

# Eletrromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

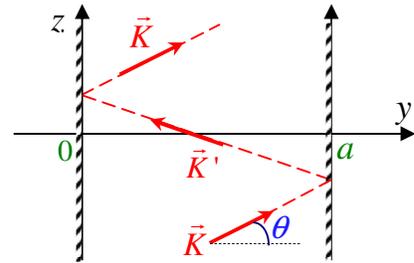
Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 20 aula - 22mai/2007

- Vimos: Guias de onda; 2 placas // com  $\sigma = \infty$ , separadas de  $a$ , em vácuo, Modo TE ( $E_{||} = 0$ ).

- Condição que rege de propagação:  $\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}$

- Sendo:  $\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta}$  ;  $\lambda_c = \frac{\lambda_0}{\cos \theta}$  ;  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{K}$



- E, em um ponto  $P$  qualquer entre as duas placas:

$$\vec{E}(P) = \hat{e}_x E_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda_c}\right) e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} \quad (1) ; \quad \frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2} ; m = 0, 1, 2, \dots$$

- Com relação à velocidade de fase da onda:  $v_f = \frac{c}{\sin \theta}$ ; é sempre maior que  $c$  !!

- Critério de propagação** da onda:  $\frac{1}{\lambda_0^2} \geq \frac{1}{\lambda_c^2}$

- Agora, para calcular a velocidade de grupo, vamos usar a expressão  $\vec{S} = \vec{u} v_p$  ( $\vec{S} = u \vec{v}_p$ ), obtida anteriormente, para determinar a propagação da energia EM ao longo do eixo  $z$ ;

- Isto será feito calculando-se:  $v_p = v_g = \frac{\int_0^a \vec{S}_z dy}{\int_0^a \bar{u} dy}$  ;

- Sendo que:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad \text{e} \quad \bar{u} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{B} \cdot \vec{H}^*) ; \quad u = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

- Mas, no vácuo (dielétricos em geral) os campos elétrico e magnético contribuem igualmente para a energia da onda. Assim, lembrando também que  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ :

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\lambda} \text{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \Rightarrow \text{de (1)} \Rightarrow \bar{u} = \frac{\epsilon_0}{2} \text{Re} \left[ E_0 E_0^* \sin^2 \left( \frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) \underbrace{e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)} e^{-i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}}_{=1} \right]$$

- Então integrando  $\bar{u}$  em relação a  $y$  (lembrando que as placas são  $\infty$  em  $x$  e  $z$ ):

$$\int_0^a \bar{u} dy = \frac{\epsilon_0 E_0 E_0^*}{2} \int_0^a \sin^2 \left( \frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) dy = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0 E_0^* \int_0^a \left( 1 - \cos 2 \frac{2\pi}{\lambda_c} y \right) dy =$$

$$= \frac{\epsilon_0 E_0 E_0^*}{4} \int_0^a dy - \frac{\epsilon_0 E_0 E_0^*}{2} \int_0^a \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda_c} y \right) dy = \frac{\epsilon_0 E_0 E_0^*}{4} \left[ a - \frac{\lambda_c}{4\pi} \sin \left( \frac{4\pi}{\lambda_c} y \right) \right]_0^a$$

pois usando  $\frac{a}{\lambda_c} = \frac{m}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{4\pi a}{\lambda_c} = \frac{4\pi m}{2} = m\pi$

- Ou seja:  $\int_0^a \bar{u} dy = \frac{\epsilon_0 a}{4} E_0 E_0^*$

- Quanto ao valor médio do *Vetor de Poynting na direção do eixo z*:

$$\int_0^a \bar{S}_z dy = (\text{ver fig. acima}) = \int_0^a \bar{S} \sin \theta dy ; \text{ sendo: } \sin \theta = \frac{2\pi}{K \lambda_g} \text{ e } \bar{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{n}{\mu_0 c} E E^* \right]$$

- Então:  $\int_0^a \bar{S}_z dy = \frac{2\pi}{K \lambda_g} \frac{n}{\mu_0 c} \frac{1}{2} E_0 E_0^* \int_0^a \sin^2 \left( \frac{2\pi y}{\lambda_c} \right) dy = a/2 ; \text{ como já obtido acima}$

- Ou seja:  $\int_0^a \bar{S}_z dy = \left( K = \frac{n\omega}{c} \right) = \frac{\pi \cancel{h} E_0 E_0^* a}{2 \lambda_g \mu_0 \cancel{h} \omega} \Rightarrow \int_0^a \bar{S}_z dy = \frac{\pi a E_0 E_0^*}{2 \mu_0 \omega \lambda_g}$

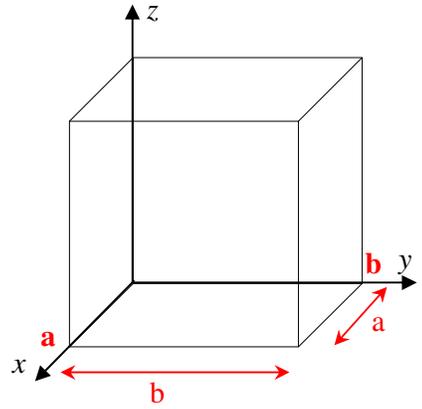
- Portanto:  $v_g = \frac{\int_0^a \bar{S}_z dy}{\int_0^a \bar{u} dy} = \frac{\pi a E_0 E_0^*}{2 \mu_0 \omega \lambda_g} \frac{A}{\epsilon_0 a E_0 E_0^*} = \frac{2\pi}{\omega \lambda_g \epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_g = \frac{2\pi c^2 = \lambda_0}{\omega \lambda_g} \Rightarrow v_g = \frac{c \lambda_0}{\lambda_g} \therefore v_g = c \sin \theta < c, \text{ sempre !!}$$

$\left( \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \right)$

- Muitos destes cálculos, obtidos com esta geometria simples, valem para casos mais complexos.
- Vamos ver isto para guia de onda retangular, com propagação TE na direção do eixo z.
- Das equações de Maxwell temos:

$$\begin{cases} 3^a \text{ equação: } \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +i\mu_0 \omega \vec{H} \\ 4^a \text{ equação: } \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\epsilon_0 \omega \vec{E} \end{cases} ;$$



- Notando que  $E_z = 0$  (pois é modo TE) podemos escrever estas equações em suas componentes:

da (3ª) equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - i\mu_0\omega H_z = 0 & (1) \\ E_x = \frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_y & (3) \\ E_y = \frac{-\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} H_x & (7) \end{cases}$$

(ver apêndice 1, como exemplo)

da (4ª) equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi i H_y}{\lambda_g} + i\varepsilon_0\omega E_x = 0 & (2) \\ \frac{2\pi i H_x}{\lambda_g} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\varepsilon_0\omega E_y = 0 & (4) \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 & (5) \end{cases}$$

- Note que das equações (4) e (6), tenho  $H_y$  em Função de  $H_z$ .
- Note que das equações (5) e (7), tenho  $H_x$  em Função de  $H_z$ .
- E também  $E_x$  e  $E_y$  (equações (4) e (5)) estão relacionadas de forma simples com  $H_x$  e  $H_y$ .
- Portanto, obtendo-se  $H_z \Rightarrow$  todas as demais componentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são obtidas.
- Agora, para calcular  $H_z$ , vamos partir da **equação de onda**: (no vácuo)

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

- Sendo que, como sabemos, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são  $\propto e^{i\frac{2\pi}{\lambda_g}z} e^{-i\omega t}$

- **Componente z**:  $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) H_z = 0$  (ver apêndice 2)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{sai da derivada no tempo: } \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \right) & \text{sai da derivada em z: } \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} \right) \\ \hline \end{array}$$

- Para resolver esta equação diferencial, vamos utilizar o “**Método da Separação de Variáveis**” e aplicar a **Condição de Contorno** adequada.

$$E_{1t} = E_{2t} = 0, \text{ nas paredes com condutividade } \infty$$

- Assim: (Ver dedução 1997; 17ª aula)

$$H_z(x, y, z) = \left[ A \cos K_x x \cos K_y y + B \cos K_x x \sin K_y y + C \sin K_x x \cos K_y y + D \sin K_x x \sin K_y y \right] e^{\frac{2\pi i z}{\lambda_g}}$$

- Com:  $\left[ \frac{\omega^2}{c^2} - \left( \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) \right] - (K_x^2 + K_y^2) = 0$  (9)

- De forma que, usando (4) e (6):  $E_x = \frac{\mu_0\omega\lambda_g}{2\pi} \left( \frac{2\pi i}{\lambda_g} - \frac{i\varepsilon_0\mu_0\omega^2\lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y}$  (ver apêndice 3)

- Vamos realizar uma análise rápida do comportamento desta última equação, para obtermos a expressão de  $H_z$ .

- Observe inicialmente que a derivada envolve a mudança **sin** ↔ **cos**. Supondo paredes com condutividade  $\sigma = \infty \Rightarrow E_x$  deve anular-se em  $y = 0$  e  $y = b$   $\therefore$  somente termos em **sin** $K_y y$  podem sobrar na equação de  $E_x$ ; e estes termos devem ter  $K_y = \frac{n\pi}{b}$  (10)

$$\left( \text{para que } \sin(K_y y) \Big|_{y=b} = 0 \right)$$

(para que  $E_x$  se anule quando  $y=a$ )

- Pelos mesmos argumentos, para a coordenada  $x$ , novamente os termos em  $\sin k_x x$  é que sobram, com:

$$K_x = \frac{m\pi}{a} \quad (11) ; \text{ sendo que: } (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

- Agora, para que isto aconteça  $\Rightarrow$  *soluções permitidas* de  $H_z$  são as que envolvem **cos** $k_y y$  e **cos** $k_x x$ : (que, após a derivação em  $y$ , tornam-se funções senos)

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\frac{2\pi i z}{\lambda_g}} \quad (12) ; (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

- De forma que **cada par** possível de  $m, n$  determina um modo  $TE_{mn}$  de propagação.
- Agora, substituindo (10) e (11) em (9):

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 = 0 \Rightarrow \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2$$

$\left( K = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \right)$  (são constantes)

- Novamente, **para um dado par**  $(m, n)$  se  $\lambda_0$  for suficientemente grande  $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_0}$  é muito pequeno; de forma que:

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 < \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g} \text{ torna-se imaginário e o modo } TE_{mn} \text{ correspondente (veja equação 12) não se propaga!}$$

- Exemplo: Supor modo **TE**<sub>10</sub> em um guia com  $\begin{cases} a = 2,28cm \\ b = 1,01cm \end{cases}$

- Então, para **haver propagação**:  $\left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 > \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \Rightarrow \lambda_0 < 2a \Rightarrow \lambda_0 < 4,56cm$

# RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

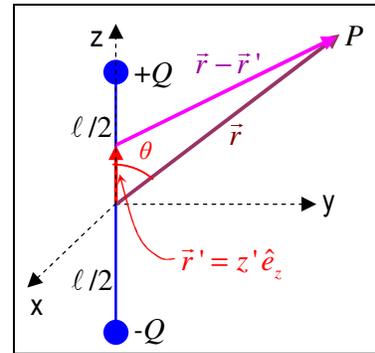
- Experimentalmente, observa-se que cargas em **repouso** ou **MRU não irradiam**: é preciso que estejam aceleradas para isto ocorrer.
- Para estudar o problema da radiação, uma abordagem interessante e mais ou menos simples é feita através do cálculo dos potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$ , e depois:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi = \partial\vec{A}/\partial t \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

- De forma que **Condição (Gauge) de Lorentz** seja satisfeita:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{ver abordagem eletro II - 1988 - 4ª aula})$$

- Vamos iniciar considerando uma “**espécie de dipolo elétrico**”, constituído por duas cargas  $+Q$  e  $-Q$ , ligadas por um fio de comprimento  $\ell$  (de capacitância desprezível)  $\Rightarrow$  este será o nosso modelo.



- Impondo a **Conservação da Carga**, a corrente no fio é dada por:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \int (\nabla \cdot \vec{J}) dV = (\text{teo. div}) = \int \underbrace{\vec{J} \cdot \hat{n}}_{=I} dA = -\frac{d}{dt} \int \underbrace{\rho dV}_{=Q}$$

(I é negativo quando cargas saem do volume espacial)

$I = (+) \frac{dQ}{dt}$

(I é positivo no sentido de +z)

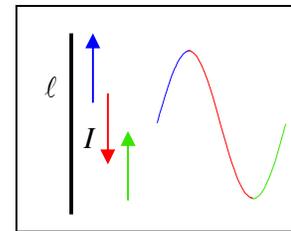
- Estaremos sempre supondo que a **corrente que flui no fio, em um dado instante, é a mesma em qualquer ponto do fio**. Como já veremos, esta é uma condição que tira a dependência de  $\vec{A}$  e  $I$

(na verdade, a ddp externa é que provoca corrente; definir +Q e -Q é apenas uma simplificação do dipolo)

com relação a  $z'$ :  $I(z', t') \rightarrow I(z, t')$

- Esta aproximação será válida quando o comprimento  $\ell$  for muito **pequeno** em relação ao  $\lambda$  da onda emitida.
- Lembrando agora que para o cálculo do **Potencial Vetor**:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' ; t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \equiv \text{tempo retardado}$$



- E, como estamos lidando com sistema linear:  $\vec{J} dV \rightarrow I d\vec{\ell} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{I \left( z', t - \frac{|\vec{r} - z' \hat{e}_z|}{c} \right)}{|\vec{r} - z' \hat{e}_z|} dz' \hat{e}_z$$

(fornece a expressão exata de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ )

$$I = \int \vec{J} \cdot \hat{n} dA = JA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\times d\ell) \Rightarrow Id\ell = J \frac{Ad\ell}{dV}$$

- Agora, para resolver a integral, da figura do dipolo podemos notar que:

$$|\vec{r} - z' \hat{e}_z| = (\text{da lei dos cossenos}) = \left( z'^2 + r^2 - 2z' \underbrace{\hat{e}_z \cdot \vec{r}}_{=r \cos \theta} \right)^{1/2}$$

- Para simplificar os cálculos, porém, podemos supor ponto  $P$  muito distante do dipolo de forma que:

$$|\vec{r} - z' \hat{e}_z| = r \left( \frac{z'^2}{r^2} + 1 - \frac{2z' \cancel{r} \cos \theta}{r \cancel{r}} \right)^{1/2} \approx r \left( 1 - \frac{z' \cos \theta}{r} \right) = r - z' \cos \theta$$

$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \dots$

- Note que esta quantidade está presente, na equação de  $\vec{A}$ , no:

i) *Denominador*, de forma que  $z' \cos \theta$  pode ser desprezado para  $r \gg \ell$ .

ii) *Tempo de retardo*:  $t - \frac{|\vec{r} - z' \hat{e}_z|}{c} = t - \frac{r - z' \cos \theta}{c}$  de forma que o tempo  $\frac{z' \cos \theta}{c}$  pode ser desprezado somente quando for muito pequeno em relação ao tempo no qual a corrente varia significativamente.

ou seja, nesta situação  $I = \text{cte}$  e a corrente "sai fora" da integral.

- Assim, como  $z' \cos \theta = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{z' \cos \theta}{c}$  só poderá ser desprezado no tempo retardado se:

$$\frac{\ell}{2} \ll cT = \lambda_{\text{radiação}}$$

(e também para ficar valendo a aproximação de corrente uniforme em um dado  $t$ )

período de oscilação da corrente

e, na integral,  $I\left(z', t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow I\left(z, t - \frac{r}{c}\right)$  ( $I$  não depende mais de  $z'$  !)

- Assim, se o dipolo for pequeno comparado com um  $\lambda_{\text{radiação}}$ , e o ponto  $P$  estiver muito distante do dipolo (em comparação com  $\ell$ ):

$$A_z(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ell \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

mais uma cte. de integração que eu escolho = 0 (caso mais simples) que, nas derivadas de  $\vec{A}$  para o cálculo dos campos, ela some.

- Agora, da Condição de Lorentz, pode-se obter o *Potencial Escalar* correspondente:

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{A}}_{=\frac{\partial A_z}{\partial z}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} I \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]; \text{ sendo que } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

(em relação a  $z$  e não a  $z'$  !)

• Ou seja:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-\ell}{4\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cancel{r} z I \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \left( t - \frac{r}{c} \right)} \frac{\partial \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial z} \right] =$$

$$= \frac{-\ell}{4\pi \epsilon_0} \left[ -\frac{z}{r^3} I \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} I' (-) \frac{1}{c} \frac{1}{r} \cancel{r} z \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{z}{r^3} I \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{z}{r^2 c} I' \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

- Porém, como  $I = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow Q = \int I dt$ , então: (derivada de I com respeito ao seu argumento)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[ \frac{Q \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} + \frac{I \left( t - \frac{r}{c} \right)}{c} \right]$$

- Note que a integração do 2º termo foi trivial pois:  $\int I' \left( t - \frac{r}{c} \right) dt = \int I'(\xi) d\xi = I(\xi)$ ; já que  $\underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\equiv \xi}$

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 \Rightarrow d\xi = dt!$$

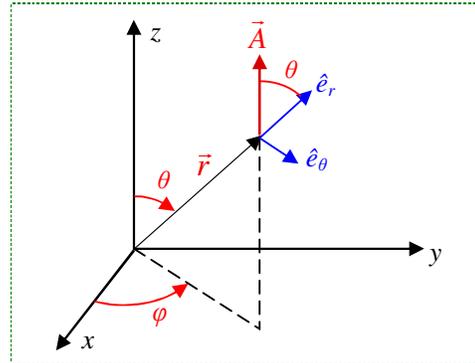
- Vamos agora obter os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  no caso particular de uma configuração de carga/corrente dado por:

$$Q \left( t - \frac{r}{c} \right) = Q_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \text{ e } I \left( t - \frac{r}{c} \right) = I_0 \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right); I_0 = -\omega Q_0$$

- Vou querer também trabalhar com coordenadas esféricas já que, na aproximação de dipolo, a geometria do sistema é esférica.

- Assim, o potencial vetor  $\vec{A} = A \hat{e}_z$  torna-se:

$$\begin{cases} A_\phi = 0 \\ A_r = A \cos \theta = \frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cos \theta \\ A_\theta = -\frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \end{cases}$$



- De forma que, para calcular

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla_{\text{esf.}} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \overset{=0}{A_\phi} \sin \theta \right) - \frac{\partial \overset{=0}{A_\theta}}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \overset{=0}{A_r}}{\partial \phi} - \frac{\partial \left( r \overset{=0}{A_\phi} \right)}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{B} = \vec{B} \hat{e}_\phi &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi} \sin \theta \left( \frac{-\omega}{c} \right) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \sin \theta \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\therefore B_\phi = \frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \sin \theta \left[ \frac{\omega}{c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

- Para o cálculo de  $\vec{E}$ , a partir da equação  $\vec{E} = -\nabla \varphi_{\text{esf.}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  (usando  $z = r \cos \theta$  na equação de  $\varphi$ ):

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2\ell I_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\sin \omega(t-r/c)}{cr^2} - \frac{\cos \omega(t-r/c)}{\omega r^3} \right] \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} = -\frac{\ell I_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega(t-r/c) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega(t-r/c) \right] \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

- Note que existe  $\vec{E}$  tanto na direção de  $\theta$  quanto na direção de  $r$  (!), enquanto que  $\vec{B}$  é só na direção de  $\phi$  (!)

isto porque são ondas esféricas!

- Agora, ainda tendo-se em mente a **Aproximação de Dipolo**, vamos calcular a **Taxa de Energia (Potência) Irradiada** pelo dipolo, calculando o **fluxo do Vetor de Poynting** através de uma **esfera** de raio  $r$ , centrada no dipolo, considerando este raio muito grande ( $r \rightarrow \infty$ ).

- Então:  $\oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} dA = \oint (E_\theta H_\phi) (r^2 \sin \theta d\theta d\phi) = \frac{2\pi}{\mu_0} \int_0^\pi r^2 E_\theta B_\phi \sin \theta d\theta$

$$(\hat{e}_r + \hat{e}_\theta) \times \hat{e}_\phi$$

- Note, porém, que não precisamos integrar sobre todos os termos de  $E_\theta$  e  $B_\phi$  já que, no final, quando fizermos  $r \rightarrow \infty$ , todos os termos que dependerem de  $r^{-n}$  anulam-se!

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

- Termos que **não se anulam** são os **proporcionais a  $1/r$**  em  $E_\theta$  e  $B_\phi$ , que compõe o "**Campo de Radiação**".

- Desta forma:

$$\begin{aligned} \oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA &= \left( \frac{2\pi}{\mu_0} \right) \int_0^\pi \left( \frac{\ell I_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \right) \frac{\omega}{c^2} \cos \omega(t-r/c) \cdot \frac{\mu_0 \ell I_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\omega}{c} \cos \omega(t-r/c) \cancel{r^2} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{\mu_0} \frac{\ell I_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left( \frac{\cancel{\mu_0} \ell I_0 \omega \cos^2 \omega(t-r/c)}{\cancel{4\pi} c} \right) \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ & \quad \left( = \frac{4}{3} \right) \text{ ver apêndice} \end{aligned}$$

- Assim:

$$\oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \frac{(I_0 \ell \omega)^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega(t-r/c) \equiv \text{Potência Instantânea Irradiada na Aproximação de Dipolo.}$$

- Cálculo da **Potência Média**:  $\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 \ell^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^2 \overbrace{Q_0^2 \ell^2}^{=(p_0)^2} \omega^2 \pi}{34\pi^2 c^2 c \epsilon_0} = \lambda^{-2} \rightarrow \lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{2\pi f} = \frac{2\pi c}{\omega}$

- De forma que: ( $\times e \div por 2$ )  $\Rightarrow \bar{P} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \frac{I_0^2}{2}; \left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}\right)$

- Como sabemos, uma resistência com corrente  $I_0 \cos \omega t$  dissipa energia a uma taxa média:

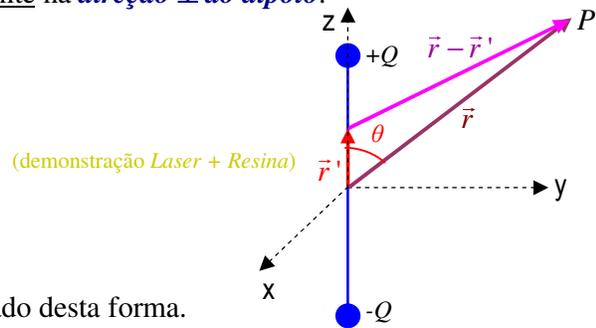
$$\bar{P}_{dissipada} = RI^2 = RI_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} RI_0^2$$

- Comparando este resultado com o anterior, podemos então definir para a **antena-dipolo** uma "**Resistência de Radiação**":

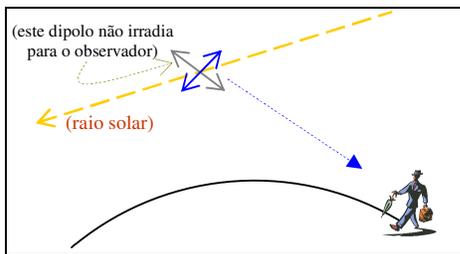
$$R_r^{dip.} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \text{ Ohms} \rightarrow \text{no espaço livre; em meios dielétricos é só substituir } \mu_0, \epsilon_0 \rightarrow \mu, \epsilon.$$

- Finalmente, pegando os campos de radiação, mostre que  $\bar{S} = \frac{1}{\mu_0} \overline{E_\theta B_\phi} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{e}_r$

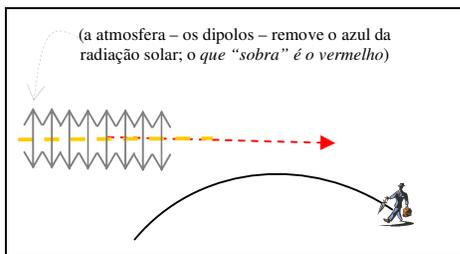
- Ou seja, a energia é irradiada mais intensamente na **direção  $\perp$  ao dipolo**.



- A cor azul/alaranjada do céu pode ser explicado desta forma.



∴ a luz que chega ao observador é **azul** porque  $\omega^4$  pronuncia a absorção e re-emissão de luz nesta frequência alta.



Pôr-do-Sol

## APÊNDICES

### Apêndice (1)

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

- *Componente x*, por exemplo: (da 3ª equação de Maxwell):

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x \Rightarrow \text{integrando em } z:$$

$$E_y = -\int i\mu_0\omega H_x dz ; \underline{H_x \propto e^{i\left(\frac{2\pi z}{\lambda_g} - \omega t\right)}} \quad \longrightarrow \quad \text{Substituindo } H_x \text{ na integral, após a integração o que sobra fornece } H_x \text{ novamente!}$$

$$\therefore E_y = -i^2 \mu_0 \omega K \frac{2\pi}{\lambda_g} \underbrace{cte e^{i(\dots)}}_{=H_x} \Rightarrow \boxed{E_y = +\mu_0 \omega \frac{\lambda_g}{2\pi} H_x}$$

$cte \times e^{i(\dots)}$

### Apêndice (2)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 ; H_z = cte e^{i\frac{2\pi z}{\lambda_g}} e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial z} = cte i \frac{2\pi}{\lambda_g} e^{i\frac{2\pi z}{\lambda_g}} e^{-i\omega t} = i \frac{2\pi}{\lambda_g} H_z \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = i^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 H_z^2 = - \left( \frac{2\pi}{\lambda_g} \right)^2 H_z^2 \end{cases}$$

$$\text{Igualmente: } \frac{\partial H_z}{\partial t} = -i\omega H_z \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = +\omega^2 H_z^2}$$

### Apêndice (3)

$$\text{Da equação (6): } \frac{\lambda_g}{2\pi i} \frac{\partial H_z}{\partial y} - H_y + \cancel{i} \epsilon_0 \omega \cdot \frac{\lambda_g}{2\pi \cancel{i}} E_x = 0 \Rightarrow \text{usando equação (4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_g}{2\pi i} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi E_x}{\mu_0 \omega \lambda_g} + \frac{\epsilon_0 \omega \lambda_g}{2\pi} E_x = 0 \Rightarrow (\times \mu_0 \omega i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 \omega \cancel{i} \lambda_g}{2\pi \cancel{i}} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{2\pi \cancel{\mu_0} \omega i}{\cancel{\mu_0} \omega \lambda_g} E_x - \frac{\epsilon_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \mu_0 \omega i E_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{2\pi i}{\lambda_g} - \frac{i\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right) E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \frac{\partial H_z}{\partial y} \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left( \frac{2\pi i}{\lambda_g} - \frac{i\epsilon_0 \mu_0 \omega^2}{2\pi} \lambda_g \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y}}$$

### Apêndice (4)

$$\varphi = \frac{\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overset{=z}{\cancel{\cos\theta}}}{r^2} \left( \frac{Q_0 \cos \omega(t-r/c)}{r} + \frac{I_0 \sin \omega(t-r/c)}{c} \right) =$$

$$= \frac{\ell \cos \theta Q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cos \omega(t-r/c) + \frac{\ell \cos \theta I_0}{4\pi \epsilon_0 c r} \sin \omega(t-r/c)$$

$\stackrel{=cteM}{\text{}} \quad \quad \quad \stackrel{=cteN}{\text{}}$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial r} = M \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \frac{(-2)}{r^3} + \frac{M}{r^2} (-) \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \left( -\frac{\omega}{c} \right) +$$

$$+ N \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \left( -\frac{1}{r^2} \right) + \frac{N}{r} \cancel{\cos \omega} \left( t - \frac{r}{c} \right) \left( -\frac{\omega}{c} \right)$$

já que  $\frac{N\omega}{c} = \frac{\ell \omega \cos \theta I_0}{4\pi \epsilon_0 c^2}$

$$\frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{-\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \cancel{\cos \theta} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \omega$$

• Portanto:  $E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = +\frac{2\ell \cos \theta Q_0}{(4\pi \epsilon_0)(r^3)} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) -$

$$-\frac{\ell \cos \theta \overset{=I_0}{Q_0 \omega}}{4\pi \epsilon_0 c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\ell \cos \theta I_0}{4\pi \epsilon_0 c r^2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

*são iguais!*

### Apêndice (5)

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$= -\cos \theta \Big|_0^\pi = 1+1=2$     faça:  $\cos \theta = \xi \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = -\sin \theta$

$$\therefore \int_0^\pi \sin^3 \theta = 2 - \int_{li} \cancel{\sin \theta} \xi^2 (-) \frac{\partial \xi}{\sin \theta} = 2 + \frac{\xi^3}{3} \Big|_{li} = 2 + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$