# Eletromagnetismo II – 1º Semestre de 2007

Noturno - Prof. Alvaro Vannucci

## 24ª aula – 15jun/2007

- Vimos: Usando os *potenciais de Lienard-Wiechert*, os campos de cargas em M.R.U. são dados por:

i) $$\boxed{\vec{E}(\vec{a}=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(c^2-v^2\right)}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)^3}R\vec{u} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^{*2}}\cdot\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\vec{R}^*}{R^*}}$$

tempo e posição presentes

ii) $$\boxed{\vec{B}\left(\vec{a}=0\right) = \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)}$$

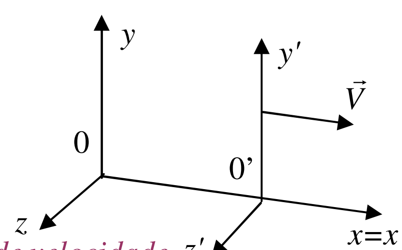
- Para cargas aceleradas: $\boxed{\vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{\left(\vec{R}\cdot\vec{u}\right)}\left[\vec{R}\times\left(\vec{u}\times\vec{a}\right)\right]}$ ; $\boxed{\vec{u} = c\vec{R}/R - \vec{v}}$

- De forma que $\boxed{\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 c}E_{rad}^2\frac{\vec{R}}{R} = \frac{q^2a^2\sin^2\theta}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^5R^2}}$

$\theta \equiv$ ângulo entre os vetores aceleração $\vec{a}$ e posição retardada $\vec{R}$

- Portanto: $\boxed{P = \int \vec{S}_{rad}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{q^2a^2}{c^3}}$ $\equiv$ *"Fórmula de Larmor"*

resultado válido para cargas com $v << c$; já tinha sido obtido antes usando distribuição de cargas!




## *Relatividade*

- ***Equações de Lorentz*** de *transformação de coordenadas e de velocidade*, supondo observador O' com velocidade V em relação a observador O:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (1)$$

$$y' = y \qquad (2)$$

$$z' = z \qquad (3)$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad (4)$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \qquad (5)$$

$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad (6)$$

$$v_z' = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad (7)$$

- Nossa tarefa, agora, será a de determinar as ***leis*** (***equações***) de ***Transformação dos Campos***.

- Para isso, vamos utilizar as equações anteriores, supondo que as ***origens dos sistemas de coordenadas S e S'*** (com velocidade *V*) ***se cruzam em t = t' = 0***.

- Vamos iniciar escrevendo a 2ª e a 3ª equação de Maxwell, por exemplo, em termos das *coordenadas cartesianas*:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (8) \qquad ; \text{ e}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} & (9) \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} & (10) \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} & (11) \end{cases}$$

- E, para **0'**, igualmente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_x'}{\partial x'} + \dfrac{\partial B_y'}{\partial y'} + \dfrac{\partial B_z'}{\partial z'} = 0 & (12) \\ \dfrac{\partial E_z'}{\partial y'} - \dfrac{\partial E_y'}{\partial z'} = -\dfrac{\partial B_x'}{\partial t'} & (13) \\ \dfrac{\partial E_x'}{\partial z'} - \dfrac{\partial E_z'}{\partial x'} = -\dfrac{\partial B_y'}{\partial t'} & (14) \\ \dfrac{\partial E_y'}{\partial x'} - \dfrac{\partial E_x'}{\partial y'} = -\dfrac{\partial B_z'}{\partial t'} & (15) \end{cases}$$

- Vamos agora ***correlacionar as derivadas com*** e ***sem linha***, utilizando a *Regra da Cad*eia: (a variação em das coordenadas de **0**, envolve a ***variação em cada uma das coordenadas de 0'***):

$$\left( f(x,y,z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \right\} \qquad (16)$$

- Agora, estas derivadas, segundo as *Equações de Transformações de Coordenadas de Lorentz* (*equações* 1 *a* 4):

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x'}{\partial x}=\gamma & \dfrac{\partial y'}{\partial x}=0 & \dfrac{\partial z'}{\partial x}=0 & \dfrac{\partial t'}{\partial x}=-\gamma\dfrac{V}{c^2} \\
\dfrac{\partial x'}{\partial y}=0 & \dfrac{\partial y'}{\partial y}=1 & \dfrac{\partial z'}{\partial y}=0 & \dfrac{\partial t'}{\partial y}=0 \\
\dfrac{\partial x'}{\partial z}=0 & \dfrac{\partial y'}{\partial z}=0 & \dfrac{\partial z'}{\partial z}=1 & \dfrac{\partial t'}{\partial z}=0 \\
\dfrac{\partial x'}{\partial t}=-\gamma V & \dfrac{\partial y'}{\partial t}=0 & \dfrac{\partial z'}{\partial t}=0 & \dfrac{\partial t'}{\partial t}=\gamma
\end{array}
$$

- Utilizando estes resultados nas equações (16):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}=\gamma\dfrac{\partial}{\partial x'}-\gamma\dfrac{V}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t'} & (17) \\
\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y'} & (18) \\
\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\partial}{\partial z'} & (19) \\
\dfrac{\partial}{\partial t}=-\gamma V\dfrac{\partial}{\partial x'}+\gamma\dfrac{\partial}{\partial t'} & (20)
\end{cases}
$$

- Uma outra maneira de escrever esta equações é na forma matricial:

$$
\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial t \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma V/c^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma V & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \partial/\partial x' \\ \partial/\partial y' \\ \partial/\partial z' \\ \partial/\partial t' \end{pmatrix}
$$

- Vamos agora aplicar estas relações (17 – 20) nas ***equações de Maxwell*** (equações 8 - 11):

i) $$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\left(-\gamma V\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)=+\gamma V\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'} \qquad (21)$$

ii) $$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}+\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}=+\gamma V\frac{\partial B_y}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_y}{\partial t'}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma E_z+\gamma VB_y\right]=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma B_y+\frac{\gamma V}{c^2}E_z\right] \qquad (22)$$

iii) $\gamma\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=+\gamma V\frac{\partial B_z}{\partial x'}-\gamma\frac{\partial B_z}{\partial t'}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma E_y-\gamma VB_z\right]-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=\frac{-\partial}{\partial t'}\left[\gamma B_z-\frac{\gamma V}{c^2}E_y\right] \qquad (23)$$

iv) $\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma B_x\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{\partial B_z}{\partial z'}+\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}$ (24)

- Usando (24) em (21):

$$\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-V\frac{\partial B_y}{\partial y'}-V\frac{\partial B_z}{\partial z'}+\frac{\gamma V^2}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z+VB_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y-VB_z\right)=-\cancel{\gamma}\underbrace{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}_{=\frac{1}{\gamma^{\cancel{2}}}}\frac{\partial B_x}{\partial t'}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial B_x}{\partial t'}$$

$$\therefore\;\frac{\partial}{\partial y'}\left(\gamma E_z+\gamma VB_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(\gamma E_y-\gamma VB_z\right)=\frac{-\partial B_x}{\partial t'} \qquad (25)$$

- Comparando (25) com (13): $\begin{cases}\boxed{E_z'=\gamma E_z+\gamma VB_y} & (26)\\ \boxed{E_y'=\gamma E_y-\gamma VB_z} & (27)\\ \boxed{B_x'=B_x} & (28)\end{cases}$

- Comparando (22) com (14): $\begin{cases}\boxed{E_x'=E_x} & (29)\\ E_z'=\gamma E_z+\gamma VB_y\rightarrow & \text{(já obtido acima)}\\ \boxed{B_y'=\gamma B_y+\frac{\gamma V}{c^2}E_z} & (30)\end{cases}$

- Comparando (23) com (15): $\begin{cases}E_y'=\gamma E_y-\gamma VB_z\;\rightarrow & \text{(já obtido acima)}\\ E_x'=E_x\;\rightarrow & \text{(já obtido acima)}\\ \boxed{B_z'=\gamma B_z-\frac{\gamma V}{c^2}E_y} & (31)\end{cases}$

- Portanto, temos as ***equações que transformam as componentes dos campos***, *de um referencial ao outro*.
- Mas note que *as componentes dos campos* ***na direção do movimento*** ($E_x$ e $B_x$) são ***invariantes*** (as mesmas para 0 e 0').

- Ou seja, as ***diferenças*** entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$, quando medidos de diferentes referenciais inerciais, envolvem ***somente as Componentes Perpendiculares ao movimento***.

- Desta forma, escrevendo $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}}$ e $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_{//} + \vec{B}_{\perp}}$ ***em relação à direção de movimento***, as equações acima podem ser representadas:

$$\begin{cases} \boxed{\vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//}} \\ \boxed{\vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \boxed{\vec{E}'_{\perp} = \gamma\left[\vec{E}_{\perp} + \vec{V}\times\vec{B}\right]} \\ \boxed{\vec{B}'_{\perp} = \gamma\left[\vec{B}_{\perp} - \dfrac{\vec{V}}{c^2}\times\vec{E}\right]} \end{cases}$$

- Isto porque, por exemplo:

$$\vec{V}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -VB_z\hat{e}_y + VB_y\hat{e}_z$$

(e o mesmo para $\vec{V}\times\vec{E}$)

- E, das eqs. (26) e (27), temos que:

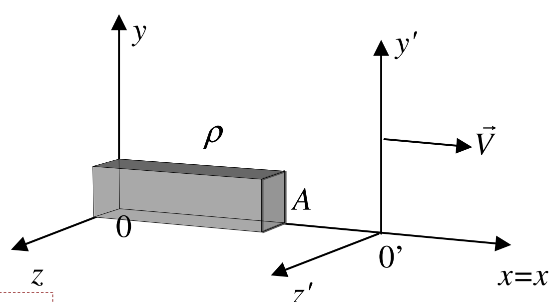
$$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}'_y\hat{e}_y + \vec{E}'_z\hat{e}_z = \left(\gamma E_y - \gamma V B_z\right)\hat{e}_y + \left(\gamma E_z + \gamma V B_y\right)\hat{e}_z = \gamma\underbrace{\left(E_y\hat{e}_y + E_z\hat{e}_z\right)}_{=\vec{E}_{\perp}} + \gamma V\overbrace{\left(B_y\hat{e}_z + B_z\hat{e}_y\right)}$$

- Considerando a ***carga como sendo um invariante***, $\rho$ e $\vec{J}$ não serão!

- Por exemplo, considere um *fio de seção retangular*, *muito longo*, em *repouso no referencial do Laboratório*, com uma *densidade uniforme de cargas positivas* $\rho$.

- Para um observador **0'** movendo-se com velocidade $V$ na direção $x$, as cargas *não estarão em repouso*.

- Na verdade, **0'** medirá densidade de carga $\rho'$ (uniforme) e *densidade de corrente* $\vec{J}'$).




$Q_{total}$ é um invariante, mas o comprimento do fio é contraído → $\rho' > \rho$

- Ou seja, para 0: $\rho = \dfrac{dq}{dV}$ e para 0': $\rho' = \dfrac{dq}{dV'} = \dfrac{dq}{dx'dy'dz'}$

- Usando que $\underline{dy' = dy}$, $\underline{dz' = dz}$ e $\underline{dx' = dx\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$ (contração dos espaços)

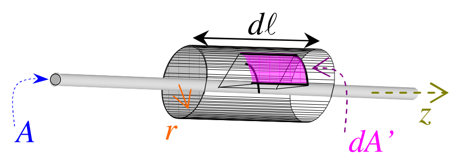
- Então: $\rho' = \dfrac{dq}{\underbrace{dx\,dy\,dz}_{=dV}} \boxed{\dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{1-V^2/c^2}}_{=\gamma}}}$ $\therefore$ $\boxed{\rho' = \gamma\rho}$ $\Rightarrow$ **0'** mede um ***valor maior*** para a densidade volumétrica de cargas

- Com relação à ***densidade de corrente***, enquanto **0** mede $\vec{J} = \rho\vec{v} = 0$ o observador **0'** verá as cargas movimentando-se com $\vec{v}' = -\vec{V}$, de forma que este mede:

$$\vec{J}' = \rho'\vec{v}' = -(\gamma\rho)(V\hat{e}_x)$$

- Quero agora ***calcular os campos*** $\vec{E}$ e $\vec{B}$ medidos por **0** e **0'** a partir dos seus respectivos referenciais.

- Para simplificar, vou considerar o *fio longo* de comprimento ***L***, ***em repouso no referencial de 0***, com *densidade de cargas* $(+\rho)$ uniforme, como tendo seção circular de raio ***R*** e área ***A***.




- Para 0: $\boxed{\vec{B} = 0}$, pois $\vec{J} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{//} = 0 \text{ e } \vec{B}_{\perp} = 0}$

- Quanto ao campo $\vec{E}$, *pela Lei de Gauss*:

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,\underbrace{dA'}_{=rd\phi dz} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\text{int}} \rho dV \Rightarrow (E)(2\cancel{\pi}r)(\cancel{\Delta\ell}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)(\rho)\underbrace{(\pi R^2)(\cancel{\Delta\ell})}_{=dV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = E\,\hat{e}_r = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\vec{E}_{//} = 0} \\ \boxed{\vec{E}_{\perp} = \vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{\varepsilon_0 r}\hat{e}_r} \end{cases}$$

- Agora, aplicando *Lei de Gauss para 0'* ( que mede $\rho'$ devido à contração do fio, em relação ao seu comprimento):

$$\vec{E}' = \frac{\rho' R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\vec{E}'_{//} = 0} \\ \boxed{\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' = \dfrac{\gamma\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r} \end{cases}$$

- Quanto ao campo $\vec{B}'$, *ele não é nulo para 0'*, pois este mede uma ***densidade de corrente*** $\vec{J}'$.

- Então, aplicando a *Lei de Ampére* (note que pela geometria $\vec{B}' = B'\hat{e}_\phi$):

$$\oint \vec{B}'\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{enl.} \vec{J}'\cdot \hat{n}\, dA \;\Rightarrow\; (B')(2\pi r) = (\mu_0)(-\gamma\rho V) \underbrace{\int dA}_{=A'=A\,\equiv\, \text{área da reação transversal do fio}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; B' = \frac{-\mu_0\gamma\rho V A}{2\pi r} = \frac{-\mu_0\gamma\rho V\,\cancel{\pi} R^2}{2\,\cancel{\pi}\, r} \;\therefore\; \boxed{\vec{B}' = \frac{-\gamma\rho V R^2}{2\varepsilon_0 c^2 r}\hat{e}_\phi}$$

$$\left(c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right)$$

- Observe que estes resultados teriam sido obtidos *muito mais facilmente* através das ***equações de transformação dos campos***:

$$\vec{E}'_\perp = \gamma\left[\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r + 0\right] = \frac{\gamma\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_r \quad \checkmark$$

$$\vec{B}'_\perp = \gamma\left[0 - \frac{VE}{c^2}\underbrace{(\hat{e}_x \times \hat{e}_r)}_{=\hat{e}_\phi}\right] = -\frac{\gamma V}{c^2}\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{e}_\phi \quad \checkmark$$