t}=\frac{2}{1+\frac{\tilde{n}_2}{n_1}}\tilde{E}_{0i} \qquad (3)$$

- De forma que, para ***excelentes condutores*** (*p/ condutor perfeito,* $\sigma\rightarrow\infty$):

$$\left(\tilde{\varepsilon}_R=\varepsilon_R+i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right)\Rightarrow\left(\tilde{n}_2=\sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}\rightarrow\infty\right)\Rightarrow \text{as eqs. em (3) ficam:}\begin{cases}\tilde{E}_{0r}=-\tilde{E}_{0i}\\ \tilde{E}_{0t}=0\end{cases}$$

o campo elétrico da onda refletida muda de fase (e não o magnético)

(contrário à nossa hipótese inicial)

- Ou seja, a onda *EM* é ***Totalmente Refletida***: por isso os ótimos condutores (na faixa do visível, a prata, por exemplo) são utilizados na fabricação de espelhos (a utilização de uma fina camada basta, já que a sua *Profundidade de Atenuação*, neste caso: $\delta_{luz}^{prata}\sim 100A°$).

- Note que o vidro, então, teria apenas a função de dar sustentação à película de prata, sem interferir no processo!

- Já na situação de ***bons condutores***, σ **é muito grande** (mas não ∞):

permissividade elétrica do condutor

$$\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}>>\varepsilon_R \;\Rightarrow\; \sigma>>\omega\varepsilon_0\varepsilon_R \;\Rightarrow\; \sigma>>\omega\varepsilon_2\right) \text{ e } \therefore\ \tilde{n}_2 \textit{ \textbf{é muito grande}}.$$

- Para analisar as equações (3) acima, vou chamar $\boxed{\frac{\tilde{n}_2}{n_1}=\tilde{\beta}}$, de forma que: $\tilde{E}_{0r}=-\left(\frac{1-1/\tilde{\beta}}{1+1/\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0i}$

- Observando que $\tilde{n}_2$ <u>sendo muito grande</u> (*para bons condutores*) $\Rightarrow \tilde{\beta}$ é muito grande e $\therefore\ 1/\tilde{\beta}$ <u>é muito pequeno</u>!

- Assim, expandindo o denominador acima: $(1+x)^n=1+nx+\ldots\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \tilde{E}_{0r}\simeq-\left(1-\frac{1}{\tilde{\beta}}\right)\left(1-\frac{1}{\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0i}=-\left(1-\frac{1}{\tilde{\beta}}\right)^2\tilde{E}_{0i}\Rightarrow \text{(expandindo novamente)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \tilde{E}_{0r} \sim -\left(1-\frac{2}{\tilde{\beta}}\right)\tilde{E}_{0i}\ \Rightarrow\ \tilde{E}_{0r} \sim \left(\frac{2}{\tilde{\beta}}-1\right)\tilde{E}_{0i}\quad ;\quad \tilde{\beta} \equiv grandeza\ complexa.$$

pego em módulo para não me preocupar com a fase

- Calculando agora a *Refletância*: $R = \dfrac{\left|\tilde{E}_{0r}\right|^2}{\left|\tilde{E}_{0i}\right|^2} = \left|\dfrac{2}{\tilde{\beta}}-1\right|^2 = \left(\dfrac{2}{\tilde{\beta}}-1\right)\left(\dfrac{2}{\tilde{\beta}^*}-1\right) =$

$$= \cancel{\frac{4}{\tilde{\beta}\tilde{\beta}^*}} - \frac{2}{\tilde{\beta}} - \frac{2}{\tilde{\beta}^*} + 1 \approx 1 - 2\frac{\tilde{\beta}+\tilde{\beta}^*}{\tilde{\beta}\tilde{\beta}^*}$$

muito, muito pequeno

- Assim: $R = 1 - 2\dfrac{\dfrac{\tilde{n}_2}{n_1}+\dfrac{\tilde{n}_2^*}{n_1}}{\left(\dfrac{\tilde{n}_2}{n_1}\right)\left(\dfrac{\tilde{n}_2^*}{n_1}\right)} \Rightarrow R = 1 - 2\dfrac{\dfrac{n_2 + \cancel{in_{*2}} + n_2 - \cancel{in_{*2}}}{n_1}}{\dfrac{n_2^2+n_*^2}{n_1^2}} = 1 - (2n_1)\left(\dfrac{2n_2}{n_2^2+n_{*2}^2}\right)$

$$\tilde{n}_2\tilde{n}_2^* = n_2^2 + n_{*1}^2 + \cancel{n_2 n_{*2}} - \cancel{n_2 n_*^2}$$

- Lembrando novamente que, para bons condutores: $n_{*2} \sim n_2 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2}}$; sendo que $\varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_{0\omega}}$ e

(componentes de ñ)

que para o meio 1: $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{Ri}} = \sqrt{\varepsilon_1 / \varepsilon_0}$:

meio 1

$$R = 1 - 2n_1\left(\frac{\cancel{2}\,\cancel{n_2}}{\cancel{2}n_2^{\cancel{2}}}\right) = 1 - 2\frac{n_1}{n_2} = 1 - 2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\cancel{\varepsilon_0}}\cdot 2\cdot\frac{\varepsilon_{0\omega}}{\sigma}} \Rightarrow \boxed{R \sim 1 - \sqrt{\frac{8\varepsilon_1\omega}{\sigma}}}$$

- Define-se "*Absorvância*", a *energia não-refletida* (e que é eventualmente dissipada no meio condutor): $\boxed{A = 1 - R}$

- De forma que, *para bons condutores*: $\boxed{A_N = \sqrt{\dfrac{8\varepsilon_0\omega}{\sigma}}}$ ≡ "**Relação de Hagen-Rubens**"

Incidência Normal *no ar: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$*

- Esta relação vale para bons condutores na faixa de até μ-ondas e, para metais em geral, até ~ o infra-vermelho (+ a região do visível); fora destas condições uma expressão mais correta deve ser obtida.

- Exemplo: Para a prata $\left(\sigma = 3\times10^7\,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}\right)$, meio 1 ≡ ar , $f = 10^{10}\,s^{-1}$ (Infra-Vermelho) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A_N = \sqrt{(8)\left(9\times10^{-12}\right)\left(2\pi\times10^{10}\right)\left(\frac{1}{3}\times10^{-7}\right)} \Rightarrow \boxed{A_N \sim 4\times10^{-4}} \Rightarrow \boxed{R_N = 99{,}96\%}$$

∴ *pouca energia é absorvida/dissipada!*

- Considerando a faixa do visível (ex. Griffiths) $\sigma_{prata} = 6\times10^7\,(\Omega\cdot m)^{-1}$ e $\omega = 4\times10^{15}\,s^{-1}$:

σ varia com a freqüência! $\boxed{R_N = 0{,}93}$

- Agora, para a água do mar $\sigma = 4{,}3\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ e supondo $f = 60KH_z$ (rádio):

$$\boxed{A_N = 2{,}5\times10^{-3}}\ \text{e}\ \boxed{R_N = 99{,}75\%}$$

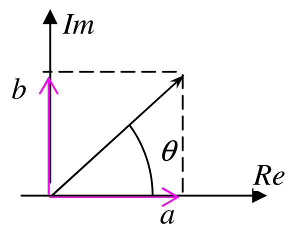
- Uma indicação, física, da boa reflexão dos metais, em função da freqüência da onda incidente, na **faixa do visível**, ***envolve a cor da luz refletida***.

- Exemplo: Cobre: reflete *ondas até ~ vermelho* (amarelo, azul, por exemplo, *são transmitidos*!).
  Ouro: reflete ondas até ~ amarelo.
  Alumínio: reflete todas as cores.

- Quanto ao caso de ***Incidência Oblíqua***, resultados são semelhantes aos já obtidos para dielétricos, só que os Coeficientes Fresnel são agora **grandezas complexas** ($\tilde{n}_2$ é complexo).

- Talvez o resultado mais interessante refere-se ao fato das ondas refletidas, em relação à onda incidente, terem **fases** que agora dependem do ângulo de fase (isto também vale para o caso de Incidência Normal) e ***do fato do ângulo $\tilde{\theta}_t$ ser complexo***:

$$\{\, c = a + ib = |c|\, e^{i\theta};\ \ |c|^2 = a^2 + b^2 \,\}$$



- Por exemplo: $\begin{cases} \tilde{r}_{12/\!/} = |\tilde{r}_{12/\!/}|\, e^{i\alpha_{/\!/}} \\ \tilde{t}_{12\perp} = |\tilde{t}_{12\perp}|\, e^{i\beta_{\perp}} \end{cases}$ vamos explorar este fato posteriormente (na película)

- Veremos também depois que será possível usar **equação semelhante à Lei de Snell** para a interface com meio condutor; com a única diferença do ângulo $\tilde{\theta}_t$ ser complexo:

$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_t}$$

note que agora não há meio de se representar $\tilde{\theta}_t$ ***graficamente****, como fizemos para dielétricos!*

Apêndice

$$\tilde{E}_{oi} + \tilde{E}_{or} = \frac{n_1}{\tilde{n}_2}\left(\tilde{E}_{oi} - \tilde{E}_{or}\right) = \frac{n_1}{\tilde{n}_2}\tilde{E}_{oi} - \frac{n_1}{\tilde{n}_2}\tilde{E}_{or} \quad \Rightarrow \quad \tilde{E}_{or}\left(1 + \frac{n_1}{\tilde{n}_2}\right) = \left(\frac{n_1}{\tilde{n}_2} - 1\right)\tilde{E}_{oi} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{E}_{or} = \left(\frac{n_1 - \tilde{n}_2}{\cancel{\tilde{n}_2}}\ \frac{\cancel{\tilde{n}_2}}{n_1 + \tilde{n}_2}\right)\tilde{E}_{oi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{E}_{or} = \frac{n_1 - \tilde{n}_2}{n_1 + \tilde{n}_2}\,\tilde{E}_{oi}}$$