

# Eletrromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 19 aula - 18mai/2007

- Guias de onda: duas placas condutoras  $\infty$ , em vácuo, separadas de  $a$  e condutividade  $\sigma = \infty$ .

- Modo TE:  $\vec{E}$  oscila // ao eixo  $x$ .

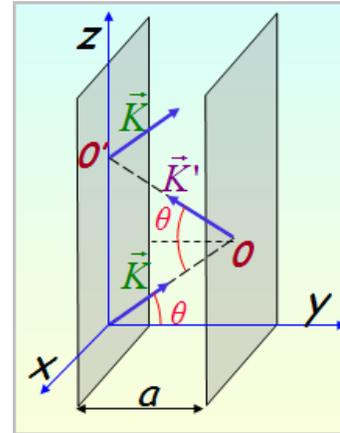
- Na região entre as placas condutoras, em qualquer ponto  $P$ , teremos ondas do tipo 1 superpondo-se ao do tipo 2:

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_{01} \left( e^{iKy \cos \theta} - e^{-iKy \cos \theta} \right) e^{i(Kz \sin \theta - \alpha t)} \quad (1)$$

- Aplicando às duas interfaces (em  $y = 0$  e  $y = a$ ) a condição de continuidade:  $E_{1t} = E_{2t}$ :

$$Ka \cos \theta = m\pi \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

*esta é a condição que deve ser satisfeita para que haja propagação no modo TE*



- De onde tiramos, para o vácuo ( $n = 1$ ), que:  $v_f = \frac{c}{\sin \theta} > c$  !!

- Agora, para escrevermos  $\vec{E}$  em termos das componentes de  $\vec{K}$  nas direções de  $y$  e de  $z$ , definimos:

$$\begin{cases} K_z = K \sin \theta = 2\pi / \lambda_g \\ K_y = K \cos \theta = 2\pi / \lambda_c \end{cases} \quad ; \quad \text{de forma que:} \quad \begin{cases} \lambda_g = \frac{2\pi}{K \sin \theta} \\ \lambda_c = \frac{2\pi}{K \cos \theta} \end{cases}$$

*note que  $K_y$  pode ser negativo, quando  $\cos \theta < 0$*

- Que, em termos do comprimento da onda no espaço livre (vácuo, sem fronteiras),  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$ :

$$\begin{cases} \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \\ \lambda_c = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (3)$$

- Agora, escrevendo  $\vec{E}$  resultante (eq. 1) em função destas grandezas:

$$i) \text{ Termo } \propto a \ e^{iKy \cos \theta} - e^{-iKy \cos \theta} = \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi - \cancel{\cos \xi} + i \sin \xi = 2i \sin \left( Ky \frac{2\pi}{K \lambda_c} \right) = 2i \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_c} y \right)$$

ii) Termo  $\alpha$  a  $e^{i(Kz \sin \theta - \omega t)} = e^{i\left(Kz \frac{\lambda_0}{\lambda_g} - \omega t\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z \frac{\lambda_0}{\lambda_g} - \omega t\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}$

• De forma que:  $\vec{E} = \hat{e}_x E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}$  (4)

• Por outro lado, a equação (2):  $Ka \cos \theta = m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_c} = m\pi \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2}$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$  (número inteiro) (5)

note que, para  $m=0 \Rightarrow \lambda_c = \infty$ , ou seja, não há  $\lambda_c$  de corte

- Escolhendo  $m=1$ , por exemplo:  $\lambda_c = 2a$  é uma cte.  $\Rightarrow K = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow$  se  $\omega$  decrece,  $\lambda_0$  crece.
- Se  $\lambda_0$  crece e  $\lambda_c$  é uma constante (para um dado  $m$ )  $\Rightarrow$  da eq. (3):  $\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_c^2}$  observa-se que haverá um  $\lambda_0$  limite, a partir do qual  $\frac{1}{\lambda_g^2}$  deverá ter valores negativos (para que a igualdade continue valendo).

- Neste caso, coeficiente de  $z$ , no expoente da equação (4) torna-se imaginário e o campo passa a decair exponencialmente (e não mais oscila!!).

$$\left(\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} \Rightarrow \lambda_0^2 = \lambda_c^2\right)$$

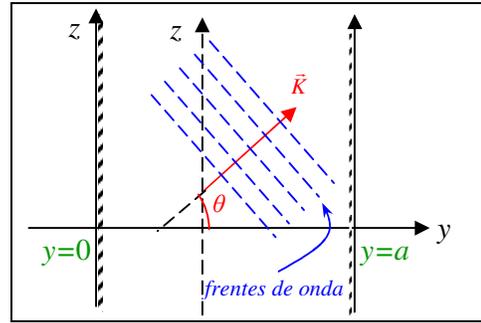
- Este valor limite corresponde a  $\lambda_0 = \lambda_c = 2a$ , para  $m=1$ .

$$\text{para } \frac{1}{\lambda_g^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0^2} \geq \frac{1}{\lambda_c^2} \Rightarrow \lambda_c^2 \geq \lambda_0^2 \Rightarrow \lambda_0 \leq \lambda_c$$

- Ou seja, se  $\lambda_0 > 2a \Rightarrow$  onda EM, **Modo TE**, será **amortecida em relação à direção z**  $\therefore$  não se propaga!
- Agora, se  $m=2 \Rightarrow$  da equação (5):  $\lambda_c = \frac{2a}{m} = a \Rightarrow 0$  comprimento de onda mais longo possível para haver propagação da onda será **a**.
- A razão da escolha do índice 'c', de corte, agora fica evidente.
- Ou seja,  $\lambda_c \equiv$  comprimento de onda mais longo que onda pode ter para propagar-se em um determinado modo (valor de  $m$ ).

- Quanto à velocidade  $v_f = \frac{c}{\sin \theta}$  obtida anteriormente, ela sempre excede a velocidade da luz, e pode inclusive tornar-se  $\infty$  quando  $\theta = 0^\circ$  ou seja,  $\lambda_0 = \lambda_c$  (pois, como já vimos,  $\cos \theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_c}$ ).

- Esta velocidade, dita “**de fase**”  $\equiv$  velocidade de um ponto, ao longo do eixo z, que *permanece com fase da onda constante*.
- Note que a aparente contradição com Relatividade não é real, já que a energia da onda, como já veremos, propaga-se na direção do eixo z com velocidade **menor** que a da luz.
- Esta velocidade  $\equiv$  “**velocidade de grupo**”; e os sinais EM são transmitidos segundo suas velocidades “de grupo”, e não de “fase”.



- Para se determinar a velocidade de propagação da energia, na direção z, vamos recordar que (já visto em uma aula anterior):  $\vec{S} = u \vec{v}_p$ ; sendo que:

$$\vec{S} = \bar{u} \vec{v}_p \quad ; \quad |\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})_z$$

*densidade de energia*

e vamos calcular a *densidade de energia média* e a *média do Vetor de Poynting* na região entre as placas.

- Então:  $\bar{u} = \frac{1}{2} \text{Re}(EE^*) = \frac{\epsilon}{2} E_0 E_0^* \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} e^{-i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} = \frac{\epsilon}{2} E_0 E_0^* \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right)$  (5)

*$E_{el.} + E_{mag.} = 2 \times E_{el.}$*       *equação (4)*

- Para obter a *energia no guia* (que irá *propagar-se na direção z*), devo integrar  $\bar{u}$  em y (lembrar que placas são  $\infty$  em x e z):

$$\int_0^a \bar{u} dy = \frac{\epsilon}{2} E_0 E_0^* \int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) dy = \frac{\epsilon}{2} E_0 E_0^* \frac{1}{2} \int_0^a \left(1 - \cos\frac{4\pi y}{\lambda_c}\right) dy =$$

$$= \frac{\epsilon}{4} E_0 E_0^* \int_0^a dy - \frac{\epsilon}{4} E_0 E_0^* \int_0^a \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_c} y\right) dy = \frac{\epsilon}{4} E_0 E_0^* a - \frac{\epsilon}{4} E_0 E_0^* \frac{\lambda_c}{4\pi} \sin\frac{4\pi y}{\lambda_c} \Big|_0^a = \frac{\epsilon a}{4} E_0 E_0^*$$

*= 0, pois  $\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2}$ ; eq. (5)*

- Quanto ao Vetor de Poynting, na direção do eixo z:

$$\int_0^a \bar{S}_z dy = \int_0^a \bar{S} \sin \theta dy \quad ; \quad \begin{cases} \sin \theta = \frac{2\pi}{K \lambda_g} = cte. \\ \bar{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{n}{\mu_0 c} EE^* \right] \end{cases}$$

- Então:  $\int_0^a \bar{S}_z dy = \frac{\cancel{2}\pi}{K \lambda_g} \frac{n}{\mu_0 c} \frac{1}{\cancel{2}} E_0 E_0^* \int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) dy = \left(K = \frac{n\omega}{c}\right) = \frac{\pi \cancel{h} \cancel{f}}{\cancel{h} \omega \lambda_g \mu_0 \cancel{f}} \frac{a}{2} E_0 E_0^*$

*= a/2, como já visto acima*

• Assim:  $v_g = \frac{\int_0^a \bar{S}_z dy}{\int_0^a \bar{u} dy} = \frac{\left( \frac{1}{4} \cancel{E_0 E_0^*} \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \cancel{A} \right)}{\frac{\epsilon_0 \cancel{A} \cancel{E_0 E_0^*}}{A}} \Rightarrow v_g = \frac{2\pi}{\mu_0 \epsilon_0 \omega \lambda_g} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_g = \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} c^2 \Rightarrow v_g = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g}$ ; mas  $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \Rightarrow v_g = c \sin \theta < c$ , sempre !!

- Muitos destes resultados, obtidos com geometria simples, valem para casos mais complexos, com outras geometrias: veremos isto agora para um *guia de onda retangular*.