Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

21 aula - 29mai/2007

- Iniciamos o estudo da ***Emissão de Radiação Eletromagnética***.
- Inicialmente, calculando os potenciais φ e $\vec{A}$ para o *Dipolo Elétrico oscilante*, obtivemos:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0 \ell}{4\pi r} I\left(t - r/c\right) \\ \varphi(\vec{r},t) = \dfrac{\ell r\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\dfrac{Q\left(t - r/c\right)}{r} + \dfrac{I\left(t - r/c\right)}{c}\right] \end{cases}$$

na Aproximação do Dipolo e supondo a corrente no 'fio' como sendo a mesma em qualquer ponto

- Supondo $Q_{dip.} = Q_0 \cos\omega\left(t - r/c\right)$ e $I_{dip.} = -\underbrace{\omega Q_0}_{=I_0} \sin\omega\left(t - r/c\right)$; e usando também que

($\vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$) $\Rightarrow$ as componentes dos campos então foram obtidas:

$$\begin{cases} B_\phi = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\ell I_0}{r}\sin\theta\left[\dfrac{\omega}{c}\cos\omega\left(t - \dfrac{r}{c}\right) + \dfrac{1}{r}\sin\omega\left(t - r/c\right)\right] \\ E_r = \dfrac{2\ell I_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\sin\omega\left(t - r/c\right)}{cr^2} - \dfrac{\cos\omega\left(t - r/c\right)}{\omega r^3}\right] \\ E_\theta = \dfrac{-\ell I_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\dfrac{1}{\omega r^3} - \dfrac{\omega}{rc^2}\right)\cos\omega\left(t - r/c\right) - \dfrac{1}{r^2 c}\sin\omega\left(t - r/c\right)\right] \end{cases}$$

- Em seguida foi calculado o ***fluxo*** de $\vec{S}$ *através de uma casca esférica* com raio $r \to \infty$:

$$\oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA = \left(E_\theta H_\phi\right)\left(r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\right) \Rightarrow$$ (considerando apenas o *Campo de Radiação*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{(I_0\ell\omega)^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cos^2\omega\left(t - r/c\right)} \equiv$$ "***Potência Instantânea Irradiada***"

na "Aproximação de Dipolo"

- Quanto à ***Potência Média*** irradiada: $\boxed{\bar{P} = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\dfrac{\ell}{\lambda}\right)^2\dfrac{I_0^2}{2}}$; $\left(c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$

- Finalmente, efetuamos o cálculo da "Resistência de Radiação" para o dipolo elétrico:

$$\boxed{R_{rad.}^{dip.} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 789\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 Ohm}$$ (no espaço livre)

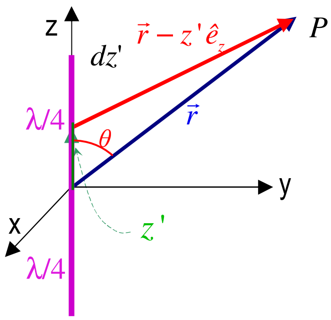
“Antenas de meia-onda”

- Trata-se de um modelo mais apropriado (que o dipolo elétrico) para descrever as ondas *EM* emitidas pelas antenas de Rádio-TV, por exemplo.

- A idéia é considerar correntes oscilando em um **fio** de antena com **comprimento** **λ/2** (**λ** - da onda emitida), de forma que:

esta condição permite o cálculo das integrais do problema!

$$\boxed{I(z',t) = I_0 \sin \omega t \cdot \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)}$$



este termo é para anular a corrente nas extremidades do fio:

$\cos \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = 0$

- Nesta situação certamente *não podemos* mais considerar a corrente como sendo *a mesma* em qualquer ponto do fio, em um instante ***t***.

- No entanto, se *dividirmos o fio* em elementos ***dz’***, localizados em ***z’***, então nestes comprimentos *dz’*, a *corrente é constante*, de forma que os resultados anteriores continuam válidos!

- Assim, a contribuição do elemento *dz’* para a *componente θ* do campo elétrico, de acordo com resultado da aula anterior, considerando apenas o “*campo de radiação*”:

$$dE_\theta = \frac{I_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega}{Rc^2}\cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)dz'$$

sendo $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - z'\cos\theta \equiv$

$\equiv$ distância de *dz’* ao ponto *P* (ver aula passada).

- Da mesma forma:

$$dB_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_0\omega}{Rc}\sin\theta\,\cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z'\right)dz'\ ;$$

- Nos denominadores, na “***aproximação de dipolo***” (***r >> z’***) ⇒ ***R ~ r*** (como feito antes).

- Então, para obtermos E_θ e B_ϕ da antena, temos que integrar as equações em *z’*, ou seja, a *integração se fará sobre as coordenadas linha*.

- Isto resume-se basicamente, em calcularmos a integral:

já considerou-se a aproximação de $I \approx cte$ ao assumirmos as expressões de E_θ e B_ϕ anteriores

$$\xi = \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} \cos\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z'\right)dz'\ ;\ \boxed{R = r - z'\cos\theta}$$

- Vamos chamar $\frac{2\pi}{\lambda}z' = u \Rightarrow \frac{du}{dz'} = \frac{\lambda}{2\pi} \Rightarrow\ dz' = \frac{\lambda}{2\pi}du\,;$

de forma que, quando: $\begin{cases} z = -\lambda/4 \Rightarrow u = -\pi/2 \\ z = +\lambda/4 \Rightarrow u = +\pi/2 \end{cases}$

- Assim: $\xi = \dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos\omega\left(t-\frac{r-z'\cos\theta}{c}\right)}_{\displaystyle \cos\left(\omega t-\frac{\omega r}{c}+\frac{\omega z'\cos\theta}{c}\right)=\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\underbrace{\frac{2\pi \cancel{c}}{\lambda}\frac{z'\cos\theta}{\cancel{c}}}_{=u\cos\theta}\right]} \cos u\, du$

- Ou seja: $\xi = \dfrac{\lambda}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+u\cos\theta\right]\cos u\, du$

- Usando que: $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\lambda}{2\pi}\left\{\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\left(u\underbrace{\cos\theta}_{\equiv\, cte\ a}\right)\cos u\, du-\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\left(u\underbrace{\cos\theta}_{\equiv\, cte\ a}\right)\cos u\, du\right\}$$

(para um dado ponto P)

- Quanto à primeira integral, lembrando que:

$$\begin{cases}\cos(au+u)=\cos au+\cos u-\cancel{\sin au}\,\sin u\\ \cos(au-u)=\cos au+\cos u+\cancel{\sin au}\,\sin u\end{cases} \quad \text{somando} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos au\ \cos u=\frac{1}{2}\left[\cos(a+1)u+\cos(a-1)u\right];\ \text{de forma que:}$$

(1ª integral)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos au\cos u\, du=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(a+1)u\, du+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(a-1)u\, du\right\}$$

- Sendo o cosseno uma *função PAR* $\Rightarrow$ posso fazer: $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\int_{0}^{\pi/2}$

- Chamando $(a\pm1)u=\eta \Rightarrow \dfrac{d\eta}{du}=(a\pm1) \Rightarrow du=\dfrac{1}{\pm1}d\eta \Rightarrow$ as integrais acima ficam:

$$\frac{1}{2}\left\{2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\eta}{a+1}d\eta+2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\eta}{a-1}d\eta\right\}=\frac{1}{a+1}\sin(a+1)u\Big|_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{a-1}\sin(a-1)u\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

=0 =0

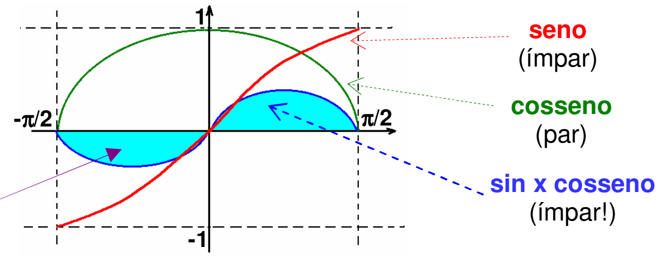
$$=\frac{1}{a+1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{2}\right)}_{=-\cos\frac{\pi}{2}a}+\frac{1}{a-1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}a-\frac{\pi}{2}\right)}_{=+\cos\frac{\pi}{2}a}=\left(-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}\right)\cos\frac{\pi}{a}=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)\frac{-\cancel{a}+1+\cancel{a}+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{a^2-1^2}\cos\frac{\pi}{2}a = \text{(substituindo } \boldsymbol{a} \text{ por } \boldsymbol{\cos\theta}\text{)} =$$

$$=\frac{2}{\cos^2\theta-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) = \frac{2}{\sin^2\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

- Agora, quanto à 2ª integral, se percebermos que o integrando corresponde a uma função PAR × função ÍMPAR = função ÍMPAR $\Rightarrow$ podemos afirmar de imediato que *o valor da integral é zero*, sem precisar fazer todas as contas:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{função impar} = 0 \rightarrow$$



- Portanto: $\xi = \dfrac{\lambda}{2\pi}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{2}{\sin^2\theta}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)$, de forma que: (substituindo - ver apêndice 2)

$$\begin{cases} E_\theta = \dfrac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 rc}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \\[2ex] B_\phi = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \end{cases}$$

- Assim: $\overline{P} = \overline{\oint \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA} = \oint \overline{\vec{S}}\cdot\hat{n}\,dA = \dfrac{I_0^2}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,d\theta \Rightarrow \boxed{\vec{P} = 73{,}1\dfrac{I_0^2}{2}}$

$dA = r^2\sin\theta d\theta d\phi \Rightarrow$ $\Rightarrow dA = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$

pois integral é sobre coordenadas espaciais e o valor médio sobre a coordenada do tempo.

resolvida somente através de uma série infinita - ver Tabela de Integrais!

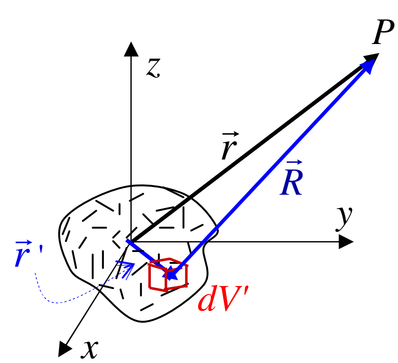
Resistência de Radiação

- Vejamos agora a ***radiação devido a uma Distribuição Arbitrária de Cargas em movimento***.

- Estaremos sempre considerando cargas (correntes)

$\Downarrow$

restritas a um pequeno volume em torno da origem



- Calculando o ***Potencial Escalar Retardado***:
  (considerando os elementos de volume dV')

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}\,',\, t-R/c\right)}{R}\,dV' \;;\; \boxed{R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}}$$

- Novamente, vamos utilizar a "*Aproximação de Dipolo*" ($r >> r'$), de forma que:

$$\boxed{R \approx r\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)} \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{r\left(1+\dfrac{\cancel{r_1'^2}-2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{r^2}\right)}}$$

e aplico $(1\pm x)^n = 1 \pm nx$

- Por outro lado, $\rho\left(\vec{r}\,',\, t-\dfrac{R}{c}\right)$ pode ser definido (substituindo R):

$$\rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right)$$

- Agora, como $\boxed{\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}}$ é muito pequeno (<u>*cargas estão próximas da origem*</u>) $\Rightarrow$ posso <u>expandir</u> ρ em *Série de Taylor* <u>**no tempo**</u> (em torno de $t_0 = t-\dfrac{r}{c}$) (ver apêndice (3)

$$\rho\left(\vec{r}\,', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{=\, t_0}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}\right) = \rho\left(\vec{r}\,', \underbrace{t-\frac{r}{c}}_{=\, t_0}\right)+\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{r',\,t-\frac{r}{c}} + \,\ldots$$

- Assim: $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\left[\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}\frac{\partial\rho}{\partial t}\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)\right]\underbrace{\left[\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]}_{=1/R}dV' =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int\frac{1}{r}\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'+\int\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^3}\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'+\int\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV'+\underbrace{\int\frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^2}{cr^4}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV'}_{=\,\mathbf{0};\ \text{muito pequeno (em } r'/r)}\right\} =$$

a integração é sobre coordenada linha!

- Então: $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\displaystyle\int\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}\cdot\int\vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'+$

(as duas integrais são iguais!)

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'$$

- Note que a 1ª integral ≡ ***Carga Total da Distribuição***; que é uma constante independente do tempo, já que a carga é conservada!

- A integral nos dois termos restantes ≡ ***Expressão Geral para o Cálculo do Momento de Dipolo Elétrico*** $(\vec{p})$ no Instante $t_0 = t-\dfrac{r}{c}$ ($\rightarrow$ rever *Eletromagnetismo I – expansão multipolar*) devido a uma dada distribuição de cargas.

- Se na expansão de Taylor acima, tivéssemos ido adiante, na <u>expressão do potencial</u> φ acabaria surgindo o termo correspondente ao *Quadrupolo Elétrico*, e assim por diante.

- Então, mantendo os termos até o <u>***dipolo***</u>:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{\hat{e}_r\cdot\vec{p}(t_0)}{r^2}+\frac{\hat{e}_r\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{r\,c}\right]};\ \text{sendo}\ \boxed{\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

trata-se da derivada total, pois, para um dado P, r é *cte*: $t_0 = t-\dfrac{r}{c} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t}\rightarrow\dfrac{d}{dt}$

- Note que, no <u>*caso estático*</u>, ***3º termo não existe***, e a expressão do potencial dada pelos termos de monopolo e dipolo elétrico, para uma distribuição de cargas, corresponde à já calculada em Eletromagnetismo I.

- Um outro aspecto interessante é que, agora, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{P})$ é dado por $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{t_0}$; $\boxed{t_0 = t - \frac{r}{c}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ deslocando as cargas (próximas à origem), demorará um certo tempo para a configuração de campos/potenciais se restabelecerem (veremos isto em detalhes em ~ duas aulas).

- Por outro lado, o ***Potencial Vetor Retardado***:

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t - R/c\right)}{R} dV' = \text{(desenvolvendo como feito acima)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)}{r} dV' + \cancel{\text{+ termos de ordens superiores}}$$

não tem linha!
∴ sai da integral.

~~que vou desprezar~~!

- Agora, usando que $\boxed{\int \vec{J}\, dV = \frac{d\vec{p}}{dt}}$; sendo $\boxed{\vec{p} = \int \vec{r}\,\rho\, dV}$: ***Momento de Dipolo Elétrico** para uma distribuição de cargas/correntes*

(*ver exercício 7ª Lista*)

- Então: $\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$; lembrando que $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{d\underbrace{(t-\frac{r}{c})}_{=t_0}}$, já que $\boxed{\frac{d\,t_0}{dt} = 1}$

(tempo retardado)

- Note, agora, que esta expressão de $\vec{A}$ acima tem a mesma ordem de grandeza (em $\dot{\vec{p}}$) que o 3º termo de φ; ficando assim justificado termos desprezado termos de maior ordem na determinação de $\vec{A}(\vec{r},t)$.

- Tendo-se obtido $\varphi(\vec{r}\,',t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$, estamos agora em condições de calcular os ***campos de radiação*** $\vec{E}$ e $\vec{B}$ correspondentes, usando:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \quad ; \quad \boxed{\vec{B} = \nabla\times\vec{A}}$$

- Faremos isso na próxima aula.

APÊNDICES

Apêndice (1)

i) $\bar{P} = \frac{(Q_0\omega)^2\,\ell^2\omega^2}{3.4\pi^2\varepsilon_0 c^3}.\pi = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}\,\frac{p_0^2\omega^2}{3\varepsilon_0 c}$; $\quad (Q_0\omega)^2\ell^2\omega^2 = p_0^2$

sendo que $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2}}$

ii) $\bar{P} = \frac{I_0^2\ell^2\omega^2}{3.4\pi^2c^2\varepsilon_0 c}.\pi = \pi\frac{I_0^2\ell^2}{3\varepsilon_0}\frac{\overbrace{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}^{(=1/c)}}{\lambda^2} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2\frac{I_0^2}{2}$; $\quad \frac{\omega^2}{4\pi^2c^2} = 1/\lambda^2$

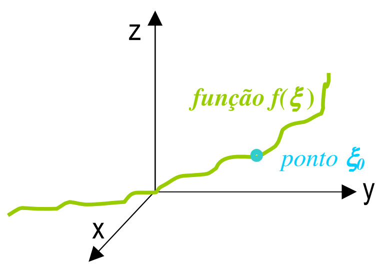
Apêndice (2)

$$= \omega\frac{2\pi}{K} = \cancel{\omega}\, 2\pi\,\frac{c}{\cancel{\omega}} = \cancel{2\pi}c$$

$$E_\theta = \frac{I_0 \cancel{\sin\theta}}{{}_{2}\cancel{4}\pi\,\varepsilon_0 c^{\cancel{2}}}\,\frac{\omega\lambda}{2\pi r}\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\cancel{2}}{\sin^{\cancel{2}}\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

Apêndice (3)

Taylor



- Função $f(\xi)$ em pontos próximos de ξ_0 (de forma que $\Delta\xi$ seja pequeno), será dada pelo valor da função em ξ_0, mais um incremento.
- Para calcular este incremento, eu verifico como a função $f(\xi)$ está variando (*taxa de variação*) naquela região, em torno de $\xi=\xi_0$ (eu faço isso calculando a derivada de $f(\xi)$. Depois eu multiplico pelo intervalo infinitesimal considerado, ou seja, faço: $(\xi-\xi_0)\,.\,\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$

- Em termos algébricos (supondo $\breve{t} \equiv$ ponto(s) próximo(s) de t_0) sendo que, no nosso caso:

$$\begin{cases} \breve{t} = \left(t - \dfrac{r}{c} + \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \\ t_0 = \left(t-\dfrac{r}{c}\right)\end{cases} \quad ;\text{ onde } \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) \equiv \text{incremento (muito pequeno)}$$

- Expansão de Taylor: $f(\breve{t})_{\text{em torno de } t_0} = f(t_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial \breve{t}}\right)_{\breve{t}=t_0}(\breve{t}-t_0) + \ldots$

- Então: $$\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}\right) = \rho\left(\vec{r}\,',\underbrace{t-\frac{r}{c}}_{=t_0}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \breve{t}}\right)_{\breve{t}=t_0}\left(\cancel{t}-\cancel{\frac{r}{c}}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{cr}-\cancel{t}+\cancel{\frac{r}{c}}\right)$$

- Mas: $\dfrac{\partial f}{\partial \breve{t}} = \dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial \breve{t}}$; $\dfrac{\partial \breve{t}}{\partial t} = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial \breve{t}} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

$$\therefore\; \rho\left(\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right) = \rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\vec{r}\,',\,t-\frac{r}{c}}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{c\,r}\right)$$ ✓