



Eletromagnetismo II

17^a Aula

Professor Alvaro Vannucci

Nas última aula vimos:

- Incidência Oblíqua na interface dielétrico/condutor:

$$\tilde{\vec{K}}_t = \vec{K}_t^r + i\vec{K}_t^i$$

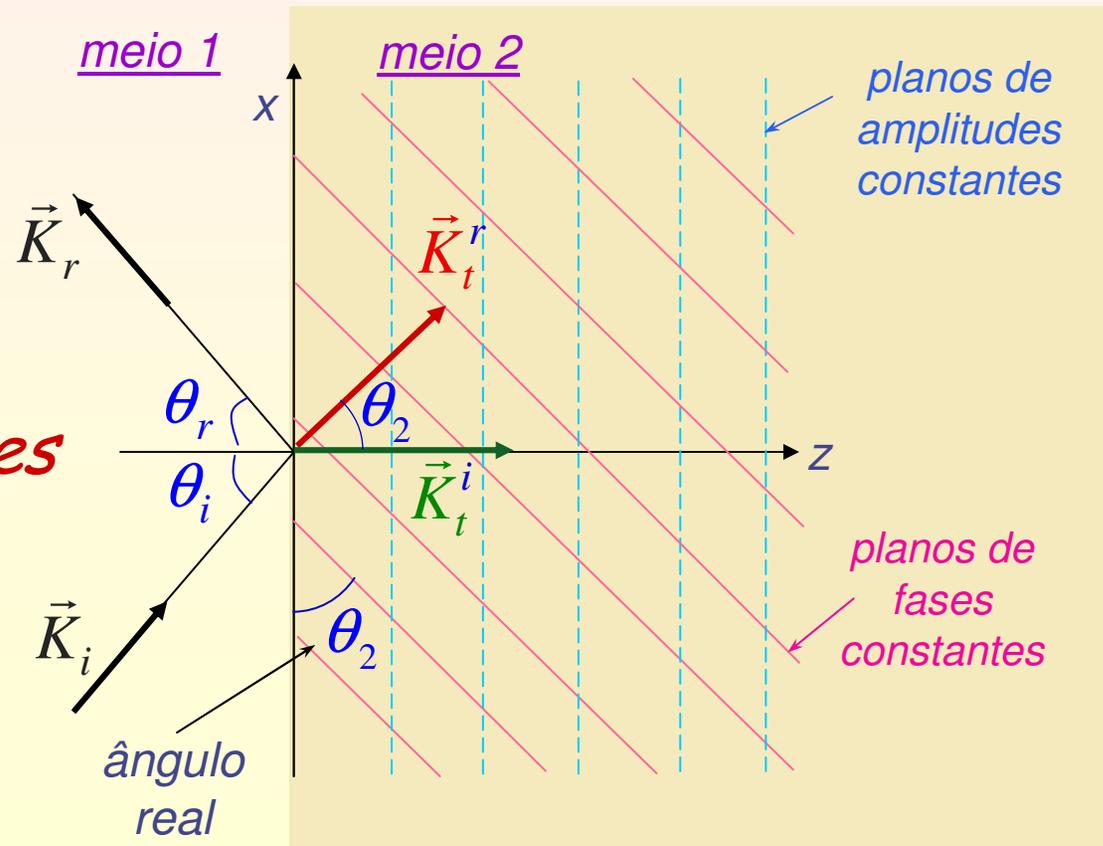
- Sendo que

$$\left\{ \begin{array}{l} K_2^r = \frac{\omega}{c} \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_i} \\ K_2^i = \frac{\omega}{c} q \end{array} \right.$$

- Onde p e $q \equiv$ *constantes óticas generalizadas*

- Quando $\theta_i = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow n \\ q \rightarrow n_* \end{array} \right. ; \tilde{n} = n + in_*$$



- Chamando $N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_i}$ \equiv Espécie de Índice de Refração Real:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Lei de Snell: } n_1 \sin \theta_i = \tilde{n}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \Rightarrow n_1 \sin \theta_i = N \sin \theta_2 \\ \text{ii) } K_2^r = \frac{N\omega}{c} \text{ e } p = N \cos \theta_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{“versão real de Lei de Snell”} \\ \text{//} \end{array}$$

- Exemplo: No caso de Bons Condutores:

$$n \sim n_* \sim \sqrt{\frac{\epsilon_{Ri}}{2}} \quad ; \quad \epsilon_{Ri} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow$$

\Rightarrow sendo σ muito grande (bons condutores) \Rightarrow
 \Rightarrow $p \sim q$ também são muito grandes.

- Portanto N é muito grande \Rightarrow da Lei de Snell $\Rightarrow \sin \theta_2$ é muito pequeno, para um certo valor de θ_i ; ou seja: $\theta_2 \sim 0$

- Portanto, a direção de propagação da onda em um bom condutor é praticamente perpendicular à interface, não importando muito o ângulo de incidência!
- De forma que a “Profundidade de Atenuação”, já definida para incidência normal, é uma boa aproximação para qualquer θ_i (no caso de *bons condutores*):

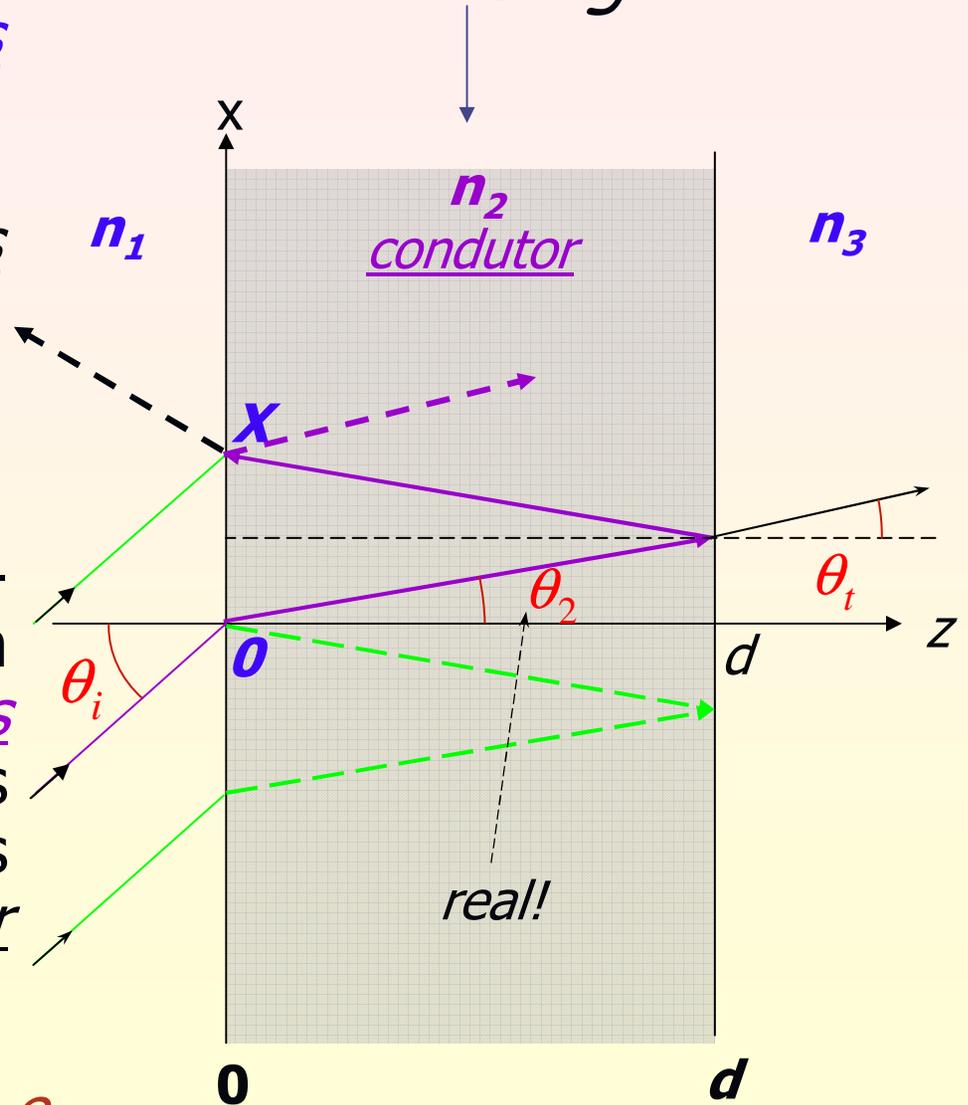
$$\delta = \frac{1}{K_i} = \frac{c}{n_* \omega} = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma}}$$

- Como os Coeficientes Fresnel nos fornecem as frações dos campos das ondas refletida e transmitida em cada interface, vamos usá-los na soma das diferentes contribuições para a reflexão de volta ao meio 1 e a transmissão para o meio 3.

- Deve-se notar, neste processo, que as somas devem levar em conta as amplitudes (Coeficientes de Fresnel) e as diferenças de fase das ondas (devido a possibilidade de haver interferências).

- Na Fig., dois raios incidentes e paralelos atingem pontos **0** e **X**.

Camada Delgada



- No ponto **X** o raio refletido (para o meio 1) interage com raio refratado (vindo do meio 2) e os dois se somam.

- Para avaliarmos a diferente fase entre eles, devemos calcular a diferença de percurso entre as 2 ondas, até atingirem o ponto **X**.

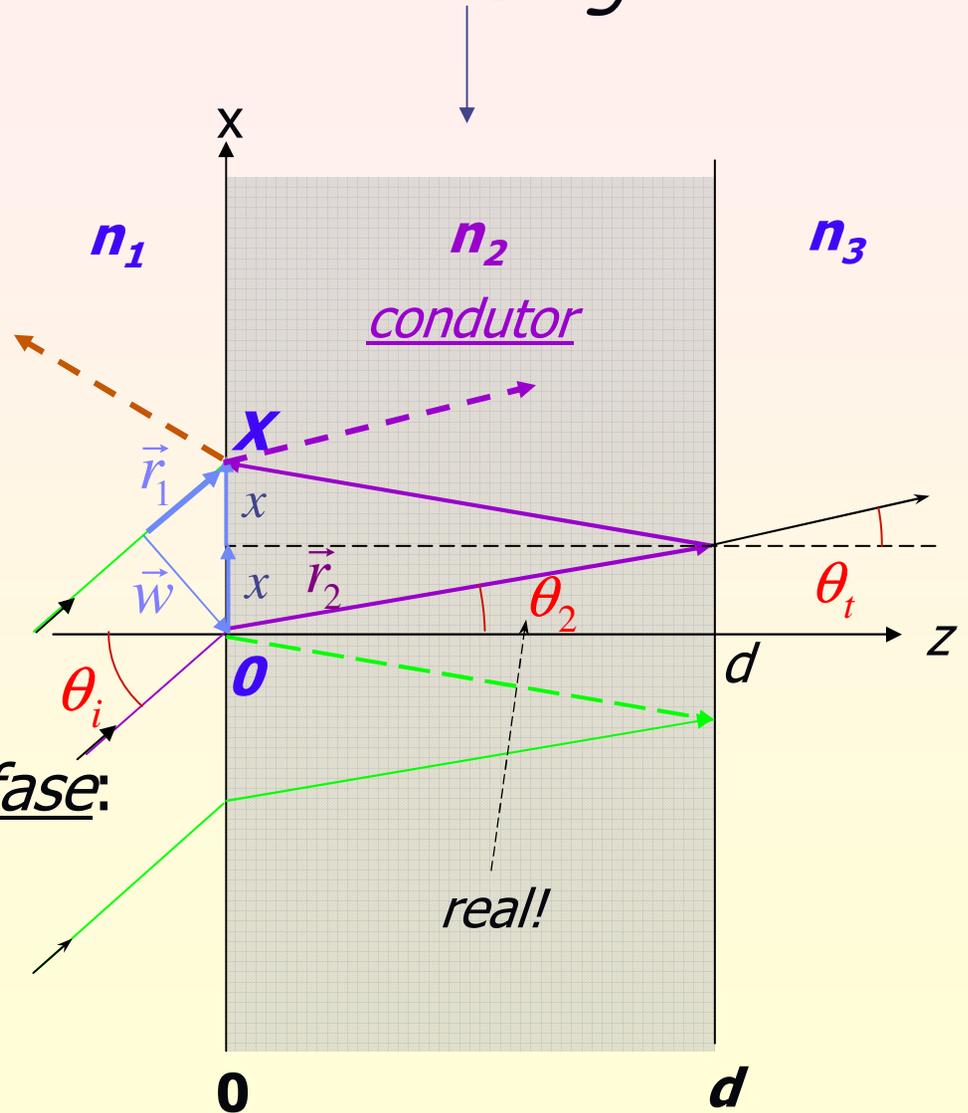
- De forma que a diferença de fase:

$$\tilde{\beta} = 2\tilde{K}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{K}_1 \cdot \vec{r}_1$$

(ondas que “vão” e que “voltam”)

- E quero escrevê-la em termos das coordenadas (x, y, z) .

Camada Delgada



- Vou decompor:

$$\vec{r}_2 = x \hat{e}_x + d \hat{e}_z$$

- Mas, vou decompor \vec{r}_1 em termos da base $(\hat{p}, \hat{s}, \hat{u})$, supondo onda incidente na direção de \hat{u} .

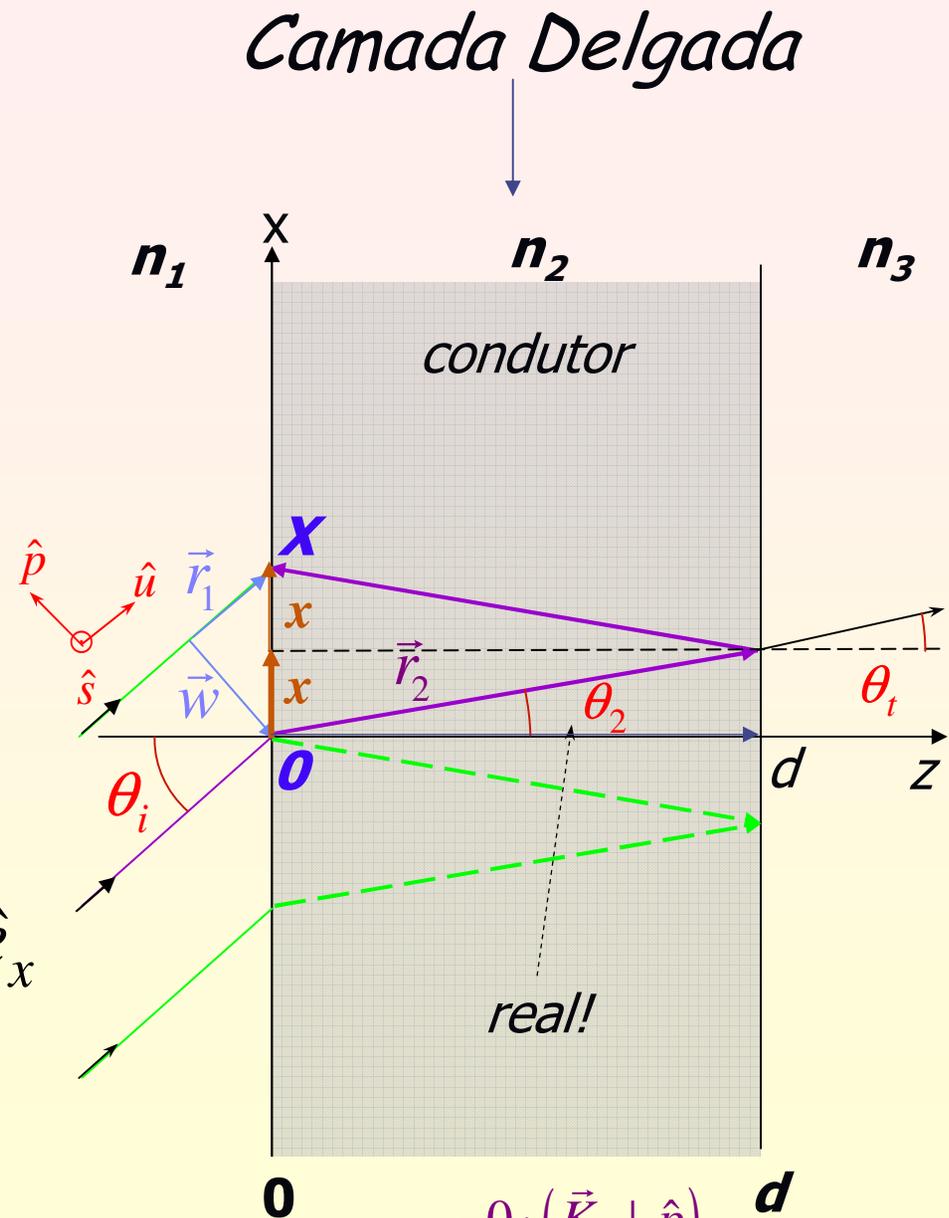
- Então \vec{r}_1 será a soma dos vetores:

$$\vec{r}_1 = \vec{w} + 2\vec{x} = w(-\hat{p}) + 2x \hat{e}_x$$

- De forma que a \neq de fase:

$$2\vec{\tilde{K}}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{\tilde{K}}_1 \cdot \vec{r}_1 = 2 \left(x \vec{\tilde{K}}_2 \cdot \hat{e}_x + d \vec{\tilde{K}}_2 \cdot \hat{e}_z \right) - \left(-w \vec{\tilde{K}}_1 \cdot \hat{p} + 2x \vec{\tilde{K}}_1 \cdot \hat{e}_x \right)$$

$= 0; (\vec{\tilde{K}}_1 \perp \hat{p})$



- Assim, a \neq fase β fica:

$$\tilde{\beta} = 2x \left(\underbrace{\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \hat{e}_x}_{\substack{\tilde{K}_2 \sin \tilde{\theta}_2 \\ \text{(Lei de Snell)}}} - \underbrace{\vec{K}_1 \cdot \hat{e}_x}_{K_1 \sin \theta_i} \right) + 2d \underbrace{\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \hat{e}_z}_{\tilde{K}_2 \cos \tilde{\theta}_2}$$

sendo que:

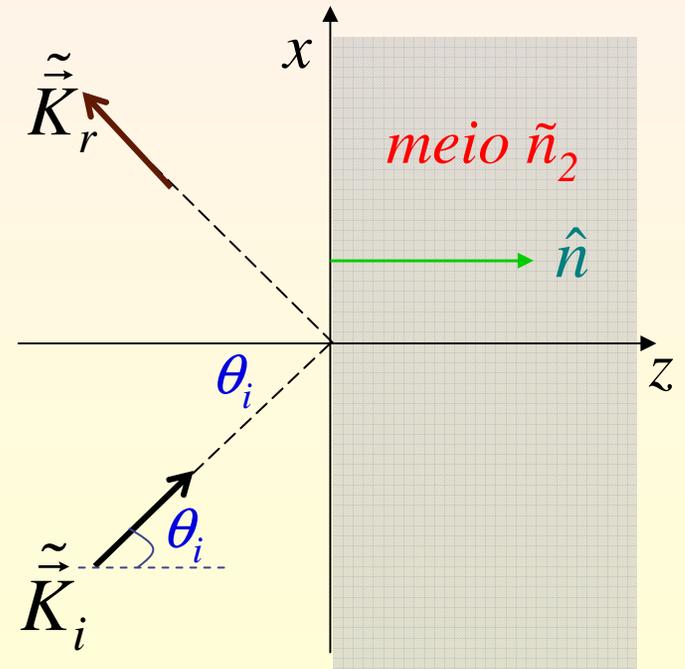
- i) $\tilde{K}_2 = \frac{\tilde{n}_2 \omega}{c}$
- ii) \tilde{K}_2 e $\tilde{\theta}_2$ NÃO podem ser representados graficamente

- Portanto:

$$\tilde{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} \tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2 \quad (1)$$

- Mas, da aula passada:

$$\tilde{n}_2 \cos \tilde{\theta}_2 = p + iq \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c} (p + iq)} \quad (2)$$



- Vamos agora somar todas as contribuições, das várias ondas no meio 1, relacionando com o *Coeficiente Reflexão* \tilde{r} .
- Faremos isto calculando os Coeficientes de Fresnel em cada interface (considerando os desvios de fase $\tilde{\beta}$)
- Certamente, teremos componentes \perp e \parallel de polarização da onda, que deverão ser tratadas separadamente; sendo que para cada uma delas vale:

diferença de fase entre os campos \vec{E} da 1ª e 2ª ondas

$$\tilde{r} = \tilde{r}_{12} + \tilde{t}_{12} \tilde{r}_{23} \tilde{t}_{21} e^{i\tilde{\beta}} + (\tilde{t}_{12} \tilde{r}_{23})(\tilde{r}_{21})(\tilde{r}_{23} \tilde{t}_{21}) e^{i\tilde{\beta}} e^{i\tilde{\beta}} + \dots$$

Reflexão
na 1ª
interface

Transmissão
na 1ª interface

Reflexão
na 2ª
interface

Transmissão na
2ª interface

Diferenças de
fase em **0** e em **X**

Para outros
raios...

- Assim:

$$\tilde{r} = \tilde{r}_{12} + \tilde{t}_{12} \tilde{r}_{23} \tilde{t}_{21} e^{i\tilde{\beta}} \left[1 + \left(\tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} \right) + \left(\tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} \right)^2 + \dots \right]$$

- Mas: $1 + \xi + \xi^2 + \dots \equiv$ expansão de Taylor da expressão

$$\frac{1}{1-\xi} ; \xi = \tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ent\~{a}o: } \tilde{r} &= \tilde{r}_{12} + \frac{\tilde{t}_{12} \tilde{r}_{23} \tilde{t}_{21} e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \underbrace{\tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}}_{\equiv (\xi)}} = \frac{\tilde{r}_{12} - \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{t}_{12} \tilde{t}_{21} r_{23} e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{r} = \frac{\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23} \left(\tilde{t}_{12} \tilde{t}_{21} - r_{12} \tilde{r}_{21} \right) e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \tilde{r}_{21} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}} \end{aligned}$$

- Usando, agora, que $\begin{cases} \tilde{r}_{12} = -\tilde{r}_{21} \\ \tilde{r}_{12}^2 + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} = 1 \end{cases}$ (obtidas em aula anterior) \Rightarrow

$$\Rightarrow \tilde{r} = \frac{\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}} \quad (3)$$
- E, da mesma forma para \tilde{t} :

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{23} e^{i\tilde{\beta}/2}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}} \quad (4)$$

(mesma equação para as duas componentes \perp e \parallel ; e a diferença de fase também é a mesma).

- Podemos agora calcular as grandezas Refletância (meio 1) e Transmitância (meio 3):

$$\begin{cases} R = \tilde{r} \tilde{r}^* \\ T = \frac{n_3 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \tilde{t} \tilde{t}^* \end{cases} \quad \left(t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) \quad (\text{na } 1^{\text{a}} \text{ interface})$$

- Na situação em que a *Camada Delgada* corresponder a um meio dielétrico:

$$R + T = 1$$

- Porém, se o meio for condutor: $R + T + A = 1$; já que haverá energia absorvida/dissipada por aquecimento Joule.
- Agora, expressar R e T , em termos de n e n_* (p e q), resulta em equações bastante complexas, mas que servem para determinar experimentalmente as ctes. óticas n e n_* dos condutores.
- Na verdade, computadores são necessários para obter n e n_* a partir dos valores de R e T .

- No entanto, é possível estimar estes valores considerando que T é proporcional ao produto $\tilde{t} \tilde{t}^*$ apenas, que por sua vez é proporcional a $e^{\frac{i\tilde{\beta}}{2}} e^{-\frac{i\tilde{\beta}^*}{2}}$:

$$\left\{ \tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c}(p+iq) \right\} \quad (eq.2)$$

$$T \propto \tilde{t} \tilde{t}^* \propto e^{\frac{i\tilde{\beta}}{2}} e^{-\frac{i\tilde{\beta}^*}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \propto e^{\frac{i2d\omega}{c}(p+iq - p+iq)} \Rightarrow T \propto e^{\frac{-2d\omega q}{c}}$$

- Para Incidência Normal, vimos que $q = n_*$; e também que o Coeficiente de Profundidade era dado por: $\delta = \frac{c}{n_*\omega}$

$$\therefore T \propto e^{-2d/\delta}$$

- Em particular, se o **meio 1** for **ar**:

$$\lambda_1 = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \left\{ T \alpha e^{-\frac{2d\omega q}{c}} \right\}$$

- Então:

$$T \alpha e^{-\frac{4\pi n_* d}{\lambda_1}}$$

para lâmina condutora em ar e Incidência Normal

- Em *filmes metálicos* ($n_* \sim 2$), por exemplo, supondo luz $\lambda_1 \sim 5000\text{Å}$, podemos avaliar qual a espessura da lâmina para que haja transmissão apreciável de luz.

- Para transmissão de 1% da radiação incidente, por exemplo:

$$e^{-\frac{4\pi n_* d}{\lambda_1}} \sim 0,01 \Rightarrow \boxed{d \sim 10^{-7} \text{ m}} \quad (d \sim 1.000 \text{ Å!!})$$

- Quanto à Refletância:

$$R = \tilde{r} \tilde{r}^* = \frac{\left(\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}\right)\left(\tilde{r}_{12}^* + \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*}\right)}{\left(1 + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}}\right)\left(1 + \tilde{r}_{12}^* \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*}\right)} =$$

$$= \frac{\tilde{r}_{12} \tilde{r}_{12}^* + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{12}^* e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{23}^* e^{\frac{-4d\omega q}{c}}}{1 + \tilde{r}_{12}^* \tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{12} \tilde{r}_{12}^* \tilde{r}_{23} \tilde{r}_{23}^* e^{\frac{-4d\omega q}{c}}}$$

$\tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c}(p+iq)$
 $\left. \begin{aligned} &e^{i\tilde{\beta}} e^{-i\tilde{\beta}^*} = \\ &= e^{\frac{2d\omega}{c}(ip-q-ip-q)} \end{aligned} \right\}$

- Em particular, para meios Não-Condutores ($n_* = q = 0$):

- Neste caso, a expressão para a Refletância torna-se:

$$R = \frac{\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{12}^* + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{23}\tilde{r}_{12}^* e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{23}\tilde{r}_{23}^* e^0}{1 + \tilde{r}_{12}^*\tilde{r}_{23}^* e^{-i\tilde{\beta}^*} + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23} e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{12}^*\tilde{r}_{23}\tilde{r}_{23}^* e^0}$$

- E, considerando ainda que:

$$\left\{ \tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c} (p + iq) \right\}$$

$$i) \tilde{\beta} = \beta = \frac{2d\omega}{c} p = \frac{2d\omega}{c} n_2 \quad \text{meio 2}$$

$$ii) \begin{cases} \tilde{r}_{12} \rightarrow r_{12} \\ \tilde{r}_{23} \rightarrow r_{23} \end{cases}$$

(quando introduzimos meio condutor: $r \rightarrow \tilde{r}$
 agora, retornando aos dielétrico: $\tilde{r} \rightarrow r$)

- Ao substituímos na expressão da Refletância acima:

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{12}r_{23} (\cos \beta - i \sin \beta + \cos \beta + i \sin \beta)}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + r_{12}r_{23} (\cos \beta - i \sin \beta + \cos \beta + i \sin \beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{película dielétrica}} = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta} \quad (5)$$

(é só substituir)

- Quando tivermos Incidência Normal:

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \end{cases}$$

Exemplo: Supor *Incidência Normal* em uma fina camada de revestimento ($n_2 = 1,3$) aplicado sobre vidro ($n_3 = 1,5$) sendo meio 1 \equiv ar ($n_1 = 1$).

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^2 = \left(\frac{1-1,3}{1+1,3} \right)^2 = 0,017 \\ r_{23}^2 = \left(\frac{1,3-1,5}{1,3+1,5} \right)^2 = 0,005 \end{array} \right. \Rightarrow R = \frac{0,022 + 0,0186 \cos \beta}{1,0001 + 0,0186 \cos \beta}$$

• Sendo que $\beta = 2 d n_2 \left(\frac{\omega}{c} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_1} \Rightarrow \beta = 4\pi n_2 \left(\frac{d}{\lambda_1} \right) = 16,3 \frac{d}{\lambda_1} \quad (7)$

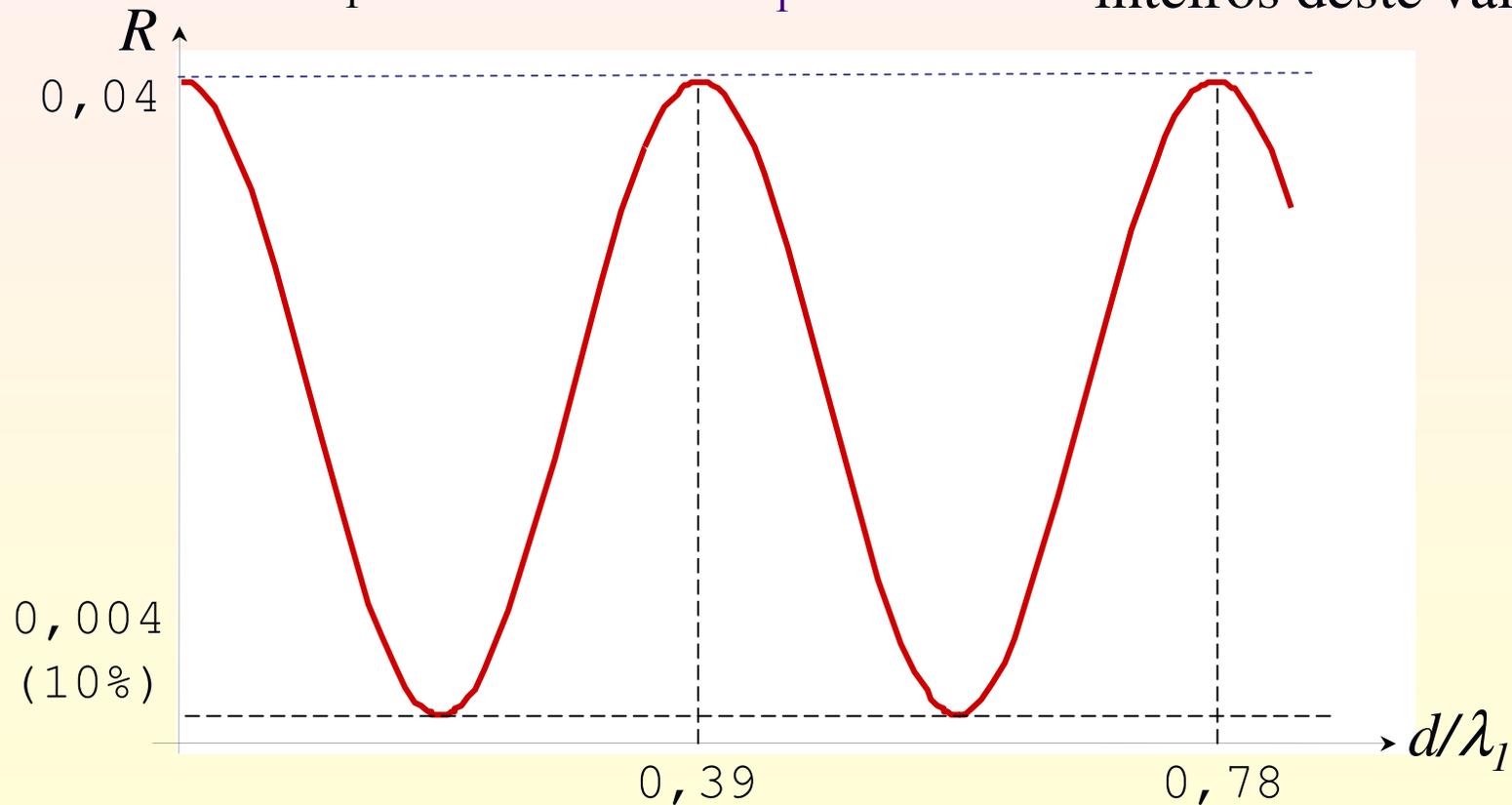
$$\left\{ R_{pel.} = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta} \right\}$$

• Substituindo na eq. (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\max} (\cos \beta = 1) = \frac{0,0407}{1,0187} = 0,04 \\ R_{\min} (\cos \beta = -1) = \frac{3,6 \times 10^{-3}}{0,982} = 0,004 \end{array} \right.$$

- Sendo que valores de máximo ocorrem para

$$\beta = 16,3 \frac{d}{\lambda_1} = 2m\pi \Rightarrow \frac{d}{\lambda_1} = 0,39m \rightarrow \text{(e múltiplos inteiros deste valor)}$$



- Note que R (resultante) pode ser menor que ocorreria apenas na 1ª interface! ($r_{12}^2 = 0,017$) (interferência destrutiva)

- Pergunta: Dados d e λ_1 , o mínimo de R (para valores apropriados de d/λ_1 poderá, em alguma situação, ser zero?
- Resposta: Sim, desde que se utilize um revestimento tal que: $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ (mostre!)
- Este efeito é útil para se construir lentes (câmeras, óculos, etc.) com refletância nula (para λ_1 no centro do espectro visível), ou quase nula.



- Nas bolhas de sabão n é uniforme \Rightarrow *Máximo* e *Mínimo* da Refletância ocorrem para valores diferentes de λ_1 .



1 – Sem película sobre a lente.

2 – Com uma única película.

3 – Com múltiplas películas.

