Eletromagnetismo II

Aula 23

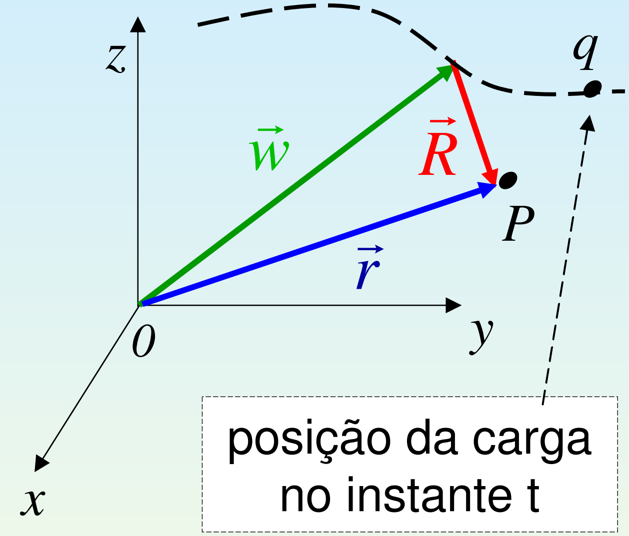
Professor Alvaro Vannucci

Na última aula vimos...

- ***Potenciais de Lienard-Wiechert*** para ***cargas pontuais***, com ***movimento qualquer***.

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{R\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi(\vec{r},t)$$



$$\therefore \; \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}\left[\left(c^2-v^2\right)\vec{u}+\vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]$$

$$\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R}-\vec{v}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}\vec{R}\times\left[\left(c^2-v^2\right)\vec{v}+\vec{v}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)+\vec{a}\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)\right]$$

- E como: $(esc.)\left(\vec{R}\times\vec{v}\right)=(esc.)\,\vec{R}\times(-\vec{u})\rightarrow$ pude trocar: $\vec{v}\leftrightarrow-\vec{u}$

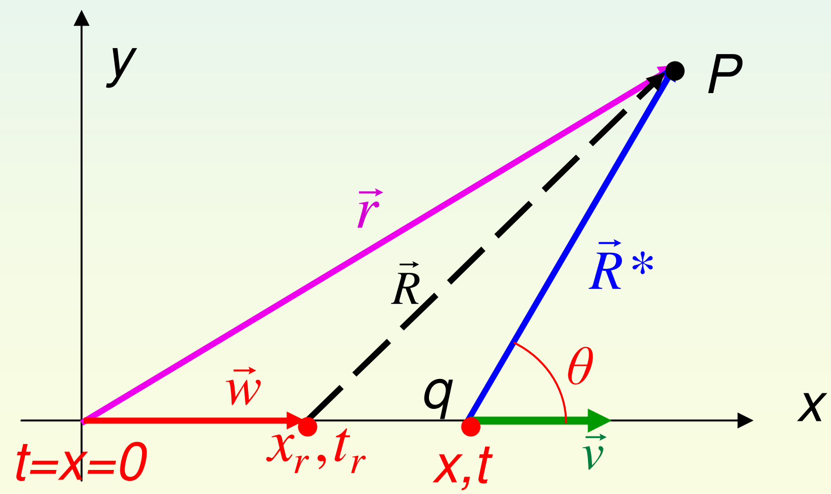
- Desta forma, vimos que: $\boxed{\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}}$

- No caso de ***M.R.U.***:

$$\begin{cases}\boxed{\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qc}{\sqrt{\left(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}\right)+\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}}}\\[2ex] \boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{\vec{v}}{c^2}\,\varphi(\vec{r},t)}\end{cases}$$

- E mais interessante ainda:

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{R^*\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin\theta}}}$$



- Mas, no *caso específico* de *carga em M.R.U*: $\vec{v} = cte \; \left(\Rightarrow \vec{a} = 0\right)$

- Da expressão de $\vec{E}$:

$$\left\{ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3} \left[\left(c^2 - v^2\right)\vec{u} + \vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right) \right] \right\}$$

$$\boxed{\vec{E}\left(a=0\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(c^2 - v^2\right)}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3} R\,\vec{u}} \;\; ; \;\; \vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v}$$

- Mas, note que o termo: $R\vec{u} = \cancel{R}\,\frac{c\vec{R}}{\cancel{R}} - R\vec{v}$; $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t_r \;\; \overset{\vec{w}}{/\!/} \\ R = c\left(t - t_r\right) \end{array} \right.$

- Assim: $R\vec{u} = c\vec{r} - \cancel{c\vec{v}t_r} - c\vec{v}t + \cancel{c\vec{v}t_r} \;\; \Rightarrow \;\; R\vec{u} = c\left(\vec{r} - \vec{v}t\right)$ *para M.R.U.*

tempo presente

- Agora, quero **substituir o produto** $\vec{R}\cdot\vec{u}$, observando (*dos potenciais de Lienard-Wiechert*) que o termo:

$$R\left(1 - \frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right) = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c} = \frac{1}{c}\left(cR - \vec{R}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{c}\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right) \; ;$$

$$\hat{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

já que $\boxed{\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v}}$ e $\vec{R}\cdot\vec{u} = \vec{R}\cdot\frac{c\vec{R}}{R} - \vec{R}\cdot\vec{v}$

- Por outro lado, *como visto na aula passada*, para uma carga com velocidade constante:

posição presente ao ponto *P*

$$R\left(1-\frac{\hat{e}_R\cdot\vec{v}}{c}\right)=\frac{1}{c}\sqrt{\left(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}\right)^2+\left(c^2-v^2\right)\left(r^2-c^2t^2\right)}=R^*\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}$$

exercício da 7ª lista

- De forma que, substituindo na eq. de $\vec{E}(a=0)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(c^2-v^2\right)}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}R\vec{u}$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{c^2-v^2}{c^{\cancel{3}\,2}R^{*3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\cancel{c}\,\underbrace{\left(\vec{r}-\vec{v}t\right)}_{=\vec{R}^*}$$

escritaem termos do ***tempo e posição presentes*** !

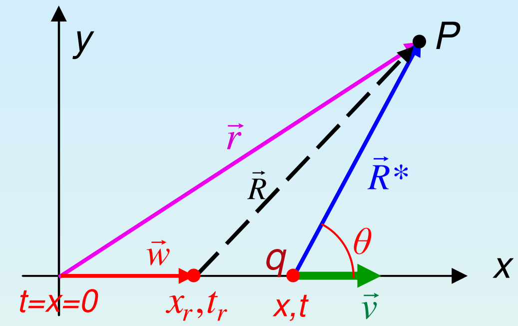
versor na direção de $\vec{R}^*$

- Colocando c^2 em evidência:

$$\boxed{\underset{(a=0)}{\vec{E}(\vec{r},t)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^{*2}}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\vec{R}^*}{R^*}}$$

• Ou seja, $\vec{E}$ aponta na direção do *ponto P* em termos do *Vetor "posição presente"* da carga, o que é um resultado interessante já que o "*sinal*" em *P*, no tempo *t*, vem da *posição retardada*!

• Note agora que, para pontos *P* situados *na direção do movimento* ($\theta = 0º$):



$$E_{//} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^{*2}}\right)\underbrace{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\equiv<1}$$

$$|\vec{E}|_{(a=0)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^{*2}}\cdot\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

resultado estático (carga em repouso)

• Ou seja, a *intensidade* ($|\vec{E}|$) para pontos ***na direção de movimento*** *diminui* *em relação à situação de repouso*, pelo fator

$$1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow$$ ***no limite v→ c*** $\Rightarrow$ ***$E_{//}$→ 0*** !

- Por outro lado, para pontos na *direção ⊥ ao movimento da carga* ($\theta = \pi/2$), a *intensidade do campo* será:

$$E_\perp \;\alpha\; \frac{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{2/2}}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{1/2}} \;>\; 1$$

$$\left\{ |\vec{E}|_{(a=0)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^{*2}} \frac{1-{v^2}/{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} \right\}$$

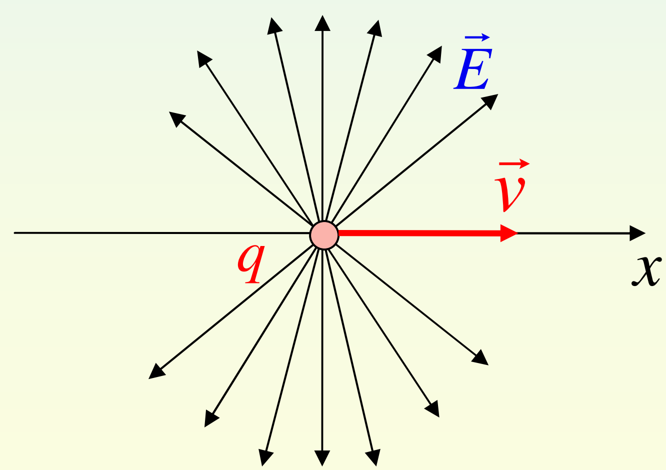
sempre! para qualquer *v*!

- Concluindo: há então uma *tendência das linhas de campo elétrico* concentrarem-se na direção ⊥ ao movimento da carga (com velocidade constante).

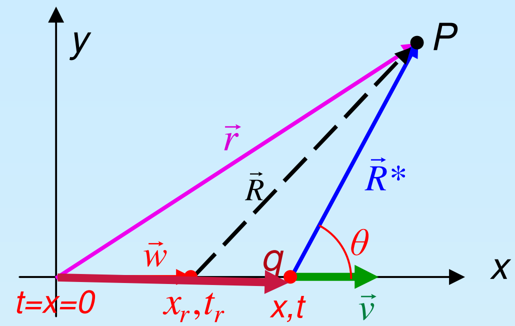
- O campo $\vec{B}(a=0)$, por outro lado:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}}$$

posição retardada ⇒ quero escrever na *posição presente*



- Como: $$\frac{\vec{R}}{R}=\frac{\vec{r}-\vec{v}\,t_r}{R}=\frac{1}{R}\left(\overbrace{\vec{r}-\vec{v}t}^{=\vec{R}^*}+\vec{v}\overbrace{\left(t-t_r\right)}^{=R/c}\right)\Rightarrow$$



- Então: $$\left\{\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}\right\}$$ $$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{R}}{R}=\frac{\vec{R}^*}{R}+\frac{\vec{v}}{c}}$$ $$\underset{(a=0)}{\vec{E}(\vec{r},t)}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^{*2}}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\vec{R}^*}{R^*}$$

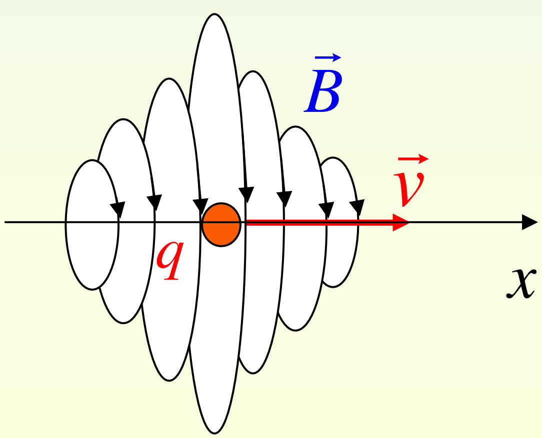
$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\left(\underbrace{\frac{\vec{R}^*}{R}\times\vec{E}}_{=0}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{E}\right)\Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)}$$

para q pontual, $\vec{v}$ cte (MRU)

- Ou seja, as *linhas de força* de $\vec{B}$ *têm direção* de $\hat{e}_\phi$ (Verifiquem!)

- Note ainda que a *intensidade do campo* ***diminui*** *em pontos que se encontram* ***ao longo da direção de movimento***.

(dependência com $\sin^2\theta$)



• Vamos calcular agora a ***Potência Irradiada*** por *carga pontual*, com *trajetória qualquer*:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[\vec{E}\times\left(\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}\right)\right] = \left\{\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\right\} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)}_{=E^2}-\vec{E}\left(\vec{E}\cdot\frac{\vec{R}}{R}\right)\right]$$

• No entanto, como já discutimos, *não é toda energia associada aos campos que constituirá os "Campos de Radiação"*; *uma parte representa o campo que acompanha a carga* enquanto ela se move.

• Ou seja, a ***energia irradiada*** é aquela que efetivamente **propaga-se para o infinito**.

• Vamos então calcular a ***Potência Irradiada*** pela carga, *no instante* t_r , considerando *casca esférica imaginária*, de *raio* R (centrada na posição retardada) e esperar $\Delta t = t - t_r = R/c$ para *calcular o fluxo* de $\vec{S}$, no instante t, através da casca esférica.

• Agora, como *elemento de área* $dA \propto R^2 \Rightarrow$ somente os termos de $\vec{S} \propto \frac{1}{R^2}$ é que "sobrevivem" quando faço $R \to \infty$.

• Isto significa, nas *expressões gerais* de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, que *somente o termo que envolve aceleração* constituirá a Parte de Radiação!

$$\left\{ \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3} \left[\left(c^2 - v^2\right)\vec{u} + \vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right) \right] \right\} \quad ; \quad \left\{ \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E} \right\}$$

• Isto porque $\boxed{\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v}}$ não depende de R (módulo) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E} \propto \frac{\cancel{R}}{R^{\cancel{3}\,2}} \left[t_1\left(\vec{v}\right) \; e \; t_2\left(R, a\right) \right]$$

$$\propto 1/R^2 \qquad \propto 1/R$$

• Por isso, carga com $\vec{v}$ cte (*a=0*) não irradia!

- Assim: $\boxed{\vec{E}_{rad} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}\left[\vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]}$

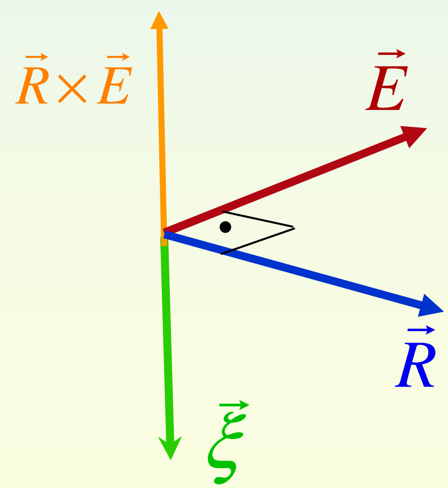
para carga pontual ***acelerada***, com ***trajetória qualquer***!

- Agora, como $\vec{E}_{rad} \propto \vec{R}\times\vec{\xi} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{E}_{rad} \perp \vec{R}} \;\Rightarrow$

$$\left\{ \vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)}_{\equiv E^2} - \vec{E}\left(\vec{E}\cdot\frac{\vec{R}}{R}\right)\right]\right\}$$

$\Rightarrow$ na expressão de $\vec{S}$: $\left(\vec{E}\cdot\dfrac{\vec{R}}{R} = 0\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2_{rad} \frac{\vec{R}}{R}}$$



- Vamos agora calcular a *intensidade* da radiação ($\bar{S}$), de uma ***forma aproximada*** (para simplificar a álgebra), supondo:

$$\vec{u} = \frac{c\vec{R}}{R} - \vec{v} \approx \frac{c\vec{R}}{R}$$

; ou seja, a *velocidade de propagação do sinal* é **>>** que a *velocidade $\vec{v}$ da carga*: $(c >> v)$

(situação não-relativística)

- Então: $\left\{ \vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3} \left[\vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right) \right] \right\}$

$$\vec{E}_{rad} \approx \left(BAC - CAB \right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\frac{c\vec{R}}{R}\right)^3} \left[\underbrace{\frac{c\vec{R}}{R}}_{/\!/\,\hat{e}_R}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right) - \vec{a}\left(\vec{R}\cdot\frac{c\vec{R}}{R}\right) \right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cancel{R}}{\cancel{c^3}^{\,2}\cancel{R^3}} \left[\cancel{c}\,\hat{e}_R \left(\vec{a}\cdot\underbrace{\frac{\vec{R}}{R}}_{\hat{e}_R^{/\!/}} \right) \cancel{R} - \cancel{c}\cancel{R}\,\vec{a} \right] \Rightarrow$$

(θ = ângulo entre o vetor aceleração da carga e a direção da onda irradiada)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{c^2 R} \left[\underbrace{\left(\vec{a}\cdot\hat{e}_R\right)}_{=a\cos\theta}\hat{e}_R - \vec{a} \right]}$$

- No cálculo do *Vetor de Poynting*:

$$\left\{ \vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2 R}\left[\left[\underbrace{(\vec{a}\cdot\hat{e}_R)}_{=a\cos\theta}\hat{e}_R - \vec{a}\right]\right] \right\}$$

$$E^2 = \vec{E}\cdot\vec{E} = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\right)^2 (a\cos\theta\,\hat{e}_R - \vec{a})\cdot(a\cos\theta\,\hat{e}_R - \vec{a}) =$$

$$= \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\right)^2 \left[a^2\cos^2\theta - a\cos\theta\underbrace{(\hat{e}_R\cdot\vec{a})}_{=a\cos\theta} - a\cos\theta\underbrace{(\vec{a}\cdot\hat{e}_R)}_{=a\cos\theta} + a^2\right] =$$

$$= \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\right)^2 a^2 \underbrace{\left(\cos^2\theta - 2\cos^2\theta + 1\right)}_{=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta}$$

- Portanto:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 c^5 R^2}\hat{e}_R}$$; expressão válida para $\boxed{\vec{u} \sim \frac{c\vec{R}}{R}}$

(situação não-relativística)

- Como vemos, a carga não irradia na direção em que está acelerada e a emissão máxima ocorre $\perp$ à aceleração da carga!

- Calculando o *fluxo* desta energia/área-tempo através de uma casca esférica de raio *R*, temos a ***Potência Total Irradiada***:

$$P = \int \vec{S}_{rad} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \mu_0 \varepsilon_0^2 c^5 R^2} \underbrace{\int R^2 \sin^3\theta\, d\theta\, d\phi}_{= (2\pi)\left(4/3\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \right) \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}}$$

Fórmula de Larmor!

para cargas com $v << c$, já obtida antes utilizando distribuição de cargas em torno da origem.

RELATIVIDADE

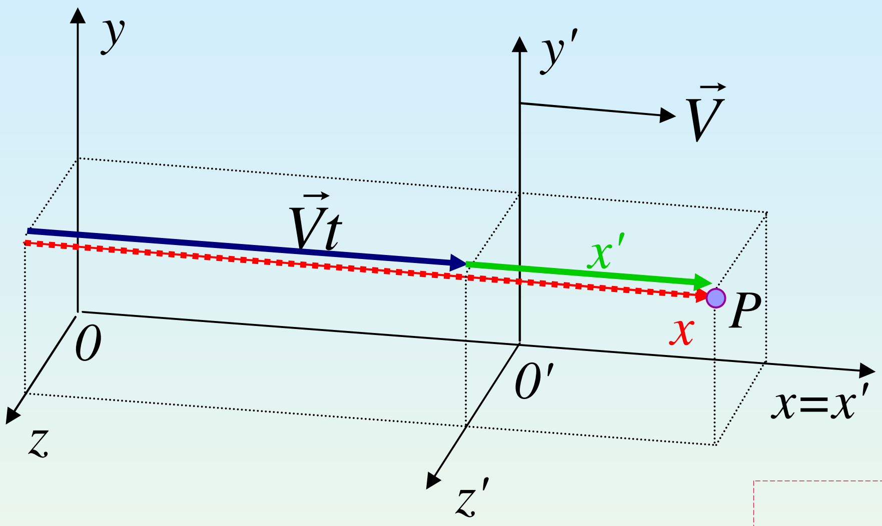
- *Teoria de Maxwell do Eletromagnetismo* foi publicada em 1862. Nos anos seguintes a estrutura matemática foi gradualmente desenvolvida, e os resultados comprovados experimentalmente.

- Um ponto crucial neste processo foi decidir sobre a existência (ou não) de um meio para a propagação das ondas *EM*: *o Éter*. Ele existindo, porém, se estabeleceria um sistema de referência preferencial para o estudo das leis da Física.

- Experiências com a de Michelson-Morley (1888) levaram a maioria dos cientistas a concluírem pela não-existência do Éter.

- Em 1904 Lorentz propôs uma transformação que deixava inalterada a ***forma*** das Equações de Maxwell quando descrita por dois observadores em referenciais inerciais diferentes (o que não ocorre quando aplicadas às transformações de Galileu $\rightarrow$ as equações de Maxwell não eram invariantes frente a uma transformação de Galileu) .

• *Por exemplo, supor a Explosão de um Balão (evento) em um ponto P, no instante t.*



Equações de Lorentz

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1)$$

$$y' = y \quad (2)$$

$$z' = z \quad (3)$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4)$$

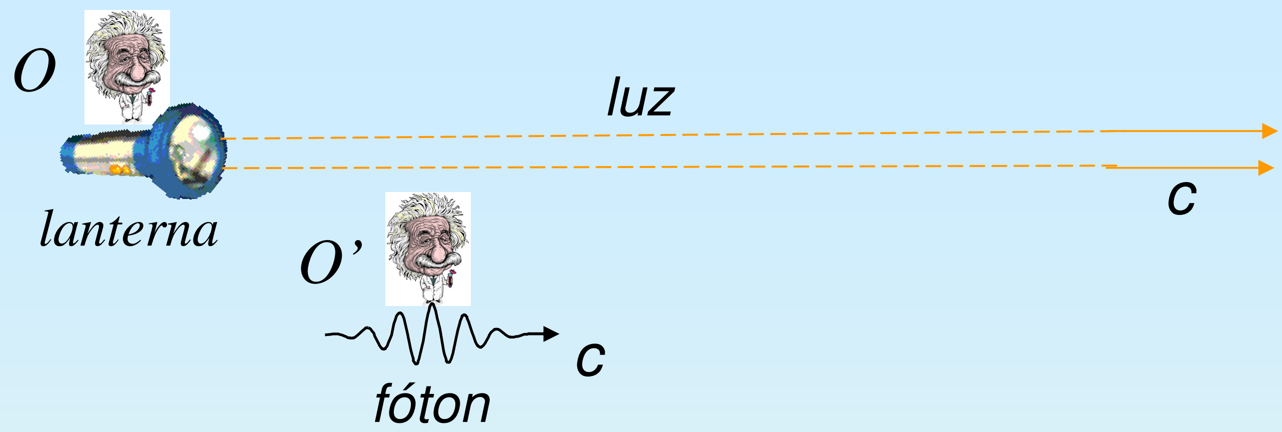
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

• No ano seguinte Einstein consegue elaborar a *Teoria Especial da Relatividade*, partindo de dois princípios básicos:

1- As Leis da Natureza são as mesmas para qualquer ref. inercial.

2- A velocidade da luz no vácuo é c para qualquer ref. inercial.

- Note:



- Supor agora, por exemplo, que 0 e 0' sincronizam seus relógios ao passar um pelo outro (com velocidade *V*), e neste instante um "flash" de luz é disparado nas origens coincidentes dos sistemas de coordenadas:

i) O observador 0 afirma que a luz propaga-se em todas as direções com velocidade *c*, como frentes de ondas esféricas centradas na sua origem e com raio $r = ct$ crescente.

ii) Observador 0' afirma o mesmo, com as ondas centradas na sua origem e com raio $r' = ct'$ crescente.

- Isto significa dizer que, para cada observador, as frentes de onda são descritas pela equação da esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2t^2 \qquad (5)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = c^2t'^2 \qquad (6)$$

- Aplicando as equações de transformação de Lorentz na eq.(6) :

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - V/c^2\, x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2 \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 x^2 + \gamma^2 V^2 t^2 \cancel{- 2\gamma^2 xVt} + y^2 + z^2 =$$

$$= c^2\gamma^2 t^2 + \cancel{c^2}\gamma^2 \frac{V^2}{\cancel{c^4}\,c^2} x^2 \cancel{- 2\cancel{c^2}\gamma^2 t \frac{V}{\cancel{c^2}} x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cancel{\gamma^2} \cancel{\left(1 - V^2/c^2 \right)} + y^2 + z^2 = c^2 \cancel{\gamma^2} t^2 \cancel{\left(1 - V^2/c^2 \right)}$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \equiv \text{ eq. (5)!}$$

• Vamos agora determinar as *eqs. de Transformação de Lorentz para a velocidade* (de um objeto que se move, para 2 referenciais inerciais)

• Considere o objeto em movimento, segundo os observadores 0 e 0', sofrendo um deslocamento infinitesimal $\Rightarrow$ tem-se *variações infinitesimais nas coordenadas linha e sem linha, dadas por:*

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & (1) \\ y' = y & (2) \\ z' = z & (3) \\ t' = \dfrac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & (4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} dx' = \dfrac{dx - V\,dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & (7) \\ dy' = dy & (8) \\ dz' = dz & (9) \\ dt' = \dfrac{dt - \left(\frac{V}{c^2}\right)dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} & (10) \end{array}\right.$$

- Fazendo (7) $\div(10)$: $dx' = \dfrac{dx - Vdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$; $dt' = \dfrac{dt - \left(V/c^2\right)dx}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x = \frac{\overset{\equiv\, v_x}{dx} - V\cancel{dt}}{\cancel{dt}\left(1 - \dfrac{V}{c^2}\underset{\equiv\, v_x}{\boxed{\dfrac{dx}{dt}}}\right)} \Rightarrow \boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V v_x}{c^2}}} \qquad (11)$$

- Também (8 ou 9) $\div$ (10) : $dy' = dy$; $dz' = dz$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \underset{\equiv\, v_y}{\boxed{\frac{dy}{dt}}}\,\frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\left(1 - \dfrac{V}{c^2}\underset{\equiv\, v_x}{\boxed{\dfrac{dx}{dt}}}\right)} \Rightarrow \boxed{v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c^2\, v_x}} \qquad (12)$$

- Analogamente: $\boxed{v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-V/c^2\, v_x}}$ (13)

- Verifique que, fazendo $V <<< c \quad \left(V/c \to 0\right) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ caímos na *Transformação de velocidade clássica de Galileu*!

- Pode-se mostrar que *as equações de Maxwell são covariantes* (variam da mesma maneira, não mudam suas formas) *com relação a uma transformação de Lorentz*:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}'(\vec{r}\,',t') = \frac{\rho'(\vec{r}\,',t')}{\varepsilon_0} \qquad (14)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}'(\vec{r}\,',t') = 0 \qquad (15)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\quad\leftrightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}'(\vec{r}',t')=-\frac{\partial\vec{B}'(\vec{r}',t')}{\partial t'}\qquad(16)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)=\mu_0\vec{J}(\vec{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\quad\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{B}'(\vec{r}',t')=\mu_0\vec{J}'(\vec{r}',t')+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}'(\vec{r}',t')}{\partial t'}\qquad(17)$$

- Agora isto não significa que há igualdade entre os campos $(\vec{E},\vec{B})$ e $(\vec{E}',\vec{B}')$ ou entre densidades de carga e corrente $(\rho,\vec{J})$ e $(\rho',\vec{J}')$

- Isto porque, na realidade, *estas grandezas não são iguais* (para referenciais inerciais diferentes)!

- Fica fácil perceber isso observando que se uma carga está em repouso em um referencial, no outro ela está em movimento!

- Nossa tarefa, agora, será determinar as *leis* (equações) que regem as *Transformações dos Campos* → veremos na próxima aula