

# Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 22 aula – 05jun/2007

- Vimos: Antenas de 1/2 onda:  $I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right)$

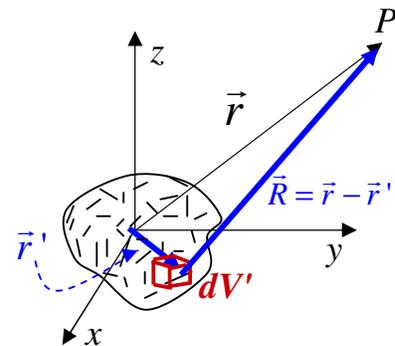
- Campos de Radiação: 
$$\begin{cases} E_\theta = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r c} \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \\ B_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \end{cases}$$

- Para este caso:

$$\bar{P} = \frac{I_0^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 73,1 \frac{I_0^2}{2}$$

- Para uma distribuição arbitrária de cargas em movimento, em torno da origem, obtivemos os potenciais:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\hat{e}_r \cdot \vec{p}(t_0)}{r^2} + \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] \\ \bar{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) ; \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \end{cases}$$



- Podemos agora calcular os campos de radiação  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  correspondentes, usando:

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} ; \text{ e retendo apenas os termos proporcionais a } 1/r \text{ (campos de radiação).}$$

- Calculando  $\vec{E}$  inicialmente, para um dado ponto P:

$$i) \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t_0); \quad t_0 = t - \frac{r}{c}$$

$$ii) (\nabla \varphi)_{\text{esf.}} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

$\varphi$  não depende de  $\phi$

- Observando, por exemplo, que  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$  envolve o cálculo: (na verdade, é o único termo que irá gerar campo de radiação!)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\hat{e}_r \cdot \dot{\vec{p}}(t_0)}{rc} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\dot{\vec{p}}(t_0) \cos \theta}{rc} \right] = \frac{\cos \theta}{rc} \frac{\partial}{\partial r} \dot{\vec{p}}(t_0) - \frac{1}{r^2 c} \dot{\vec{p}} \cos \theta ; \quad \boxed{t_0 = t - \frac{r}{c}}$$

- Sendo que  $\frac{\partial \dot{\vec{p}}(t_0)}{\partial r} = \frac{\partial \dot{\vec{p}}(t_0)}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial r} = -\frac{\ddot{\vec{p}}}{c}$   
 $= -1/c = \frac{\partial t}{\partial r}$ ; já que  $\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1$

termo  $\propto 1/r^2 \Rightarrow$  não entra no campo de radiação!

- Enquanto que  $\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$  envolve o cálculo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\dot{\vec{p}}(t_0) \cos \theta}{rc} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\sin \theta}{c} \dot{\vec{p}}(t_0)$$

não faz parte do "campo de radiação" (idem para os outros termos)

- Assim, mantendo-se somente os termos proporcionais a  $1/r$ , após a derivação:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}}{rc^2} \hat{e}_r - \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left\{ [\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t_0)] \hat{e}_r - \ddot{\vec{p}}(t_0) \right\}}$$

↓ (ver apêndice)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}) \right]}$$

- Quanto ao cálculo de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , note que *as componentes de  $\dot{\vec{p}}$  só dependem de  $r$* , e não de  $\theta$  e  $\phi$ , já que  $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{p}}(t_0) = \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$

$$\text{Então: } (\nabla \times \vec{A})_{\text{esf.}} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{e}_\theta +$$

vou desprezar porque não vai gerar "campos de radiação" - verifique!

$$+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r A_\theta) \hat{e}_\phi =$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mu_0}{4\pi r} r \dot{p}_\phi \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0}{4\pi r} r \dot{p}_\theta \right) \hat{e}_\phi$$

- Sendo que:  $\frac{\partial \dot{p}_\phi}{\partial r} = \frac{\partial \dot{p}_\phi}{\partial (t_0)} \frac{\partial (t_0)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \ddot{p}_\phi$ , e igualmente,  $\frac{\partial \dot{p}_\theta}{\partial r} = -\frac{1}{c} \ddot{p}_\theta$

$$\text{Então: } \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} (-\ddot{p}_\phi \hat{e}_\theta + \ddot{p}_\theta \hat{e}_\phi)} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}(t_0)]}; \text{ já que:}$$

$$\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}} = \hat{e}_r \times (\ddot{p}_r \hat{e}_r + \ddot{p}_\theta \hat{e}_\theta + \ddot{p}_\phi \hat{e}_\phi)$$

$\hat{e}_\phi$  (pointing to  $\ddot{p}_\theta \hat{e}_\theta$ )  
 $-\hat{e}_\theta$  (pointing to  $\ddot{p}_\phi \hat{e}_\phi$ )

(comparando)

$$\boxed{\vec{E} = -c \hat{e}_r \times \vec{B}} \quad \boxed{\therefore \vec{E} \perp \vec{B}}$$

- No caso particular do eixo z ser escolhido **na direção de**  $\ddot{\vec{p}}(t_0)$  (em coordenadas polares):

- Na expressão de  $\vec{E}$ :  $\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}} = \ddot{p}(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_z) = \ddot{p} \cos \theta$

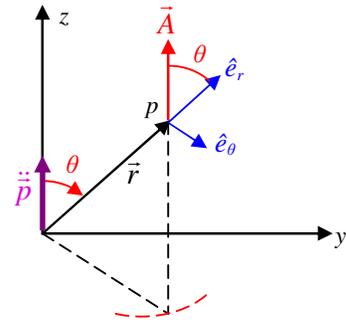
- Enquanto que:

$$\ddot{\vec{p}} = \ddot{p} \hat{e}_z = \ddot{p}(\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta) = \ddot{p} \cos \theta \hat{e}_r - \ddot{p} \sin \theta \hat{e}_\theta$$

- Assim (substituindo):

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \left( \ddot{p} \cos \theta \hat{e}_r \right) - \left( \ddot{p} \cos \theta \hat{e}_r - \ddot{p} \sin \theta \hat{e}_\theta \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \ddot{p}(t_0) \frac{\sin \theta}{r} \hat{e}_\theta$$



- Quanto a  $\vec{B}$ :

i) **Módulo** envolve  $|\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}| = \ddot{p} \sin \theta$

ii) **Direção e Sentido** envolve:  $\hat{e}_r \times \hat{e}_z = -\hat{e}_\phi$

- Assim:  $\vec{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \ddot{p}(t_0) \frac{\sin \theta}{r} \hat{e}_\phi$

- Quanto ao **Vetor de Poynting**:  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} [\ddot{p}(t_0)]^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{e}_r$

- Note que, novamente, a **Emissão de Radiação** será **máxima** a **90° com relação a**  $\ddot{\vec{p}}$ .  
(expressa a aceleração das cargas)

- Agora, o cálculo da **Potência Total irradiada**, através de uma **casca esférica de raio r**:

*sai da integral, pois não depende de theta!*

*(Os campos acima já são de radiação)*

$$P = \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \ddot{p}^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \Rightarrow P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2(t_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}$$

**Exemplo 1:** Considerando distribuição de cargas  $\equiv$  **Dipolo Elétrico Oscilante**:

$$\{p(t) = p_0 \cos \omega t; (p_0 = Q\ell)\}$$

- Então:  $\ddot{p}(t) = -\omega^2 p_0 \cos \omega t \Rightarrow$  recuperamos resultado obtido anteriormente! *verifiquem!*

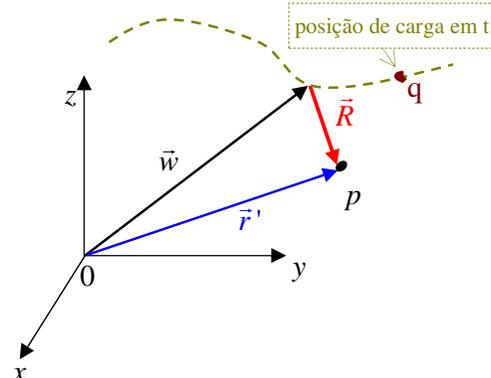
**Exemplo 2:** Distribuição de cargas  $\equiv$  **1 única carga**:  $\vec{p}(t) = q \vec{s}(t)$ , sendo  $\vec{s}(t) \equiv$  **posição da carga em relação à origem do sistema de coordenada**.

- Então:  $\ddot{\vec{p}}(t) = q a(t) \Rightarrow$  **Potência Irradiada**:  $P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \equiv$  **Fórmula de Larmor**

(será também obtida posteriormente de uma outra maneira)

## POTENCIAIS DE LIENARD-WIERCHERT

- Vamos agora generalizar o problema de emissão de radiação calculando  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  produzidos no ponto  $P$  por cargas pontuais que possuem trajetória qualquer (e não simplesmente oscilam em torno da origem).



- Vamos então supor carga  $q$  pontual, acelerada, cuja posição, no tempo, é descrita pelo vetor posição  $\vec{w}$ , e vamos calcular os potenciais  $\varphi$  e  $\vec{A}$  em  $P$  no instante  $t$ .

- Porém, nos cálculos, o tempo que deve ser utilizado é  $t_r \equiv$  **tempo anterior, retardado**, quando a carga encontrava-se na “**posição retardada**”  $\vec{w}$ .

- De forma que:  $R = |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r)$

- Da expressão do potencial:  $\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} dV'$ , poderíamos ser tentados a fazer,

para a carga “pontual”:  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \equiv$  **mesmo resultado do caso estático**; considerando

$R \equiv$  distância à posição retardada.

- Isto, porém, não seria totalmente correto, pois  $\int \rho(\vec{r}', t_r) dV'$  não corresponde exatamente à carga da partícula!

- Isto porque, com o movimento da carga (principalmente a altas velocidades), a “região do volume” não é mais precisamente definida!

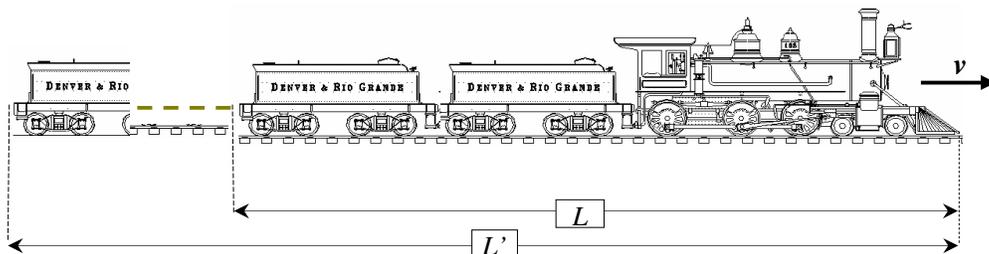
- Assim, como justificaremos adiante, para uma distribuição concentrada de cargas que se movem:

$$\int \rho(\vec{w}, t_r) dV' = q \left( 1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c} \right)^{-1}; \quad \hat{e}_R = \vec{R}/R$$

- Vamos à justificativa:

- Ao observarmos um trem aproximando-se com velocidade  $v$ , estamos recebendo simultaneamente luz proveniente de todas as partes do trem.

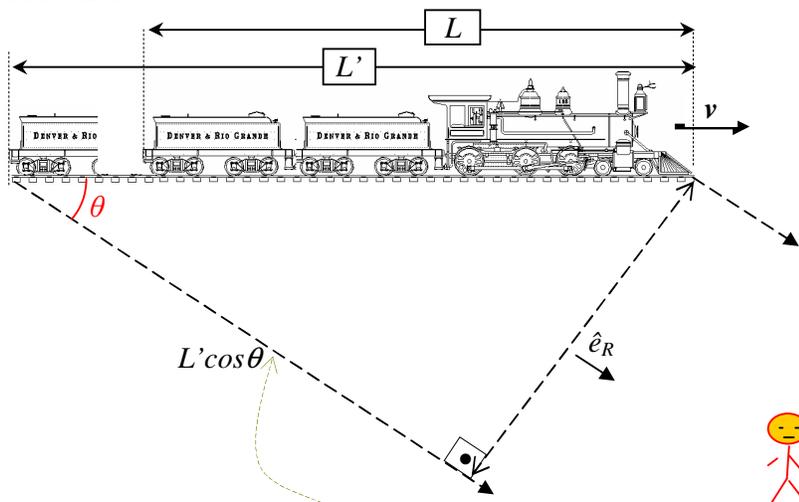
- Mas, para que isto aconteça, a **luz do final do trem** deve ser enviada um pouco antes que a **da dianteira**, quando o trem encontrava-se um pouco mais distante!



- Da figura, vemos que **o tempo** que a **luz do final do último vagão** leva pra atingir a **frente da locomotiva** (e, a partir daí, os dois raios seguem juntos até o observador), **percorrendo a distância  $L'$**  é o mesmo que **o trem**, com velocidade  $v$ , leva para **percorrer distância  $L' - L$**  (em módulo).

• Ou seja:  $\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v} \Rightarrow L' = \frac{L}{L - v/c} \quad \left( L'v - L'c \Rightarrow L' = -\frac{Lc}{v - c} = \frac{+L}{1 - v/c} \right)$

- Desta forma, o trem, **aproximando-se**, **apresenta-se um pouco mais comprido** do que ele realmente é; enquanto que, **afastando-se**, **apresenta-se mais curto, pelo mesmo fator**. Note que isto nada tem a ver com a contração de Lorentz! É apenas um modelo físico!
- Note também que as **dimensões perpendiculares à direção de movimento não são afetadas**  $\Rightarrow$  altura e largura do trem permanecem as mesmas, com o trem parado ou em movimento.
- Porém, caso o observador não esteja situado na direção de movimento do trem, mas deslocado de  $\theta$ .



- Observe agora que a “**distância extra**” percorrida pela luz proveniente do último vagão (com relação ao primeiro) será agora  $L' \cos \theta$ .

- Como no tempo  $\frac{L' \cos \theta}{c}$  o trem desloca-se  $L - L'$ , com velocidade de  $v$ :

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L - L'}{v} \Rightarrow L' = \frac{L}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}}, \text{ ou } L' = \frac{L}{1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}}$$

- De forma que, no cálculo do “**volume do trem**” (largura  $\times$  altura  $\times$  comprimento):

$$\begin{cases} V' = L' A \\ V = L A \end{cases} \Rightarrow \frac{V'}{L'} = \frac{V}{L} \Rightarrow V' = \frac{V}{\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)}$$

- Voltando ao nosso problema de **carga ‘pontual’** em movimento:

$$\int \rho(\vec{r}'_{\equiv \vec{w}}, t_r) dV' = \frac{q}{\left(1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c}\right)} \quad \text{c.q.d.}$$

- Assim, o Potencial Escalar devido à carga pontual, pode ser escrito:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R \left( 1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c} \right)} \quad (1)$$

- Sendo que:  $\begin{cases} \vec{v} \equiv \text{velocidade da carga no tempo retardado.} \\ \hat{e}_R \equiv \text{versor relacionado com a posição (retardada) da carga ao observador.} \end{cases}$

- Da mesma forma, lembrando que a densidade de corrente  $\vec{J} = \rho \vec{v} \Rightarrow \vec{J}(t_r) = \rho(t_r) \vec{v}(t_r)$ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r) \vec{v}(t_r)}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{v}}{R} \right) \int \rho(\vec{w}, t_r) dV' \Rightarrow$$

(velocidade e densidade no tempo retardado)

(não dependem das coordenadas linha)

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{R \left( 1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c} \right)} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

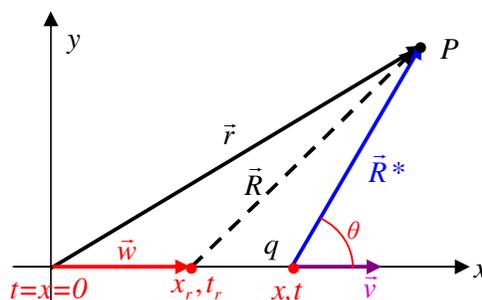
- As equações (1) e (2) representam os **“Potenciais de Lienard-Wiechert”** para cargas pontuais. (note que não envolvem a aceleração! ela aparecerá quando potenciais forem derivados para o cálculo dos campos)

- Vamos inicialmente estudar o caso particular de uma carga pontual em Movimento Retilíneo Uniforme (velocidade constante).

- Por conveniência, vamos supor que a carga passa pela origem do sistema de coordenadas em  $t=0$ .

- Novamente, a posição da partícula no tempo retardado é determinada por:

$$\vec{w} = \vec{w}(t_r) = \vec{v} \cdot t_r$$



- E, para obtermos os potenciais em  $P$  no instante  $t$ , devemos considerar a posição e o tempo retardados  $(y_r, t_r)$ , e avaliar o termo:

$$R \left( 1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c} \right); \quad (3)$$

- Sendo que:  $\begin{cases} R = c(t - t_r) \\ \hat{e}_R = \vec{R} / R \\ \vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r) \end{cases}$

- Agora, no tempo retardado:  $w(t_r) = vt_r$  e  $R = c(t - t_r) = |\vec{r} - \vec{v}t_r|$  (ver figura)

- Elevando ao quadrado esta última igualdade:

$$r^2 + v^2 t_r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v} t_r = c^2 (t^2 + t_r^2 - 2t t_r) \equiv \text{equação do 2º grau em } t_r.$$

- Resolvendo (ver apêndice 2):  $t_r = \frac{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{(c^2 - v^2)}$

- Para definir o sinal mais apropriado, lembrar que  $t_r$  é retardado em relação a  $t$ .

- Agora, no caso particular em que  $v$  é muito pequeno:  $v \rightarrow 0$ , então:

$$t_r \rightarrow \cancel{t} \pm \sqrt{\frac{c^4 \cancel{t}^2}{c^4} + \frac{\cancel{t}^2 r^2}{c^4} - \frac{c^4 \cancel{t}^2}{c^4}} \Rightarrow t_r \rightarrow t \pm \frac{r}{c}$$

tempo avançado  
tempo retardado

∴ sobra sinal (-)

- Assim, a equação 3 pode ser escrita:

$$\begin{aligned} R \left( 1 - \frac{\hat{e}_R \cdot \vec{v}}{c} \right) &= R \left( 1 - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{v} \right) = R - \frac{1}{c} \vec{R} \cdot \vec{v} = c(t - t_r) - \frac{\vec{v}}{c} \cdot (\vec{r} - \vec{w}) = \\ &= c(t - t_r) - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{r} + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{v} t_r = c(t - t_r) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} + \frac{v^2}{c} t_r = \\ &= \frac{1}{c} [c^2 t - c^2 t_r - \vec{v} \cdot \vec{r} + v^2 t_r] = \frac{1}{c} [(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - t_r (c^2 - v^2)] = \\ &= \frac{1}{c} [(\cancel{c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}}) - (\cancel{c^2 t_r - \vec{r} \cdot \vec{v}}) - \sqrt{\dots}] = \frac{\sqrt{\dots}}{c} \end{aligned}$$

$\frac{c^2 t^2 - \vec{r} \cdot \vec{v} - \sqrt{\dots}}{(c^2 - v^2)}$

- Portanto:  $\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$

para uma carga pontual

- Enquanto que  $\vec{A} = \frac{\vec{v}\varphi}{c^2} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{q\vec{v}}{\sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}$

- Na lista 7, pede-se para demonstrar que o potencial escalar de uma carga pontual que se move com velocidade constante (M.R.U.), é dado por:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^* \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}} ; \text{ sendo: } \begin{cases} R^* = \vec{r} - \vec{v}t = \text{vetor "posição presente"} \\ \theta = \text{ângulo entre } \vec{R}^* \text{ e } \vec{v} \text{ (ver figura acima)} \end{cases}$$

- De forma que, quando  $v \ll c$  ( $\Rightarrow v^2 \ll c^2$ ):  $\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \equiv$  "caso estático"

- Agora, a partir dos potenciais de Lienard-Wiechert ( $\varphi$  e  $\vec{A}$ ) na forma geral, o próximo passo é calcular os campos:  $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$  e  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ .

- Efetuada as derivações correspondentes (em folhas a serem distribuídas):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[ (c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a}) \right]$$

$BAC - CAB = \vec{u}(\vec{R} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{u})$

$$e \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{u} \cdot \vec{R})^3} \vec{R} \times \left[ \vec{v}(c^2 - v^2) + \vec{v}(\vec{R} \cdot \vec{a}) + \vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{u}) \right];$$

sendo que  $\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v}$

- Comparando estas expressões de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  vemos que elas são muito semelhantes, a não ser pelos  $v^s$  em vez dos  $u^s$ .
- Note, porém que, quando forem realizados os produtos  $\vec{R} \times (\text{escalar})\vec{v}$  na equação de  $\vec{B}$ , podemos substituir  $\vec{v}$  por  $-\vec{u}$ , pois:

$$\vec{R} \times (\text{esc})(-\vec{u}) = (\text{esc}) \left[ \vec{R} \times \left( \vec{v} - \frac{c\vec{R}}{R} \right) \right] = (\text{esc}) (\vec{R} \times \vec{v})$$

$\vec{R} \times \frac{c\vec{R}}{R} = \vec{0}$

- Desta forma, temos:  $\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}$
- Ou seja, o campo magnético  $\vec{B}$  de uma carga pontual será  $\perp$  a  $\vec{E}$  e também ao vetor que liga o ponto P à posição retardada.
- Estes últimos resultados são gerais; ou seja, referem-se a cargas pontuais com movimento qualquer.
- Na próxima aula discutiremos mais este caso específico da carga em M.R.U.

## APÊNDICES

### Apêndice(1)

$$\frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}) \right] = (BAC - CAB) = \hat{e}_r (\hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}} \left( \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_{=1} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \hat{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}} \hat{e}_r - \ddot{\vec{p}} \right]$$

### Apêndice(2)

$$r^2 + v^2 t_r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v} t_r = c^2 t^2 + c^2 t_r^2 - 2c^2 t t_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v^2 - c^2) t_r^2 + (2c^2 t - 2\vec{r} \cdot \vec{v}) t_r + r^2 - c^2 t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}}{v^2 - c^2} \pm \frac{\sqrt{A(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 - (A)(v^2 - c^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{\cancel{(v^2 - c^2)}} \quad \checkmark$$