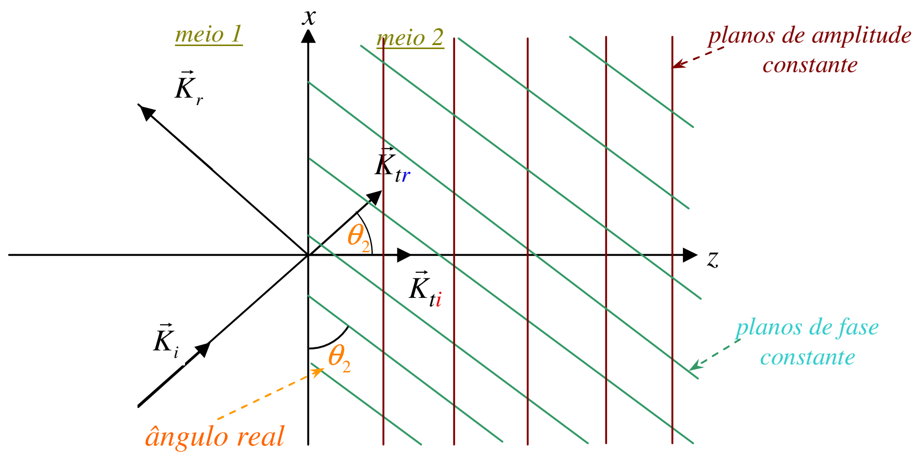
Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

17ª aula – 08/mai/2007

- Vimos: *Incidência Oblíqua*, interface *dielétrico/condutor*.

$\Rightarrow$



- Vimos: $\tilde{\vec{K}} = \vec{K}_{tr} + \vec{K}_{ti} = \vec{K}_{2r} + \vec{K}_{2i}$; sendo que $\begin{cases} K_{2r} = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2\theta_i} \\ K_{2i} = \dfrac{\omega}{c} q \end{cases}$; **p** e **q** ≡ constantes óticas generalizadas

$\Downarrow$

$\begin{cases} p \to n \\ q \to n_* \end{cases}$; $\tilde{n} = n + i\, n_*$

- Quando $\theta_i = 0 \;\Rightarrow\;$ p $\longrightarrow$ n e p $\longrightarrow$ n$_*$.

- Chamando $\boxed{N = \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2\theta_i}}$ ≡ Espécie de Índice de Refração Real:

$$\begin{cases} \text{i) Lei de Snell: } \boxed{n_1 \sin\theta_i = \tilde{n}_2 \sin\tilde{\theta}_2} \;\Rightarrow\; \boxed{n_1 \sin\theta_i = N \sin\theta_2} \quad (1) \\ ii)\; \boxed{K_{2r} = \dfrac{N\omega}{c}} \text{ e } \boxed{p = N\cos\theta_2} \end{cases}$$

"Versão Real" de Lei de Snell

- Exemplo: No caso de Bons Condutores: $\boxed{n \sim n_* \sim \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{Ri}}{2}}}$; $\left(\varepsilon_{Ri} = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sendo σ muito grande (bons condutores) $\Rightarrow p \sim q$ também são muito grandes.

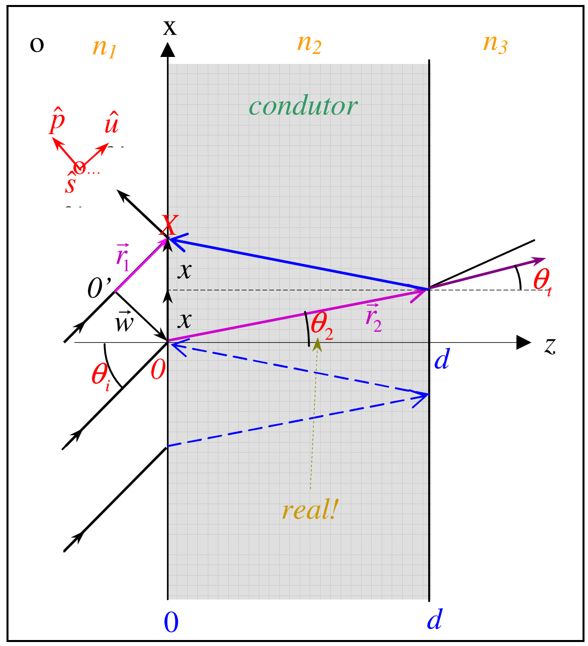
- Portanto N é muito grande $\Rightarrow$ Lei de Snell (eq. 1) $\Rightarrow$ $\sin\theta_2$ é muito pequeno. Ou seja, para um certo calor de θ_i, $\Rightarrow \theta_2 \sim 0$.

- Isto significa que a direção de propagação da onda em um bom condutor é ***praticamente*** $\perp$ ***à interface***, não importando muito o ângulo de incidência.

- Assim, a "*Profundidade de Atenuação*" já definida para incidência normal é uma boa aproximação ***para qualquer*** θ_i (no caso de bons condutores):

$$\boxed{\delta = \frac{1}{K_i} = \frac{c}{n_* \omega} = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}}$$

Reflexão e Transmissão por Camadas Delgadas



- Considere duas interfaces planas, paralelas e infinitas. Vamos resolver este sistema a partir de resultados já obtidos, supondo *meio n_2 condutor*.

- Idéia básica: Considerar onda incidente na 1ª interface **parcialmente refletida e transmitida**; o mesmo ocorrendo na 2ª interface.

- Então, a onda agora refletida na 2ª interface retorna à primeira, onde mais uma vez é parcialmente refletida/transmitida.

- Como os Coeficientes Fresnel fornecem as frações dos campos das ondas refletida e transmitida em cada interface, vamos usá-los na soma das diferentes contribuições para a reflexão de volta ao meio 1 (e a transmissão para o meio 3).

- Deve-se notar, neste processo, que as somas devem levar em conta as amplitudes (Coeficientes de Fresnel) e as diferentes fases das ondas (devido à possibilidade de interferência).

- Na Figura, dois raios incidentes e paralelos atingem simultaneamente os pontos *0* e *X*.

- No ponto *X*, raio refletido (*para o meio 1*) interage com raio refratado (*vindo do meio 2*) e os dois se somam.

- Para avaliarmos a diferença de fase entre eles, devemos calcular a *diferença de percurso* envolvendo as duas ondas, ao atingirem o ponto *X*.

- Ou seja, a diferente fase será $\tilde{\beta} = 2\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{K}_1 \cdot \vec{r}_1$; e quero escrever isto em termos das coordenadas (x, y, z).

No 2º trecho, $\vec{K}_2$ e $\vec{r}_2$ mudam igualmente de direções!

- Decompondo $\vec{r}_2 = x\,\hat{e}_x + d\,\hat{e}_z$; enquanto que para decompor $\vec{r}_1$ vou fazer isto em termos de base $(\hat{p}, \hat{s}, \hat{u})$ - *ver figura* - pois, isto irá facilitar nos cálculos. Vamos então supor ondas incidentes na direção de $\hat{u}$.

- Portanto $\vec{r}_1$ será a soma dos vetores: $\boxed{\vec{r}_1 = \vec{w} + 2\vec{x} = w(-\hat{p}) + 2x\,\hat{e}_x}$

$$\therefore\ 2\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \vec{r}_2 - \vec{K}_1 \cdot \vec{r}_1 = 2\left(x\,\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \hat{e}_x + d\,\tilde{\vec{K}}_2 \cdot \hat{e}_z\right) - \left(\underbrace{-w\vec{K}_1 \cdot \hat{p}}_{=0;\,(\vec{K}_1 \perp \hat{p})} + 2x\vec{K}_1 \cdot \hat{e}_x\right)$$

- De forma que a ***diferença de fase***: $\tilde{\beta} = 2x(\underbrace{\tilde{\vec{K}}_2\cdot\hat{e}_x}_{\substack{// \\ \vec{K}_2 \sin\tilde{\theta}_2 \\ // \\ (\textit{Lei de Snell}) \\ // \\ \cancel{K_1\sin\theta_i}}} - \underbrace{\vec{K}_1\cdot\hat{e}_x}_{\cancel{K_1\sin\theta_i}}) + 2d\,\underbrace{\tilde{\vec{K}}_2\cdot\hat{e}_z}_{\vec{K}_2\cos\tilde{\theta}_2}$

  Sendo que: i) $\vec{K}_2 = \frac{\hat{n}_2\omega}{c}$

  ii) $\tilde{\vec{K}}_2$ e $\tilde{\theta}_2$ *não podem ser representados geometricamente na figura.*

- Portanto: $\boxed{\tilde{\beta} = 2d\frac{\omega}{c}\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_2}$ (1)

- Mas, da aula passada: $\boxed{\tilde{n}_2\cos\tilde{\theta}_2 = p + iq} \Rightarrow \boxed{\tilde{\beta} = \frac{2d\omega}{c}(p+iq)}$ (2)

- Vamos agora somar todas as contribuições, das várias ondas incidentes, relacionado ao Coeficiente Reflexão $\hat{r}$ da onda no meio 1, usando os Coeficientes de Fresnel em cada interface e considerando os vários desvios de fase $\tilde{\beta}$.

- Certamente, teremos componentes *s* e *p* de polarização da onda, que deverão ser tratadas separadamente; sendo que <u>para cada uma delas vale</u>:

diferença de fase entre $\vec{E}$ da 1ª onda e $\vec{E}$ da 2ª onda.

$$\tilde{r} = \tilde{r}_2 + \tilde{t}_{12}\tilde{r}_{23}\tilde{t}_{21}e^{i\tilde{\beta}} + (\tilde{t}_{12}\tilde{r}_{23})(\tilde{r}_{21})(\tilde{r}_{23}\tilde{t}_{21})\overbrace{e^{i\tilde{\beta}}e^{i\tilde{\beta}}}^{e^{2i\tilde{\beta}}} + \dots$$

reflexão na 1ª interface

transmissão na 1ª interface

reflexão na 2ª interface

transmissão na 2ª interface

diferença de fase percurso 0X

para outros raios

- Assim: $\tilde{r} = \tilde{r}_{12} + \tilde{t}_{12}\tilde{r}_{23}\tilde{t}_{21}e^{i\tilde{\beta}}\left[1 + \left(\tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}\right) + \left(\tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}\right)^2 + \dots\right]$

- Mas: $1 + \xi + \xi^2 + \dots \equiv$ expansão de Taylor da expressão $\frac{1}{1-\xi}$ $\quad (1+x)^n$

  $\xi = \tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}$

- Então: $\tilde{r} = \tilde{r}_{12} + \frac{\tilde{t}_{12}\tilde{r}_{23}\tilde{t}_{21}e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \underbrace{\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}}_{\substack{// \\ (\xi)}}} = \frac{\tilde{r}_{12} - \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}} + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21}r_{23}e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}} \Rightarrow \tilde{r} = \frac{\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23}\left(\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} - r_{12}\tilde{r}_{21}\right)e^{i\tilde{\beta}}}{1 - \tilde{r}_{21}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}}$

- Agora, usando $\begin{cases}\tilde{r}_{12} = -\tilde{r}_{21} \\ \tilde{r}_{12}^2 + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21} = 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{\tilde{r} = \frac{\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}}}$ (3) ; e para $\tilde{t}$: $\boxed{\tilde{t} = \frac{\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{23}e^{i\tilde{\beta}/2}}{1 + \tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}}}$ (4)

  (ver aula anterior)

mesma equação para as duas componentes, $\perp$ e //; e a diferença de fase é a mesma.

- Para o cálculo da <u>*Refletância*</u> (*meio 1*) e <u>*Transmitância*</u> (*meio 3*):

$$\begin{cases} R=\tilde{r}\,\tilde{r}^{*} \\ T=\dfrac{n_3\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\,\tilde{t}\,\tilde{t}^{*} \end{cases} \quad ; \quad \left(t=\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right) \quad \text{(na 1ª interface)}$$

- Na situação em que a *Camada Delgada* corresponde a um ***<u>meio dielétrico</u>***: $\boxed{R+T=1}$

- Porém, se o ***<u>meio for condutor</u>***: $\boxed{R+T+A=1}$, já que haverá energia absorvida/dissipada por aquecimento Joule.

- Expressar R e T em termos de n e n_* (ou p e q) resulta em equações bastante complexas, que servem para determinar experimentalmente as correntes óticas n e n_* dos condutores.

- Na verdade, computadores são necessários para resolver n e n_* a partir dos valores de R e T.

- No entanto, podemos <u>estimar</u> estes valores considerando que T é proporcional ao produto $\tilde{t}.\tilde{t}^{*}$ apenas, que por sua vez é proporcional a $e^{i\tilde{\beta}/2}\,e^{-i\tilde{\beta}^{*}/2}$:

$$T\propto\tilde{t}\,\tilde{t}^{*}\propto e^{i\tilde{\beta}/2}\,e^{-i\tilde{\beta}^{*}/2}\,;\;\; \tilde{\beta}=(eq.2)=\frac{2d\omega}{c}(p+iq)\;\Rightarrow T\propto e^{\frac{i}{2}\frac{2d\omega}{c}(\cancel{p}+iq-\cancel{p}+iq)}\;\Rightarrow \boxed{T\propto e^{\frac{-2d\omega q}{c}}} \qquad (5)$$

- Para *Incidência Normal*, vimos que $q\rightarrow n_*$ $\Rightarrow$ lembrando também da expressão do ***Coeficiente de Profundidade*** : $\boxed{\delta=\dfrac{c}{n_*\omega}}\Rightarrow\boxed{T\propto e^{-2d/\delta}}$

- Em particular, se o meio 1 for ar: $\lambda_1=\dfrac{c}{f}=\dfrac{2\pi c}{\omega}\Rightarrow\boxed{\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}}$

- Então, da eq. (5): $\boxed{T\propto e^{\frac{-4\pi n_* d}{\lambda_1}}}$ (*para lâmina condutora em ar, incidência normal*) $\left(\underbrace{7800\,\text{Å}}_{\text{vermelho}}\rightarrow\underbrace{3800\,\text{Å}}_{\text{violeta}}\right)$

- Em filmes metálicos, $n_*\sim 2$ por exemplo, supondo luz $\lambda_1\sim 5000\text{Å}$, podemos *avaliar qual a espessura da lâmina* para que *haja Transmissão* apreciável de luz.

- Por exemplo, para que ocorra transmissão de 1% da radiação incidente:

$$\boxed{e^{\frac{-4\pi n_* d}{\lambda_1}}\sim 0{,}01}\;\Rightarrow\;\boxed{d\sim 10^{-7}m}\quad (d\sim 1000\text{Å}).$$

- Quanto à Refletância:

$$R=\tilde{r}\,\tilde{r}^{*}=\frac{\left(\tilde{r}_{12}+\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}\right)\left(\tilde{r}_{12}^{*}+\tilde{r}_{23}^{*}e^{-i\tilde{\beta}^{*}}\right)}{\left(1+\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}\right)\left(1+\tilde{r}_{12}^{*}\tilde{r}_{23}^{*}e^{-i\tilde{\beta}^{*}}\right)}=$$

$$=\frac{\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{12}^{*}+\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}^{*}e^{-i\tilde{\beta}^{*}}+\tilde{r}_{23}\tilde{r}_{12}^{*}e^{i\tilde{\beta}}+\tilde{r}_{23}\tilde{r}_{23}^{*}\,e^{\frac{-4d\omega q}{c}}}{1+\tilde{r}_{12}^{*}\tilde{r}_{23}^{*}e^{-i\tilde{\beta}^{*}}+\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{23}e^{i\tilde{\beta}}+\tilde{r}_{12}\tilde{r}_{12}^{*}\tilde{r}_{23}\tilde{r}_{23}^{*}\,e^{\frac{-4d\omega q}{c}}}\;;\text{ pois: } e^{i\tilde{\beta}}e^{-i\tilde{\beta}^{*}}=e^{\frac{2d\omega}{c}(\cancel{ip}-q-\cancel{ip}-q)}$$

$$\left\{\tilde{\beta}=\frac{2d\omega}{c}(p+iq)\right\}$$

- Em particular, para ***meios Não-Condutores (dielétricos)***: $n_*=q=0\;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{\tilde r_{12}\tilde r_{12}^* + \tilde r_{12}\tilde r_{23}^* e^{-i\tilde\beta^*} + \tilde r_{23}\tilde r_{12}^* e^{i\tilde\beta} + \tilde r_{23}\tilde r_{23}^* \, e^{0}}{1 + \tilde r_{12}^*\tilde r_{23}^* e^{-i\tilde\beta^*} + \tilde r_{12}\tilde r_{23} e^{i\tilde\beta} + \tilde r_{12}\tilde r_{12}^*\tilde r_{23}\tilde r_{23}^* \, e^{o}}$$

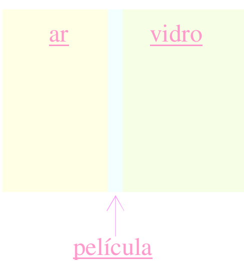
- Sendo que: $\begin{cases} i)\,\tilde\beta = \beta = \dfrac{2d\omega}{c}p = \dfrac{2d\omega}{c}n_2 \\ ii)\begin{cases}\tilde r_{12} \to r_{12} \\ \tilde r_{23} \to r_{23}\end{cases} \text{(retornando para o caso de dielétricos)} \end{cases}$

- Agora, usando (*ii*) na equação da Refletância acima:

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{12}r_{23}\left(\cos\beta - \cancel{i\sin\beta} + \cos\beta + \cancel{i\sin\beta}\right)}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + r_{12}r_{23}\left(\cos\beta - \cancel{i\sin\beta} + \cos\beta + \cancel{i\sin\beta}\right)} \Rightarrow \boxed{R_{\substack{película \\ dielétrica}} = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}{1 + r_{12}^2 r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23}\cos\beta}} \qquad (6)$$

- E <u>quando *Incidência for Normal*</u>: $\begin{cases} r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ r_{23} = \dfrac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \end{cases}$

- <u>Exemplo</u>: Supor Incidência Normal em uma fina camada de um *revestimento plástico* $(n_2 = 1,3)$ depositada em cima de *vidro* $(n_3 = 1,5)$, sendo *meio 1* $\equiv$ *ar* $(n_1 = 1)$.



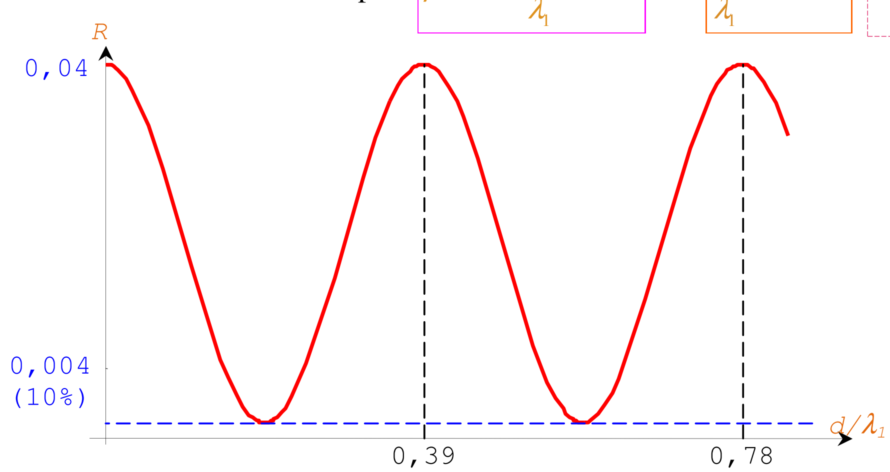
$$\left.\begin{aligned} r_{12}^2 &= \left(\frac{1 - 1,3}{1 + 1,3}\right)^2 = 0,017 \\ r_{23}^2 &= \left(\frac{1,3 - 1,5}{1,3 + 1,5}\right)^2 = 0,005 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \frac{0,022 + 0,0186\cos\beta}{1,0001 + 0,0186\cos\beta}}$$

- Sendo que $\beta = 2d\,n_2\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^{/\!/\,2\pi/\lambda_1} \Rightarrow \boxed{\beta = 4\pi n_2\left(\dfrac{d}{\lambda_1}\right) = 16,3\dfrac{d}{\lambda_1}}$

- Substituindo este resultado na equação (6): $\begin{cases} R_{max}\left(\cos\beta = 1\right) = \dfrac{0,0407}{1,0187} = 0,04 \\ R_{min}\left(\cos\beta = -1\right) = \dfrac{3,6.10^{-3}}{0,982} = 0,004 \end{cases}$;

  (ver apêndice)

sendo que valores de máximo ocorrem para $\boxed{\beta = 16,3\dfrac{d}{\lambda_1} = 2m\pi} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d}{\lambda_1} = 0,39m}$ (e múltiplos inteiros deste valor)



- Note que R (total, resultante) ***pode ser menor*** que refletância que ocorreria apenas na 1ª interface! $\left(r_{12}^2 = 0{,}017\right) \Rightarrow$ *devido Interferência Destrutiva*.

- Pergunta: Os valores de mínimo de R, para valores apropriados de d/λ_1 (dada espessura d, *R é* mínimo para um certo λ_1), haverá alguma situação em que este mínimo será zero?

- Resposta: Sim, caso se utilize material de revestimento tal que $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ (mostre!).

- Este efeito é útil para se ter lentes (câmeras, óculos, etc) com refletância nula (para λ_1 no centro do espectro visível), ou quase nula.

- Em bolhas de sabão, manchas de óleo no asfalto, por exemplo, a espessura d da película não é uniforme $\Rightarrow$ Máximos e Mínimos da Refletância ocorrem para valores diferentes de λ_1. Por isso as diversas cores observadas!

APÊNDICE

- Refletância: $R = \dfrac{a + b\cos\beta}{c + b\cos\beta} \Rightarrow$ os valores de máximo e mínimo de R em função de β serão:

$$\frac{dR}{d\beta} = \frac{(-b\sin\beta)(c + b\cos) - (a + b\cos\beta)(-b\sin\beta)}{(c + b\cos\beta)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -bc\sin\beta - \cancel{b^2\sin\beta}\cos\beta + ab\sin\beta + \cancel{b^2\sin\beta}\cos\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ab - bc)\sin\beta = 0 \Rightarrow \sin\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\beta = \pm 1}$$

usando estes resultados temos os valores de máximo e mínimo de R.

$$\textit{substituindo} \Rightarrow \begin{cases} -1 \longrightarrow \textit{mínimos} \\ +1 \longrightarrow \textit{máximos} \end{cases}$$