INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

16ª Aula

Professor Alvaro Vannucci

Na última aula vimos...

- Interface Dielétrico/*Condutor* - incidência *normal* .

- Resultados obtidos :

1 - No caso de ***Condutor Perfeito*** $\rightarrow$ Reflexão Total

2 - Quando o meio 2 for um ***Bom Condutor*** :

Absorvância: $$\boxed{A_N = \sqrt{\frac{8\varepsilon_0\omega}{\sigma}}}$$

"relação Hagen-Rubens"

- Importante lembrar que os resultados foram obtidos aplicando o mesmo procedimento adotado para o caso dielétrico-dielétrico.

- Supondo agora *incidência oblíqua* e, seguindo novamente mesmo procedimento de anteriormente, obtêm-se os mesmos coeficientes de Fresnel, só que $n_2 \rightarrow \tilde{n}_2$; e os coeficientes serão *grandezas complexas*.

- De forma que o *análogo à Lei Snell* será:

$$\boxed{n_1 \sin\theta_i = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_t}$$

só que agora $\theta_t \rightarrow \tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_2$ ≡ **ângulo complexo**

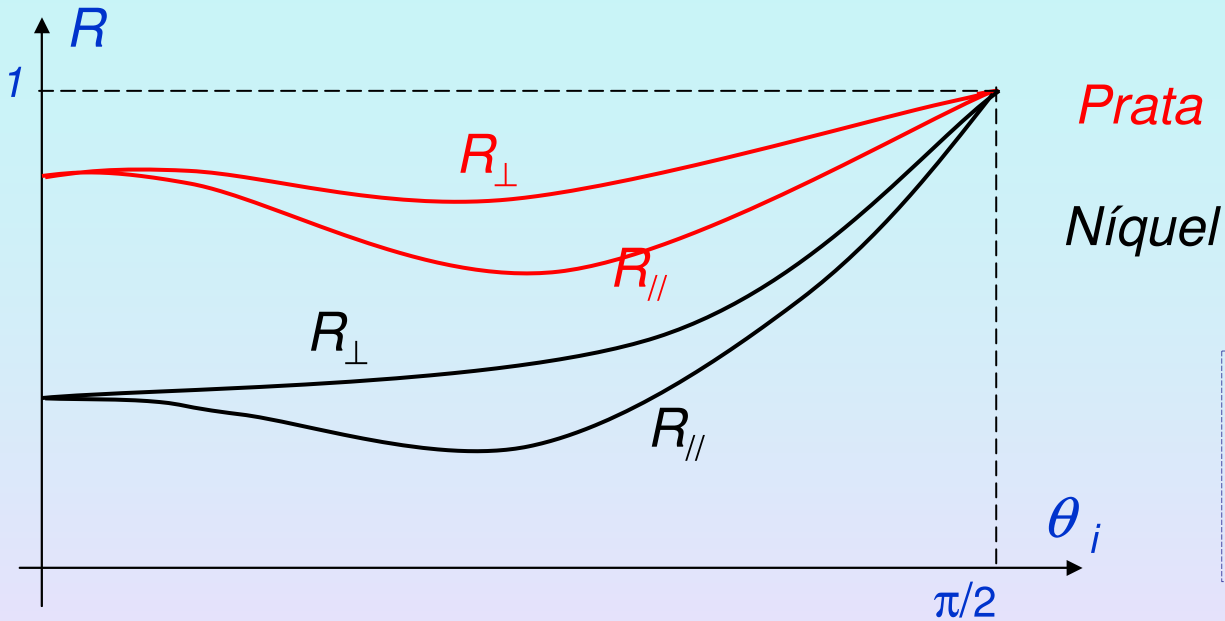
(inclusive nos coeficientes de Fresnel)

- Note, porém, que ficamos agora impossibilitados de representar $\tilde{\theta}_t$ *graficamente*.

- O que não é problema porque todos os resultados são obtidos *algebricamente* e ***não** geometricamente*.

- Agora, analisando a *lei de Brewster* $tg\,\theta_B = \dfrac{n_2}{n_1} \rightarrow \dfrac{\tilde{n}_2}{n_1}$,

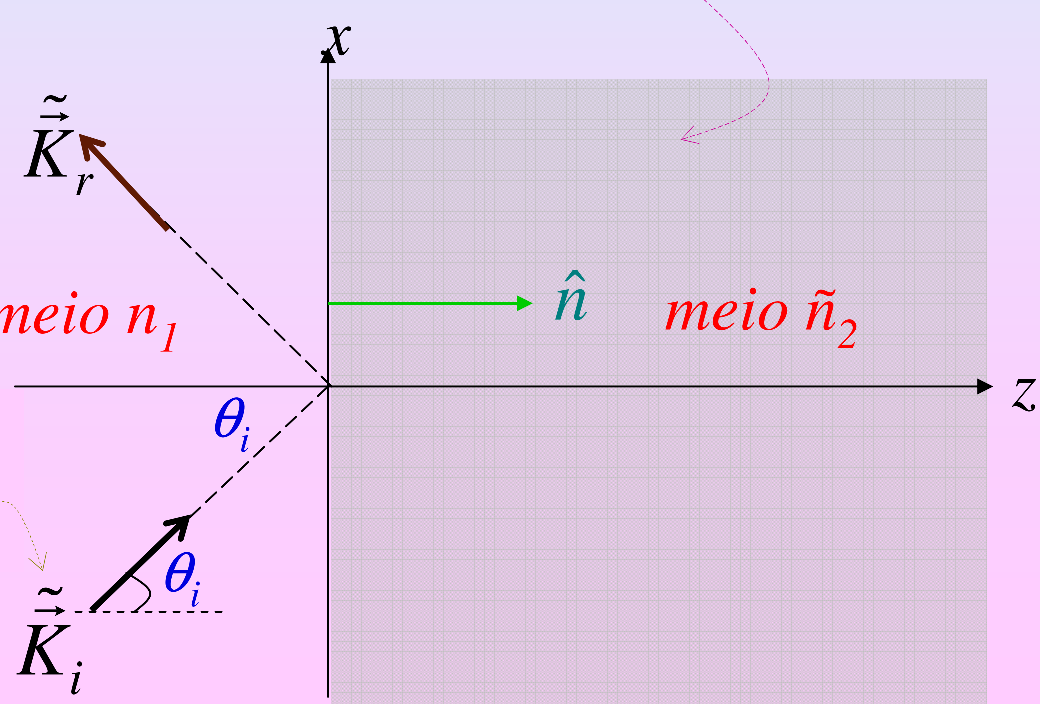
pelo fato de $\tilde{n}_2$ ser *complexo*, então θ_B não existe como tal; mas ainda haverá um mínimo para a *Refletância Paralela* (ao plano de incidência).



e não posso representar $\vec{\tilde{K}}_t$ pois $\tilde{\theta}_t$ é complexo!

Agora, com relação à incidência da onda:

(sempre posso pegar a parte real, depois)



- De forma, que no condutor:

real

imaginário

supondo válido o procedimento adotado no caso 2 dielétricos.

$$\tilde{\vec{K}}_t = \vec{K}_t^{r} + i\,\vec{K}_t^{i} = \tilde{K}_{xt}\,\hat{e}_x + \tilde{K}_{zt}\,\hat{e}_z = \tilde{K}_t \sin\tilde{\theta}_t\,\hat{e}_x + \tilde{K}_t \cos\tilde{\theta}_t\,\hat{e}_z \qquad (1)$$

- Vamos considerar $\hat{n} \equiv$ versor normal à interface entre os dois meios (*atenção! não confundir com índice de refração*) e novamente aplicar a Condição de Continuidade para o campo elétrico (*como feito para meios dielétricos*):

$$E_{1//} = E_{2//}$$

(que deve valer sempre, para qualquer x e qualquer t)

- Lembrando, então:

$$\vec{K}\cdot\vec{r} = K_x x + \cancel{K_y} y + \cancel{K_z} z$$

=0 (na interface z=0)

=0; não tenho K_y

- Vamos chegar aos mesmos resultados anteriormente obtidos (para *2 dielétricos*):

$$\begin{cases} i)\ \vec{\tilde{\tilde{K}}}_i\cdot\vec{r} = \vec{\tilde{\tilde{K}}}_r\cdot\vec{r} = \vec{\tilde{\tilde{K}}}_t\cdot\vec{r} \rightarrow \\ ii)\ \vec{\tilde{\tilde{K}}}_i\times\hat{n} = \vec{\tilde{\tilde{K}}}_r\times\hat{n} = \vec{\tilde{\tilde{K}}}_t\times\hat{n} \rightarrow \\ iii)\ \vec{\tilde{\tilde{K}}}_t\cdot\hat{n} = \vec{\tilde{\tilde{K}}}_2\cdot\hat{n} = \tilde{K}_2\cos\tilde{\theta}_2 \end{cases}$$

ondas r, i e t têm mesma fase na interface (todas atingem o máximo no mesmo instante)

vetores de ondas são coplanares (estão no mesmo plano)

$= \tilde{\theta}_t$

que não posso representar!

- Agora, novamente na interface, como $\vec{\tilde{K}}_1 \times \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_2 \times \hat{n} \;\Rightarrow$

meio 1

$$\Rightarrow \text{ sendo } \vec{\tilde{K}}_1 \times \hat{n} \text{ real } \Rightarrow \; \vec{\tilde{K}}_2 \times \hat{n} = \left(\vec{\tilde{K}}_2^r \times \hat{n} + i\, \vec{\tilde{K}}_2^i \times \hat{n} \right)$$

também será real!

- Portanto: $\begin{cases} \vec{K}_2^i \times \hat{n} = 0 \;(2) \;\Rightarrow \vec{K}_2^i \textit{ será } \perp \textit{ à interface } (/\!/ \textit{ a } \hat{n}) \\ \vec{K}_2^r \times \hat{n} = \vec{K}_1 \times \hat{n} \;\Rightarrow K_2^r \sin\theta_2 = K_1 \sin\theta_i \;\; (3) \end{cases}$

em módulo

sendo $\theta_2 \equiv$ ângulo real entre $\hat{n}$ e a componente real do $\vec{\tilde{K}}_t$.

- Agora, lembrando que: $\tilde{\vec{E}}_t = \Big(\underbrace{\tilde{\vec{E}}_{0t}\, e^{-\vec{K}_i \cdot \vec{r}}}_{amplitude} \Big) \Big(e^{i\overbrace{(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}^{}} \Big)$

fase da onda

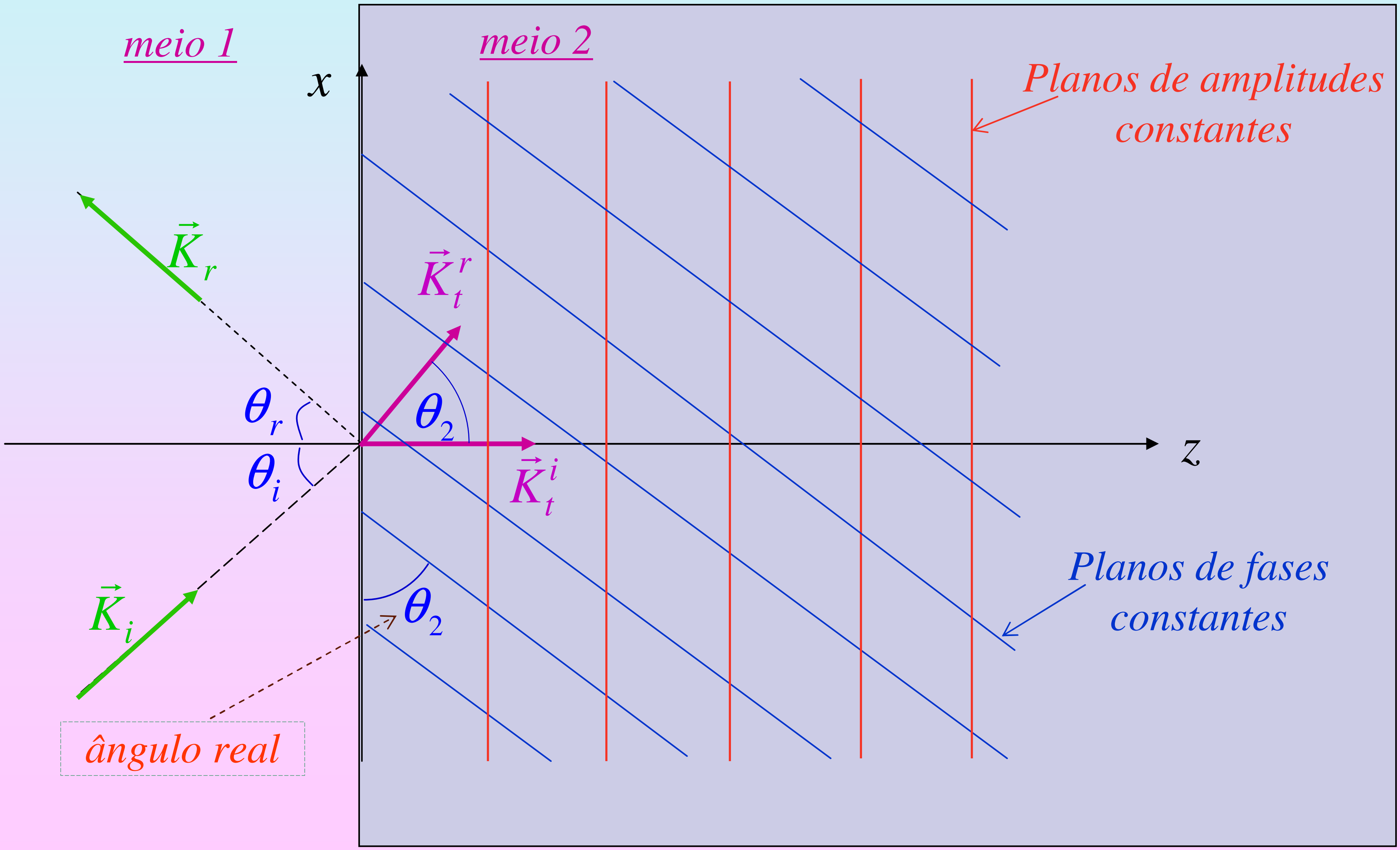
- Podemos então supor que $\vec{K}_i$ está relacionado com ***<u>planos de amplitude</u>*** (da onda) ***<u>constante</u>***.

$\left\{ \vec{K}_2^{\,i} \times \hat{n} = 0 \right\}$

- Estes planos, de acordo com a eq. (2), indicam <u>direção</u> na qual a onda é <u>mais rapidamente atenuada</u> ($\perp$ à interface), dentro do condutor.

- Enquanto que $\vec{K}_r$ está relacionado com ***<u>planos de fase</u>*** (da onda) ***<u>constante</u>***.

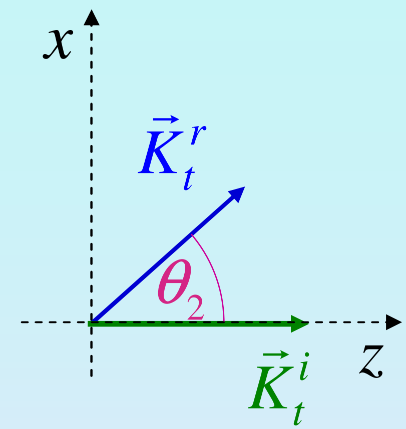
- Ou seja:



meio 1
meio 2
x
z
Planos de amplitudes constantes
$\vec{K}_r$
$\vec{K}_t^r$
θ_r
θ_2
θ_i
$\vec{K}_t^i$
Planos de fases constantes
$\vec{K}_i$
θ_2
ângulo real

- Reescrevendo a equação (1):

$$\left\{ \tilde{\vec{K}}_t = \tilde{\vec{K}}_2 = \vec{K}_2^r + i\,\vec{K}_2^i = \tilde{K}_t \sin\tilde{\theta}_t\,\hat{e}_x + \tilde{K}_t \cos\tilde{\theta}_t\,\hat{e}_z \right\}$$



- Da fig. temos: $\tilde{\vec{K}}_2 = \left(K_2^r \sin\theta_2\,\hat{e}_x + K_2^r \cos\theta_2\,\hat{e}_z \right) + i\,K_2^i\,\hat{e}_z$

- Mas, da equação (3): $\tilde{\vec{K}}_2 = K_1 \sin\theta_i\,\hat{e}_x + \left(K_2^r \cos\theta_2 + iK_2^i \right)\hat{e}_z$

$$\left\{ K_2^r \sin\theta_2 = K_1 \sin\theta_i \right\}$$

- Comparando estes resultados:

$$\begin{cases} K_1 \sin\theta_i = \tilde{K}_2 \sin\tilde{\theta}_2 & (4) \\ K_2^r \cos\theta_2 + iK_2^i = \tilde{K}_2 \cos\tilde{\theta}_2 & (5) \end{cases}$$

vou reescrever:
(é uma proposta!)

$$\tilde{K}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = \frac{\omega}{c}\left(p + i\,q \right) \qquad (6)$$

(com *parte real* e *parte imaginária*)

$$\left\{\tilde{K}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = \frac{\omega}{c}(p + i\,q)\right\}$$

- Sendo p e q grandezas a serem determinadas.
- Agora, comparando as duas equações anteriores:

$$\begin{cases} K_2^r \cos\theta_2 + i\,K_2^i = \tilde{K}_2 \cos\tilde{\theta}_2 & (5) \\ \tilde{K}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = \dfrac{\omega}{c}(p + i\,q) & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2^r \cos\theta_2 = \dfrac{\omega}{c}\,p & (7) \\ K_2^i = \dfrac{\omega}{c}\,q & (8) \end{cases}$$

- Assim, usando que $\tilde{K} = \dfrac{\tilde{n}\omega}{c}$ na eq. (6) :

$$\frac{\tilde{n}_2\cancel{\omega}}{\cancel{c}}\cos\tilde{\theta}_2 = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{c}}(p + iq) \Rightarrow \boxed{\tilde{n}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = p + iq} \qquad (9)$$

• Vamos agora obter expressões para *p* e *q*, em termos das componentes da *constante dielétrica* (complexa):

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$$; de forma que: $\tilde{\varepsilon}_R = \varepsilon_R + i\varepsilon_{Ri}$

• Elevando a equação (3) ao quadrado: $\left\{K_2^r \sin\theta_2 = K_1 \sin\theta_i\right\}$

$$\left(K_2^r\right)^2 \left(\underbrace{1-\cos^2\theta_2}_{\left(\sin^2\theta_2\right)}\right) = \frac{n_1^2\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(K_2^r\right)^2 - \left(K_2^r\right)^2\cos^2\theta_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 \sin^2\theta_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ usando (7) $\Rightarrow$ $\left(K_2^r\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2\sin^2\theta_i + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p^2 \Rightarrow$

$$\left\{K_2^r \cos\theta_2 = \frac{\omega}{c}p\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_2^r = \frac{\omega}{c}\sqrt{p^2 + n_1^2\sin^2\theta_i}} \qquad (10)$$

- A equação (9), por outro lado, elevando-a ao quadrado:

$$\left\{\tilde{n}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = p + iq\right\}$$

$$\underline{p^2 - q^2 + i2pq} = \tilde{n}_2^2\left(1 - \sin^2\tilde{\theta}_2\right) = \text{(usando Snell)} = \underline{\tilde{n}_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}$$

$$\left(n_1 \sin\theta_i = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_2\right)$$

- Escrevendo os índices de refração desta eq., em termos das constantes dielétricas (nos 2 meios): $n = \sqrt{\varepsilon_R}$; $\tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_R}$

$$p^2 - q^2 + i2pq = \tilde{\varepsilon}_R - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i = \overbrace{\varepsilon_{Rr} + i\varepsilon_{Ri}} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i$$

meio 2   meio 1

- Comparando partes real e imaginária:

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = \varepsilon_{Rr} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i & (11) \\ 2pq = \varepsilon_{Ri} & (12) \end{cases}$$

meio 2

$\equiv$ Sistema com 2 equações a 2 incógnitas (p e q)

- Resolvendo:

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\varepsilon_{Rr} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i\right) + \sqrt{\left(\varepsilon_{Rr} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i\right)^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]} & (13) \\ q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\left(\varepsilon_{Rr} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i\right) + \sqrt{\left(\varepsilon_{Rr} - \varepsilon_{R1}\sin^2\theta_i\right)^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]} & (14) \end{cases}$$

ambos reais

≡ *p e q em função das constantes dielétricas dos 2 meios.*

- Note que estes resultados, *para incidência oblíqua*, são versões generalizadas das expressões já obtidas de n e n_*

$\{\tilde{n} = n + i n_*\}$ *constantes óticas do meio*

- Tanto que, para $\theta_i = 0$:

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{Rr} + \sqrt{\varepsilon_{Rr}^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]} = n \\ q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\varepsilon_{Rr} + \sqrt{\varepsilon_{Rr}^2 + \varepsilon_{Ri}^2}\right]} = n_* \end{cases}$$

√

- Da equação (10) $\left\{K_2^r = \frac{\omega}{c}\sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2\theta_i}\right\}$, chamando:

$$\boxed{N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2\theta_i}} \quad (15)$$

, podemos escrever:

$$\boxed{K_2^r = \frac{N\omega}{c}} \quad (16)$$

- Ou seja, $N = N(\theta_i)$ é uma espécie de "Índice de Refração Real" para o meio condutor.

- Outro resultado interessante: usando esta equação (16) na equação (3):

$$\left\{K_2^r \sin\theta_2 = K_1 \sin\theta_i\right\}$$

$$\frac{N\cancel{\omega}}{\cancel{c}}\sin\theta_2 = \frac{n_1\cancel{\omega}}{\cancel{c}}\sin\theta_i \Rightarrow \qquad \boxed{n_1 \sin\theta_i = N \sin\theta_2} \quad (17)$$

ângulo real

versão Real da Lei de Snell para o meio condutor!

$\{n_1 \sin\theta_i = N \sin\theta_2\}$

- Elevando esta equação ao quadrado e substituindo na equação $(15)\left\{N^2 = p^2 + n_1^2 \sin\theta_i^2\right\}$:

$$N^2 - p^2 = N^2 \sin^2\theta_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p^2 = N^2\big(1 - \underbrace{\sin^2\theta_2}_{\cos^2\theta_2}\big) \Rightarrow \boxed{p = N\cos\theta_2} \quad (18)$$

- Comparando esta última eq. com a $(7)\ \{\tilde{n}_2 \cos\tilde{\theta}_2 = p + iq\}$, vemos então que:

$$\underline{\underline{N\cos\theta_2}} \equiv \text{ parte real de } \underline{\underline{\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_2}}$$

- Continuamos na próxima aula ...