INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade de São Paulo

Eletromagnetismo II

Aula 22

Professor Alvaro Vannucci

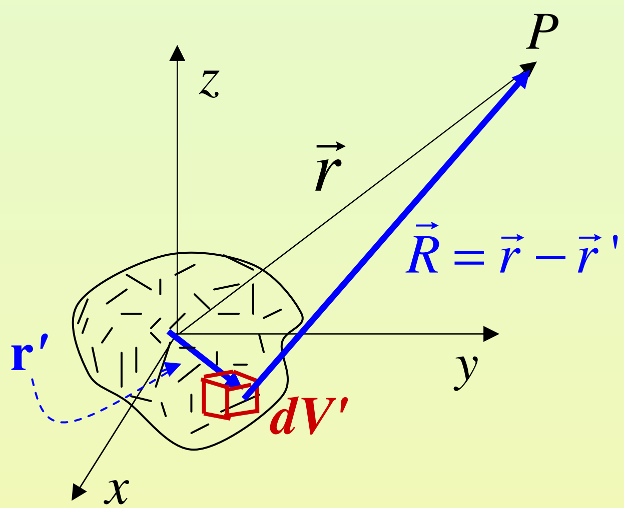
Na última aula vimos ...

- Antenas de ***meia-onda*** ($\ell=\lambda/2$): $I\left(z',t\right)=I_0\ \sin\omega t\ \ \cos\left(\dfrac{2\pi z'}{\lambda}\right)$

- *Campos de Radiação*: $\begin{cases} \boxed{E_\theta=\dfrac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 rc}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\cos\left(\pi/_2\cos\theta\right)}{\sin\theta}} \\ \boxed{B_\phi=\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\cos\left(\pi/_2\cos\theta\right)}{\sin\theta}} \end{cases}$

- De forma que: $\overline{P}=\dfrac{I_0^2}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^\pi\dfrac{\cos^2\left(\pi/_2\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta=73{,}1\dfrac{I_0^2}{2}$

- Vimos també que, para uma ***distribuição arbitrária* de cargas em movimento**, ***em torno da origem***:



$$\begin{cases} \boxed{\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{Q}{r}+\dfrac{\hat{e}_r\cdot\vec{p}(t_0)}{r^2}+\dfrac{\hat{e}_r\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right]} \\ \boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\vec{p}}\underbrace{\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}_{\shortparallel\; t_0}} \end{cases}$$

- Onde $\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\int \vec{r}\,'\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{r}{c}\right)dV'\equiv$ *momento de dipolo elétrico*

- Calcularemos agora os campos de radiação $\vec{E}$ e $\vec{B}$ correspondentes:

$$\begin{cases} \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}} \\ \boxed{\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \end{cases}$$

- Faremos isso retendo os *termos proporcionais* a **1/r** (campos de radiação)
- Calculando $\vec{E}$ primeiro, *para um dado ponto P*:

$$\left\{ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right\}$$

$$i)\quad \boxed{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\vec{p}}(t_0)};\; t_0 = t - \frac{r}{c}$$

= 0 (φ não depende de ϕ)

$$ii)\quad (\nabla\varphi)_{\substack{coord.\\ esf.}} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}}\hat{e}_\phi$$

$$\left\{ \varphi(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r\cdot\vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right] \right\}$$

- Observando, por exemplo, que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}$ envolve o cálculo:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\hat{e}_r\cdot\dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right] = \frac{\hat{e}_r}{rc}\cdot\frac{\partial\,\dot{\vec{p}}(t_0)}{\partial r} - \cancel{\dot{\vec{p}}(t_0)\cdot\frac{1}{r^2c}\hat{e}_r}$$

(na verdade, é o ***único termo*** que irá gerar campo de radiação!)

(termo α 1/r² não entra Campo de Radiação!)

- Agora: $\dfrac{\partial \dot{\vec{p}}(t_0)}{\partial r} = \dfrac{\partial \dot{\vec{p}}(t_0)}{\partial t_0} \underbrace{\dfrac{\partial t_0}{\partial r}}_{= -\frac{1}{c}} = -\dfrac{\ddot{\vec{p}}}{c} \quad \therefore \quad \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right] = \dfrac{\hat{e}_r}{rc} \cdot (-) \dfrac{\ddot{\vec{p}}}{c}$

$\left\{ t_0 = t - \dfrac{r}{c} \right\}$

- Por outro lado $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ envolve o cálculo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\dot{\vec{p}}(t_0)\cos\theta}{rc}\right] = -\frac{1}{cr^2}\sin\theta\,\dot{\vec{p}}(t_0)$$

não faz parte do “campo de radiação”

- Assim, <u>*mantendo-se somente os termos proporcionais*</u> a ***1/r***, <u>*após a derivação*</u> temos:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = +\overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}}{c^2 r}\hat{e}_r}^{\equiv -\nabla\varphi} - \overbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\ddot{\vec{p}}}^{\equiv -\partial\vec{A}/\partial t} \quad \Rightarrow$$

$= \mu_0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left\{\left[\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)\right]\hat{e}_r - \ddot{\vec{p}}(t_0)\right\}}$$

$\Downarrow$ verifique!

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\hat{e}_r \times \left(\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}\right)\right]}$$

- Quanto ao cálculo de $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$: $\left\{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right\}$

$$\left(\nabla \times \vec{A}\right)_{esf.} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right)} - \cancel{\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}}\right]\hat{e}_r + \frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right]\hat{e}_\theta +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\theta}}\right]\hat{e}_\phi =$$

<u>desprezo</u> *termos que não geram "campo de radiação"*

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)\hat{e}_\phi = \text{(derivando)} =$$

$$= \frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi \cancel{r}}\,\cancel{r}\,\dot{p}_\phi\right)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi \cancel{r}}\,\cancel{r}\,\dot{p}_\theta\right)\hat{e}_\phi$$

- Mas: $\underline{\underline{\dfrac{\partial\,\dot{p}_\phi}{\partial\,r}}} = \dfrac{\partial\,\dot{p}_\phi}{\partial\,t_0}\dfrac{\partial\,t_0}{\partial\,r} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{c}\,\ddot{p}_\phi}}$ $\left(t_0 = t - \dfrac{r}{c}\right)$, e igualmente:

$$\underline{\underline{\frac{\partial\,\dot{p}_\theta}{\partial\,r} = -\frac{1}{c}\,\ddot{p}_\theta}}$$

- Então: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -\dfrac{\mu_0}{4\pi rc}\left(-\ddot{\vec{p}}_\phi\hat{e}_\theta + \ddot{\vec{p}}_\theta\hat{e}_\phi\right) \Rightarrow$

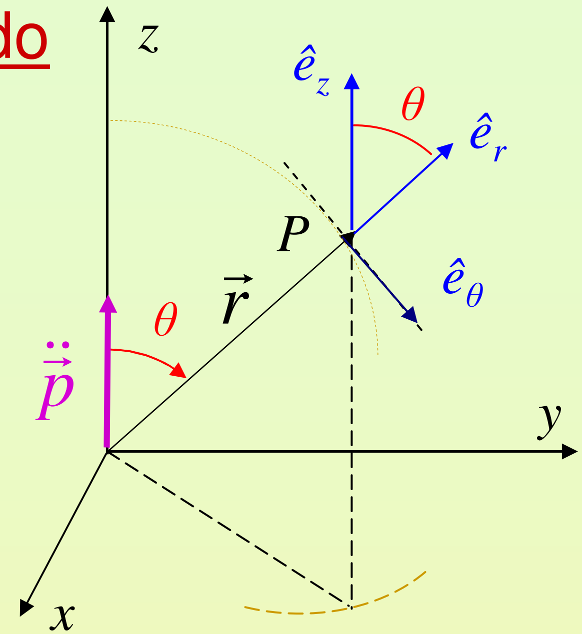
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi rc}\left[\hat{e}_r\times\ddot{\vec{p}}\left(t_0\right)\right]};$$

já que: $\hat{e}_r\times\ddot{\vec{p}} = \hat{e}_r\times\left(\ddot{p}_r\overset{=0}{\hat{e}_r} + \ddot{p}_\theta\overset{=\hat{e}_\phi}{\hat{e}_\theta} + \ddot{p}_\phi\overset{=-\hat{e}_\theta}{\hat{e}_\phi}\right)$

- Comparando: $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r}\left[\hat{e}_r\times\left(\hat{e}_r\times\ddot{\vec{p}}\right)\right]} \Rightarrow \vec{E} = -c\,\hat{e}_r\times\vec{B}$ $\boxed{\therefore\ \vec{E}\perp\vec{B}}$

- No ***caso particular*** do eixo ***z*** ser escolhido na direção de $\ddot{\vec{p}}\left(t_0\right)$ (coordenadas polares):

$$\left\{\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\left(\hat{e}_r\cdot\ddot{\vec{p}}\right)\hat{e}_r-\ddot{\vec{p}}\right]\right\}$$



- Na expressão de $\vec{E}$:

$$\hat{e}_r\cdot\ddot{\vec{p}}=\ddot{p}\left(\hat{e}_r\cdot\hat{e}_z\right)=\ddot{p}\cos\theta$$

- Enquanto que:

$$\ddot{\vec{p}}=\ddot{p}\,\hat{e}_z=\ddot{p}\left(\hat{e}_r\cos\theta-\hat{e}_\theta\sin\theta\right)=\ddot{p}\cos\theta\,\hat{e}_r-\ddot{p}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

- Assim (substituindo na expressão de $\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$):

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\left(\cancel{\ddot{\vec{p}}\cos\theta\,\hat{e}_r}\right)-\left(\cancel{\ddot{\vec{p}}\cos\theta\,\hat{e}_r}-\ddot{\vec{p}}\sin\theta\,\hat{e}_\theta\right)\right]$$

$$\therefore\quad\boxed{\vec{E}\left(r,\theta,t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\ddot{p}\left(t_0\right)\frac{\sin\theta}{r}\hat{e}_\theta}$$

- Quanto a $\vec{B}$: $\left\{ \vec{B} = -\dfrac{\mu_0}{4\pi rc}\left[\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}(t_0)\right] \right\}$; $\left(\ddot{\vec{p}} = \ddot{p}\,\hat{e}_z\right)$

  i) *Módulo* envolve $\left|\hat{e}_r \times \ddot{p}\,\hat{e}_z\right| = \ddot{p}\sin\theta$

  ii) *Direção* e *Sentido* envolve: $\hat{e}_r \times \hat{e}_z = -\hat{e}_\phi$

- Assim: $$\boxed{\vec{B} = (r,\theta,t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\ddot{p}(t_0)\,\frac{\sin\theta}{r}\,\hat{e}_\phi}$$

$$\left\{ \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\ddot{p}(t_0)\,\frac{\sin\theta}{r}\,\hat{e}_\theta \right\}$$

- Quanto ao *Vetor de Poynting*:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\underset{\hat{e}_\theta}{\vec{E}} \times \underset{\hat{e}_\phi}{\vec{B}}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left[\ddot{p}(t_0)\right]^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\hat{e}_r}$$

- Note que, novamente, *Emissão de Radiação* será *máxima a 90º* (com relação a $\ddot{\vec{p}}$)

(expressa a aceleração das cargas).

- Calculando agora a *Potência Total* irradiada, através de uma casca esférica de raio r (*campos calculados antes já são de radiação*):

$$P = \int \vec{S}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{\mu_0}{\cancel{16}^{\,8}\,\cancel{\pi^2}\,c}\,\ddot{p}^2 \cancel{\int_0^{2\pi} d\phi}\ \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta}_{=4/3}$$

sai da integral, pois não depende de θ !

$$\therefore \quad \boxed{P = \frac{\mu_0}{6\pi c}\,\ddot{p}^2(t_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}}$$

Exemplo 1: Considerando a distribuição de cargas ≡ ***Dipolo Elétrico Oscilante***: $p(t) = \underset{\substack{\parallel \\ q\,\ell}}{p_0} \cos\omega t$

- Então: $\ddot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos\omega t \Rightarrow$ resultado anteriormente obtido é recuperado!

verifiquem!

Exemplo 2: A distribuição de carga ≡ 1 única carga: $\vec{p}(t) = q\,\vec{s}(t)$; sendo $\vec{s}(t)$ a posição da carga em relação à origem do sistema de coordenada.

- Então: $\ddot{\vec{p}}(t) = q\,a(t)$; e a *Potência Irradiada*: $\left\{ P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \right\}$

$$\boxed{P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}}$$

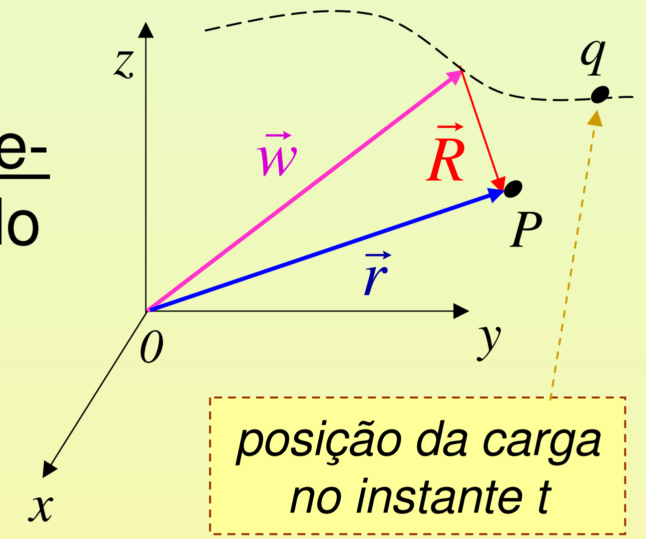
"***Fórmula de Larmor***"

(será obtida posteriormente de uma outra maneira.)

POTENCIAIS DE LIENARD-WIECHERT

• Vamos agora *generalizar* o problema de emissão de radiação calculando $\vec{E}$ e $\vec{B}$ produzidos no ponto *P* por *cargas pontuais* que possuem *trajetórias qualquer* (e não simplesmente oscilam em torno da origem).

• Vamos então supor carga *q* pontual, acele-rada, cuja posição, no tempo, é descrita pelo vetor posição $\vec{w}$ e vamos calcular os potenciais φ e $\vec{A}$ em P no instante t.



• Porém, nos cálculos, o tempo a ser utilizado é o ***tempo retarda-do*** (quando a carga encontrava-se na "*Posição Retardada*")

• De forma que: $\boxed{R = \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{r} - \vec{w}(t_r)\right| = c\left(t - t_r\right)}$

- Da expressão do potencial: $$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,dV\,'}$$

poderíamos ser "tentados a fazer", para a *carga "pontual"*,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$ ≡ *mesmo resultado do caso estático*; só usando

$R = w$ ≡ distância à posição retardada.

- Isto, porém, não seria totalmente correto, pois

$$\int \rho\left(\underset{\vec{w}}{\underset{\equiv}{\vec{r}}}\,',\, t_r\right) dV\,'$$

não corresponde exatamente à carga da partícula!

- A razão é que, com o **movimento da carga** (principalmente a altas velocidades), a "***região do volume***" da carga não é mais precisamente definida!

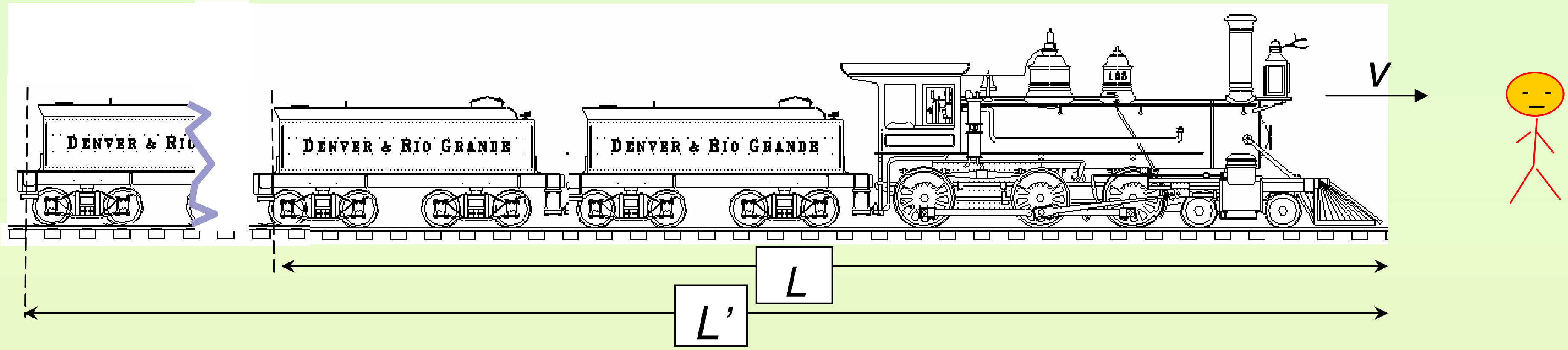
- Na verdade, para uma distribuição concentrada de cargas que se movem, temos:

$$\int \rho\left(\vec{w}, t_r\right) dV' = q\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)^{-1} \quad ; \quad \hat{e}_R = \vec{R}/R$$

- Vamos agora mostrar isso:

- Por exemplo, ao observarmos um trem aproximando-se com velocidade ***v***, estamos recebendo **simultaneamente** luz proveniente **de todas as partes** do trem.

- Mas, para que isto aconteça, a luz do final do trem deve ser enviada um pouco antes que a da dianteira, quando o trem encontrava-se em uma posição anterior, um pouco mais distante!



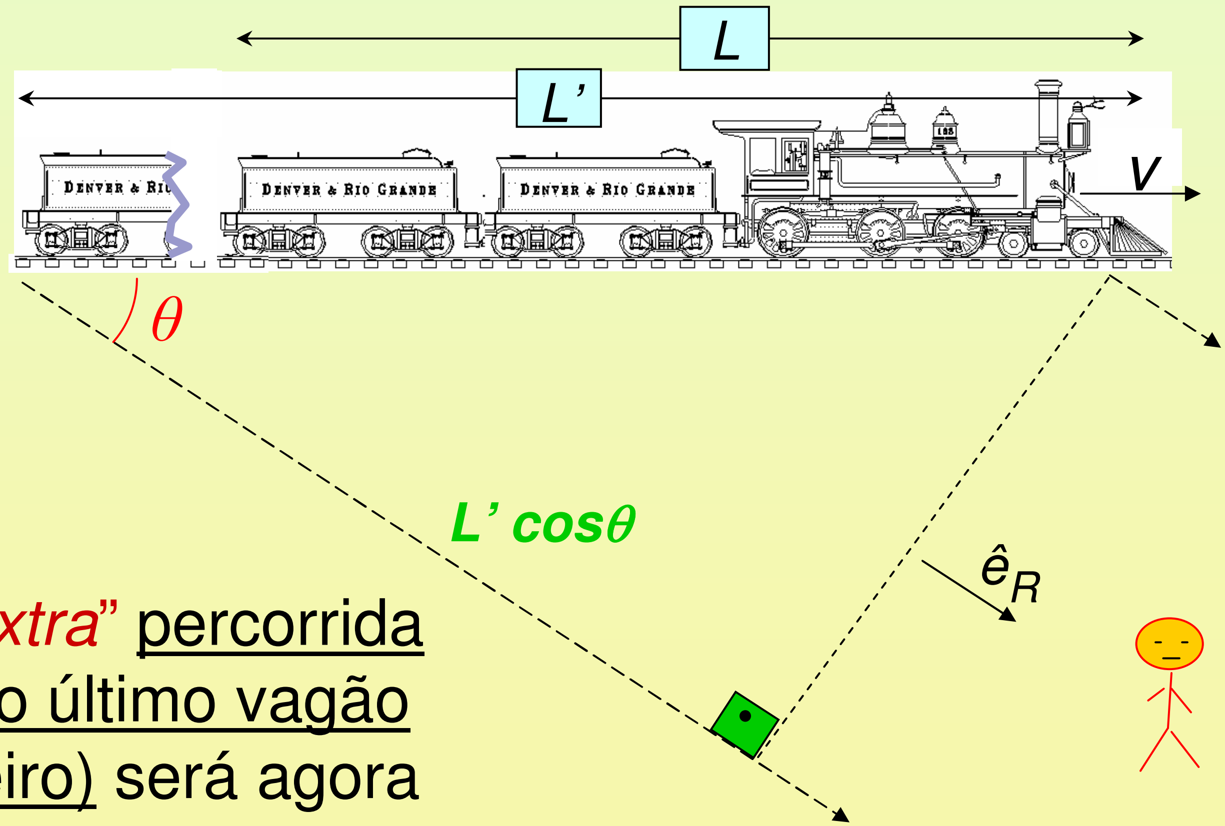
- Da figura, vemos que o tempo que a luz do final do último vagão leva pra atingir a frente da locomotiva (*e, a partir daí, os 2 raios seguem juntos até o observador*), percorrendo a distância *L'*, é o mesmo tempo que o trem leva para percorrer distância *L'*-*L* (em módulo), com velocidade *v*

- Ou seja: $\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v} \Rightarrow L'v - L'c = -Lc \Rightarrow \boxed{L' = \frac{-Lc}{v - c} = \frac{+L}{1 - v/c}}$

- De forma que o trem, aproximando-se, *apresenta-se mais comprido* do que ele realmente é; enquanto que, afastando-se, apresenta-se mais curto, pelo mesmo fator. Note: isto nada tem a ver com a contração de Lorentz! É apenas um modelo físico!

- Note também que as ***dimensões perpendiculares*** à direção de movimento ***não são afetadas*** $\Rightarrow$ altura e largura do trem permanecem as mesmas (com o trem parado ou em movimento).

- Porém, caso o observador não esteja situado na direção de movimento do trem, *mas deslocado de θ* :



- Então a "*distância extra*" percorrida pela luz proveniente do último vagão (com relação ao primeiro) será agora **$L'\cos\theta$** .

- Como no **tempo** $\left(\frac{L'\cos\theta}{c}\right)$ o trem desloca-se ***L - L'***, com velocidade de *v:*

$$\frac{L'\cos\theta}{c}=\frac{L'-L}{v} \quad\Rightarrow\quad L'=\frac{L}{1-\frac{v\cos\theta}{c}} \;;\; ou \quad \boxed{L'=\frac{L}{1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}}}$$

- De forma que, no cálculo do "*volume do trem*":

(largura × altura × comprimento)

"volume aparente" $\begin{cases} V'=L'A \\ V=LA \end{cases}$ volume real $\Rightarrow \frac{V'}{L'}=\frac{V}{L} \Rightarrow \boxed{V'=\frac{V}{\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)}}$

- Retornando ao problema de ***carga "pontual" em movimento***:

$$\int\rho\left(\underset{\underset{\vec{w}}{\equiv}}{\vec{r}\,'},t_r\right)dV'=\frac{q}{\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)}$$

c.q.d.

- Assim, o *Potencial Escalar* pode ser escrito:

$$\boxed{\varphi_{\text{carga pontual}} = \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\left(1-\dfrac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)}}$$

- Sendo que: $\begin{cases} \vec{v} \equiv \text{velocidade da carga no tempo retardado.} \\ \hat{e}_R \equiv \text{versor relacionado com a posição (retardada) da carga ao observador.} \end{cases}$

- Da mesma forma, lembrando que a ***densidade de corrente***

$$\vec{J} = \rho\vec{v} \Rightarrow \vec{J}(t_r) = \rho(t_r)\vec{v}(t_r)$$

velocidade e densidade no tempo retardado

$$\therefore\ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\rho\left(\overset{/\!/\ \vec{w}}{\vec{r}\,'},t_r\right)\vec{v}(t_r)}{R}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{v}}{R}\right)\int\rho(\vec{w},t_r)\,dV' \Rightarrow$$

não depende das coordenadas linha

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{R\left(1-\dfrac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi(\vec{r},t)}$$

- Estas equações de $\vec{A}$ e φ representam os "Potenciais de Lienard-Wiechert" para ***cargas pontuais***.

- O passo seguinte, é calcular os campos a partir dos potenciais:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$$

- Efetuando as derivações correspondentes (ver folhas extras):

$$\left(BAC - CAB\right) = \vec{u}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right) - \vec{a}\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)$$

$$\begin{cases} \boxed{\vec{E}\left(\vec{r},t\right) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R}{\left(\vec{u}\cdot\vec{R}\right)^3}\left[\left(c^2 - v^2\right)\vec{u} + \vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]} \\ \boxed{\vec{B}\left(\vec{r},t\right) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\left(\vec{u}\cdot\vec{R}\right)^3}\vec{R}\times\left[\vec{v}\left(c^2 - v^2\right) + \vec{v}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right) + \vec{a}\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)\right]} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v}}$$

- Comparando estas expressões de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ vemos que elas são muito semelhantes, a não ser pelos v's em vez dos u's.

- Note que, quando forem realizados os produtos $\vec{R}\times(escalar)\vec{v}$ na eq. de $\vec{B}$, podemos substituir $\vec{v}$ por $-\vec{u}$, pois:

$$\vec{R}\times(esc)(-\vec{u})=(esc)\left[\vec{R}\times\left(\vec{v}-\frac{c\vec{R}}{R}\right)\right]=(esc)\left(\vec{R}\times\vec{v}\right)$$

=0

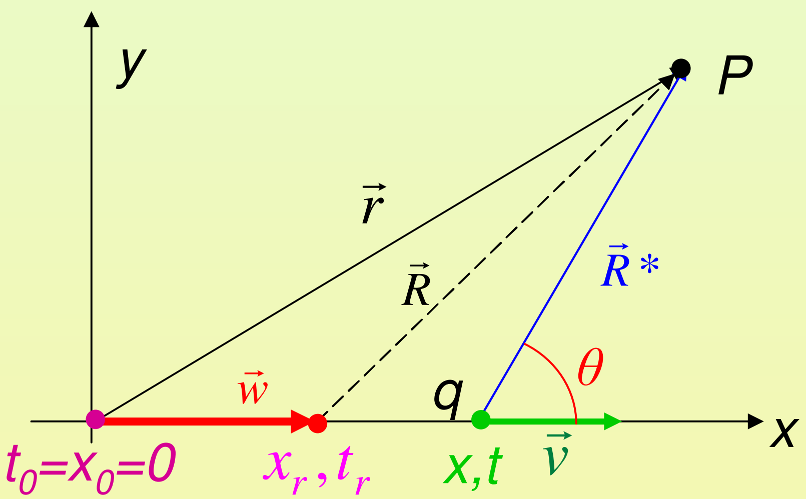
- Desta forma, temos: $\boxed{\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}}$

- Ou seja, o campo magnético $\vec{B}$ de uma carga pontual <u>será $\perp$</u> a $\vec{E}$ e <u>também ao *Vetor que liga o ponto P à posição retardada*</u>.

- Estes últimos resultados são gerais, ou seja, referem-se a <u>cargas pontuais</u>, com <u>movimento qualquer</u>.

- Vamos inicialmente estudar o caso particular de uma carga pontual em *Mov. Retilíneo Uniforme* (*velocidade constante*).

- Por conveniência, vamos supor que a *carga passa pela origem do sistema de coordenadas em $t=0$*.



- Novamente, a *posição* da partícula no *tempo retardado* é determinada por

$$\vec{w} = \vec{w}(t_r) = \vec{v}\, t_r$$

- Então, para obtermos os potenciais em P no instante t, devemos considerar a posição e o tempo retardados (x_r, t_r) e avaliar o termo:

$$\boxed{R\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)}$$

- Sendo que: $\begin{cases} R = c\left(t - t_r\right) \\ \hat{e}_R = \vec{R}/R \\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{w}\left(t_r\right) \end{cases}$ $\left\{ R\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right) \right\}$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{R\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi\left(\vec{r}, t\right)$$

- Agora, $\boxed{w\left(t_r\right) = v\,t_r}$ e $\boxed{R = c\left(t - t_r\right) = \left|\vec{r} - \vec{v}\,t_r\right|}$

- Elevando ao quadrado esta última igualdade:

$$r^2 + v^2 t_r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}\, t_r = c^2 \left(t^2 + t_r^2 - 2\,t\,t_r\right) \equiv$$ equação do 2º grau em t_r

- Resolvendo (ex. lista 7):

$$t_r = \frac{\left(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}\right) \pm \sqrt{\left(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}\right)^2 + \left(c^2 - v^2\right)\left(r^2 - c^2 t^2\right)}}{\left(c^2 - v^2\right)}$$

para definir o sinal mais apropriado, lembrar que t_r é *retardado* em relação a t.

- Ou seja, no caso particular em que v é <u>muito pequeno</u>: $v \to 0$, então:

$$t_r \to \frac{\cancel{c^2}\, t}{\cancel{c^2}} \pm \sqrt{\cancel{\frac{c^4 t^2}{c^4}} + \frac{\cancel{c^2}\, r^2}{c^{\cancel{4}\,2}} - \cancel{\frac{c^4 t^2}{c^4}}} \Rightarrow t_r \to t \pm \frac{r}{c}$$

tempo avançado

tempo retardado

$\therefore$ sobra sinal (-)

- Assim, o termo: $\left\{R = c\left(t - t_r\right) = \left|\vec{r} - \vec{v}\, t_r\right|\right\}$

$$R\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right) = R\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{v}\right) = R - \frac{1}{c}\vec{R} \cdot \vec{v} = c\left(t - t_r\right) - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \left(\vec{r} - \overset{//\, v t_r}{\vec{w}}\right) =$$

$$= c\left(t - t_r\right) - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{r} + \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{v}\, t_r = c\left(t - t_r\right) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} + \frac{v^2}{c} t_r =$$

$$= \frac{1}{c}\left[c^2 t - c^2 t_r - \vec{v} \cdot \vec{r} + v^2 t_r\right] = \frac{1}{c}\left[\left(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}\right) - t_r\left(\cancel{c^2 - v^2}\right)\right] =$$

$$t_r = \frac{c^2 t^2 - \vec{r} \cdot \vec{v} - \sqrt{\ldots.}}{\left(\cancel{c^2 - v^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{c}\left[\left(\cancel{c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}}\right) - \left(\cancel{c^2 t^2 - \vec{r} \cdot \vec{v}}\right) - \sqrt{\ldots}\right] = \frac{\sqrt{\ldots..}}{c}$$

- Portanto: $$\boxed{\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{\left(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}\right)^2+\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}}$$

- Enquanto que $$\varphi_{\text{carga pontual}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)}\quad\left\{\vec{A}=\frac{\vec{v}\varphi}{c^2}\right\}$$ *carga pontual*

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{q\vec{v}}{\sqrt{\left(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}\right)^2+\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}}$$

- Na *lista 7* pede-se para mostrar que o *potencial escalar* de uma *carga pontual que se move com velocidade constante* (***M.R.U.***), é dado por:

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^*\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin\theta}}}$$;sendo $$\begin{cases}\boxed{R^*=\vec{r}-\vec{v}\,t}=\text{“posição presente”}\\ \theta=\text{ângulo entre } \vec{R}^* \text{ e } \vec{v} \text{ (ver figura)}\end{cases}$$

- De forma que, quando *v<<c* ($\Rightarrow v^2 <<<< c^2$): $$\boxed{\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}}$$

caso estático!