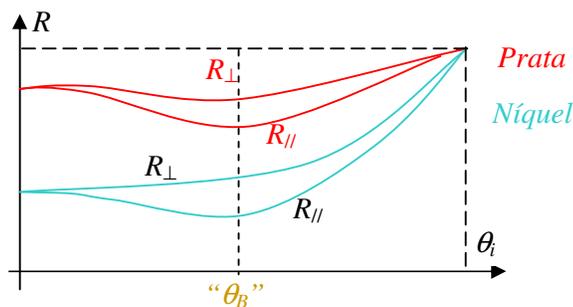


Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

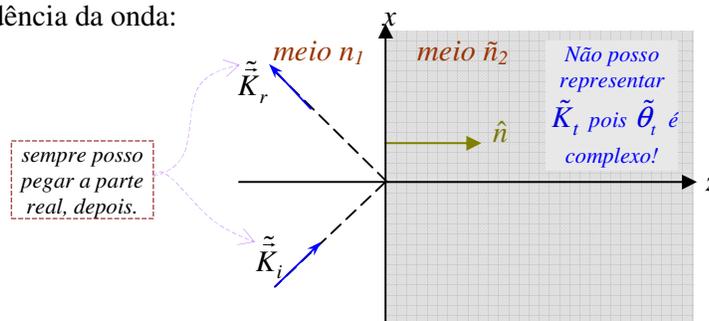
Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

16ª aula – 04/mai/2007

- Vimos: Interface *Dielétrico/Condutor* (*Incidência Normal*)
 - Condutor Perfeito → Reflexão Total
 - Bom Condutor: $A_N = \sqrt{\frac{8\epsilon_0\omega}{\sigma}} \equiv \text{Relação Hagen-Rubens}$
- Estes resultados foram obtidos aplicando o mesmo procedimento adotado para dielétrico-dielétrico.
- Supondo agora *incidência oblíqua*, se seguimos novamente mesmo procedimento de anteriormente, vamos obter os mesmos coeficientes de Fresnel, só que $n_2 \rightarrow \tilde{n}_2$ e os *coeficientes também serão grandezas complexas*.
- Da mesma forma pode-se obter uma equação semelhante à Lei Snell: $n_1 \sin \theta_i = \tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_t$ só que agora $\theta_t \rightarrow \tilde{\theta}_t$ (também nos coeficientes de Fresnel teremos $\theta_t \rightarrow \tilde{\theta}_t$).
ângulo complexo
- Note, porém, que ficamos impossibilitados de *representar* $\tilde{\theta}_t$ *graficamente* (isto não é problema já que os resultados envolvendo $\tilde{\theta}_t$ são obtidos algebricamente e não geometricamente).
- Agora, se analisarmos a *lei de Brewster* ($\tan \theta_i = n_2/n_1$) \Rightarrow pelo fato de \tilde{n}_2 ser complexo (o meio 2 é um condutor), verifica-se que esta lei não existe exatamente como tal, no sentido que $R_{//} = 0$ para $\theta = \theta_B$; mas haverá um mínimo para a Refletância paralela ao plano de incidência:



- Agora, com relação à incidência da onda:



- De forma, que no condutor (*supondo válido o procedimento adotado no caso 2 dielétricos*):

$$\begin{cases} \vec{\tilde{K}}_t = \tilde{K}_{tx} \hat{e}_x + \tilde{K}_{tz} \hat{e}_z = \tilde{K}_t \sin \tilde{\theta}_t \hat{e}_x + \tilde{K}_t \cos \tilde{\theta}_t \hat{e}_z \\ \vec{\tilde{K}}_i = \tilde{K}_{tr} + \tilde{K}_{ti} \end{cases} \quad (1)$$

- Definindo-se $\hat{n} \equiv$ *versor normal à interface* (ver figura acima) entre os 2 meios (atenção! não confundir com índice de refração) e aplicando-se as *Condições de Continuidade* para os campos na interface (como feito para 2 meios dielétricos), temos:

$E_{1t} = E_{2t}$; que deve valer sempre, para qualquer x e qualquer t.

$$\vec{K} \cdot \vec{r} = K_x x + K_y y + K_z z$$

(não tenho K_y) (na interface $z=0$)

- Resultados do caso dielétrico/dielétrico que iremos agora obter:

$$\begin{cases} i) \vec{\tilde{K}}_i \cdot \vec{r} = \vec{\tilde{K}}_r \cdot \vec{r} = \vec{\tilde{K}}_t \cdot \vec{r} \rightarrow \text{ondas } r, i \text{ e } t \text{ têm mesma fase na interface (quando uma atinge o máximo, as outras duas também).} \\ ii) \vec{\tilde{K}}_i \times \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_r \times \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_t \times \hat{n} \rightarrow \text{vetores de ondas são coplanares (estão no mesmo plano) - ver apêndice} \\ iii) \vec{\tilde{K}}_i \cdot \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_2 \cdot \hat{n} = \tilde{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{cases}$$

que não posso representar graficamente!

- Agora, novamente na interface, como $\vec{\tilde{K}}_i \times \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_2 \times \hat{n}$ (da eq. ii) acima \Rightarrow sendo $\vec{\tilde{K}}_i \times \hat{n}$ real \Rightarrow
 $\Rightarrow \vec{\tilde{K}}_2 \times \hat{n} = (\vec{\tilde{K}}_{2r} \times \hat{n} + \vec{\tilde{K}}_{2i} \times \hat{n})$ também será real!

- Portanto: $\begin{cases} \vec{\tilde{K}}_{2i} \times \hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{\tilde{K}}_{2i} \text{ é perpendicular à interface (paralelo a } \hat{n} \text{).} \\ \vec{\tilde{K}}_{2r} \times \hat{n} = \vec{\tilde{K}}_i \times \hat{n} \Rightarrow \text{(em módulo)} \Rightarrow K_{2r} \sin \theta_2 = K_1 \sin \theta_i \end{cases} \quad (3)$

ver $\vec{\tilde{K}}_{2i}$ e $\vec{\tilde{K}}_{2r}$ na figura abaixo:

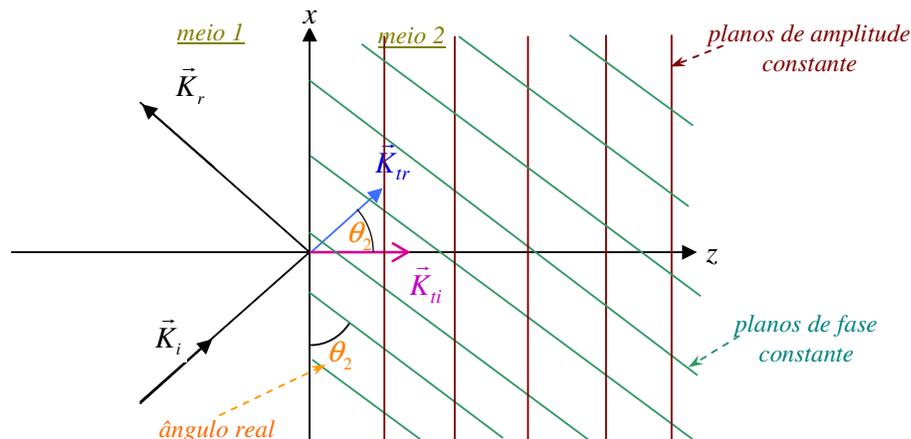
$\theta_2 \equiv$ ângulo real entre \hat{n} e a componente real de $\vec{\tilde{K}}_t$!

- Lembrando que $\vec{\tilde{E}}_t = \underbrace{(\vec{\tilde{E}}_{0t} e^{-\vec{\tilde{K}}_i \cdot \vec{r}})}_{\text{amplitude}} \underbrace{\left(e^{i(\vec{\tilde{K}}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)}_{\text{fase da onda}}$

- Podemos supor então que $\vec{\tilde{K}}_i$ está relacionado com planos de amplitudes constantes (da onda) que, perpendiculares à interface (veja eq. 1), indicam direção na qual a onda é mais rapidamente atenuada, dentro do condutor.

- Enquanto que $\vec{\tilde{K}}_r$ estará relacionado com planos de fase corrente (da onda).

- Ou seja:



- Podemos então escrever a equação (1):

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_2 = \tilde{K}_{2r} + i\tilde{K}_{2i} = (\text{da figura acima}) = (K_{2r} \sin \theta_2 \hat{e}_x + K_{2r} \cos \theta_2 \hat{e}_z) + iK_{2i} \hat{e}_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{da equação (3)} \Rightarrow \tilde{K}_i = K_1 \sin \theta_i \hat{e}_x + (K_{2r} \cos \theta_2 + iK_{2i}) \hat{e}_z$$

- Comparando este resultado com a equação (1):

$$\begin{cases} K_1 \sin \theta_i = \tilde{K}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \\ K_{2r} \cos \theta_2 + iK_{2i} = \tilde{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} K_{2r} \cos \theta_2 + iK_{2i} = \tilde{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \end{cases} \quad (5)$$

- Agora, o último termo da equação (5), vou escrevê-lo da forma (é uma proposta que estou fazendo, já que se trata de uma grandeza complexa):

$$\tilde{K}_2 \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c} (p + iq) \quad (6)$$

(p+iq) faria o papel do ($\tilde{n} \cos \tilde{\theta}_2$) já que $\tilde{K}_2 \rightarrow \frac{\omega}{c} \tilde{n}$

- Sendo p e q quantidades a serem determinadas de forma que, lembrando a relação $\tilde{K} = \frac{\tilde{n}\omega}{c}$:

$$\frac{\tilde{n}_2 \omega}{c} \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c} (p + iq) \Rightarrow \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2 = p + iq \quad (7)$$

- Mas, comparando as equações (5) e (6):
- $$\begin{cases} K_{2r} \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c} p \\ K_{2i} = \frac{\omega}{c} q \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} K_{2i} = \frac{\omega}{c} q \end{cases} \quad (9)$$

- E vou tentar agora obter expressões para p e q em termos das componentes da constante dielétrica (complexa):

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_R + i\epsilon_{Ri} ; \text{ sendo } \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ e } \epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$$

- Elevando a equação (3) ao quadrado:

$$K_{2r}^2 \underbrace{(1 - \cos^2 \theta_2)}_{(\sin^2 \theta_2)} = \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_i \Rightarrow K_{2r}^2 - K_{2r}^2 \cos^2 \theta_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 \sin^2 \theta_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{usando eq. (8)} \Rightarrow K_{2r}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2 \sin^2 \theta_i + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p^2 \Rightarrow \boxed{K_{2r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \quad (10)$$

- Por outro lado, da equação (7), elevando-a ao quadrado:

$$p^2 - q^2 + i2pq = \tilde{n}_2^2 (1 - \sin^2 \tilde{\theta}_2) = (\text{usando Snell: } n_1 \sin \theta_i = \tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_2) = \tilde{n}_2^2 - \cancel{\tilde{y}_2^2} \frac{n_1^2}{\cancel{\tilde{y}_2^2}} \sin^2 \theta_i$$

- Escrevendo os índices de refração n_1 e \tilde{n}_2 , acima, em termos da *Constante Dielétrica Complexa*:

$$(n = \sqrt{\epsilon_R} ; \tilde{n}_2 = \sqrt{\tilde{\epsilon}_R})$$

- Temos que: $p^2 - q^2 + i2pq = \tilde{\epsilon}_R - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_i = \overbrace{\epsilon_{Rr} + i\epsilon_{Ri}} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_i$

meio 1 meio 2

- Comparando as partes real e imaginária desta igualdade:

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = \epsilon_{Rr} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_1 \\ 2pq = \epsilon_{R\text{meio } 2} \end{cases}$$

- Resolvendo este sistema, 2 equações a 2 incógnitas:

ambas reais →

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\epsilon_{Rr} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(\epsilon_{Rr} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_1)^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]} \\ q = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-(\epsilon_{Rr} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_1) + \sqrt{(\epsilon_{Rr} - \epsilon_{Ri} \sin^2 \theta_1)^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]} \end{cases}$$

≡ p e q em função das constantes dielétricas dos 2 meios.

- Note que estes resultados, para incidência oblíqua, são versões generalizadas das expressões já obtidas de n e n* (ñ = n + in*).

constantes óticas do meio

Tanto que, para $\theta_i = 0^\circ \Rightarrow$

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\epsilon_{Rr} + \sqrt{\epsilon_{Rr}^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]} = n \\ q = \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\epsilon_{Rr} + \sqrt{\epsilon_{Rr}^2 + \epsilon_{Ri}^2} \right]} = n_* \end{cases}$$

- Note agora da eq. (10) que, chamando $N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_i}$ (11)

- Podemos escrever: $K_{2r} = \frac{N\omega}{c}$ (12)

- Ou seja, $N = N(\theta_i)$ é uma espécie de “Índice de Refração Real” (meio condutor → p é real).

- Um outro resultado interessante. Usando a equação (12) na equação (3):

$$\frac{N\omega}{c} \sin \theta_2 = \frac{n_1\omega}{c} \sin \theta_i \Rightarrow n_1 \sin \theta_i = N \sin \theta_2 \equiv \text{Versão Real da Lei de Snell!}$$

(para o meio condutor!)
ângulo real

- Elevando esta equação ao quadrado e substituindo na equação (11):

$$N^2 - p^2 = N^2 \sin^2 \theta_2 \Rightarrow p^2 = N^2 (1 - \sin^2 \theta_2) \Rightarrow p = N \cos \theta_2$$

//
 $\cos^2 \theta_2$

- Comparando esta última equação com a (eq. 7), vemos então que:

$$N \cos \theta_2 \equiv \text{parte real de } \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2$$

Apêndice

$$\begin{cases} \tilde{E}_i = \tilde{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{E}_r = \tilde{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \tilde{E}_t = \tilde{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{cases} \rightarrow \text{mesmo } \omega, \text{ como já visto.}$$

i) $E_{1t} = E_{2t}$ (tanto para incidência // ou \perp) \Rightarrow

$\Rightarrow \tilde{E}_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \tilde{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \tilde{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r})}$; que deve valer sempre

\therefore a fase, na interface, deve ser a mesma: $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$