

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

COMPLEMENTOS

DE

FÍSICA EXPERIMENTAL

(2ª PARTE)

J. H. VUOLO

2005

Prefácio

Este texto foi escrito para complementar as apostilas de roteiros de experiências realizadas na disciplina de Física Experimental 4. Este texto parece necessário, uma vez que os assuntos considerados não são considerados ou são tratados superficialmente em livros de Física Geral. Por outro lado, tais assuntos são tratados de maneira muito difícil em livros específicos.

Agradecimentos ao Prof. Aluisio N. Fagundes pela grande ajuda com o computador e com os programas, usados na edição das apostilas.

São Paulo, 7 de Dezembro de 1994

José Henrique Vuolo

Índice

11. Bipolos em corrente alternada	pg. 115
11.1 Introdução	pg. 115
11.2 Quantidades complexas	pg. 117
11.3 Representação por complexos	pg. 119
11.4 Impedâncias complexa e real	pg. 119
11.5 Potência transferida a um bipolo	pg. 120
11.6 Resistor, capacitor e indutor	pg. 122
11.7 Associações de bipolos	pg. 124
11.8 Circuito RLC-série	pg. 124
11.9 Fasores	pg. 126
12. Componentes não ideais	pg. 129
12.1 Introdução	pg. 129
12.2 Capacitor real	pg. 131
12.3 Indutor real	pg. 135
12.3.1 Bobina sem núcleo magnético	pg. 135
12.3.2 Bobina com núcleo magnético	pg. 139
12.3.3 Modelos para indutor real	pg. 141
12.3.4 Associações de indutores	pg. 142
12.4 Resistor real	pg. 143

13. Quadripolos	pg. 145
13.1 Considerações gerais	pg. 145
13.2 Impedâncias de entrada e saída	pg. 147
13.3 Ganho complexo e ganho real	pg. 148
13.4 Integradores e diferenciadores	pg. 149
13.3.1 Circuitos integradores passivos	pg. 151
13.4.2 Circuitos diferenciadores passivos	pg. 152
13.4.3 Superposição de frequências	pg. 154
13.5 Filtros	pg. 158
13.6 Acoplamento de impedâncias	pg. 159
13.7 Transformadores	pg. 162
13.7.1 Transformador com carga resistiva	pg. 165
13.7.2 Transformador de acoplamento unitário	pg. 166
13.7.3 Transformador ideal	pg. 167
13.7.4 Observações gerais sobre transformadores	pg. 168
14. Amplificador operacional	pg. 173
14.1 Amplificador operacional ideal	pg. 173
14.2 Op-amps não ideais	pg. 175
14.3 Amplificadores simples	pg. 179
14.3.1 Amplificador inversor simples	pg. 179
14.3.2 Somador inversor simples	pg. 181
14.3.3 Amplificador não inversor simples	pg. 182

14.4 Diferenciadores e integradores	pg. 183
14.5 Configurações diferenciais	pg. 185
14.6 Observações gerais	pg. 187
15. Lasers e aplicações	pg. 191
15.1 Breve histórico	pg. 191
15.2 Alguns conceitos preliminares	pg. 193
15.2.1 Ressonador ótico	pg. 193
15.2.2 Inversão de população e bombeamento	pg. 194
15.2.3 Mecanismos de desexcitação	pg. 198
15.3 Princípio de funcionamento do laser	pg. 199
15.4 Características da radiação do laser	pg. 201
15.5 Tipos de lasers	pg. 203
15.6 Alguns lasers comuns	pg. 205
15.7 Aplicações de lasers	pg. 209
15.7.1 Tratamento de materiais	pg. 209
15.7.2 Holografia	pg. 211
15.7.3 Separação isotópica	pg. 213
15.7.4 Outras aplicações	pg. 213

11

Bipolo em corrente alternada

O comportamento de um bipolo com tensão e corrente alternadas é resumido nesta Seção. Por bipolo, entende-se qualquer componente ou circuito com dois terminais.

11.1 Introdução

Uma tensão alternada¹ é uma diferença de potencial $V(t)$, que varia *harmonicamente com o tempo*². A tensão alternada é mostrada na Figura 11.1 e a *amplitude* pode ser descrita como

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad (11.1)$$

onde V_m , ω e ϕ_0 são constantes. O argumento da função cosseno é definido como fase da tensão alternada:

$$\phi = (\omega t + \phi_0) \quad (11.2)$$

A constante V_m é a *amplitude máxima* da tensão, também chamada *valor de pico*, enquanto que $V_{pp} = 2V_m$ é chamado *valor de pico a pico*.

¹A leitura prévia da Seção 8 da 1ª Parte desta apostila é recomendada.

²Varição harmônica no tempo é entendida como variação do tipo *sen at*.

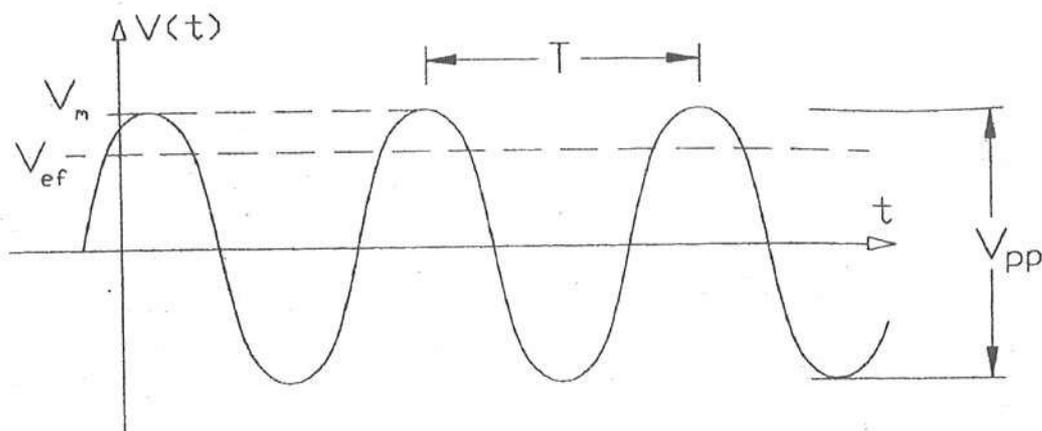


Figura 11.1: Tensão alternada.

A constante ϕ_0 é a fase da tensão alternada no instante $t = 0$. Quando possível, é conveniente escolher esta fase como 0. Se existem duas ou mais tensões alternadas envolvidas, pode-se escolher a fase inicial ϕ_0 de uma delas como 0.

A constante ω é a *frequência angular*, que é diretamente relacionada com a frequência f e com o período T pelas relações

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (11.3)$$

Uma corrente alternada pode ser representada da forma análoga:

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \phi_1) \quad (11.4)$$

A importância do estudo de corrente alternada pode ser avaliada pelas considerações apresentadas a seguir.

- A produção transmissão e distribuição da energia elétrica comercial é feita em corrente alternada, com exceção de algumas linhas de transmissão muito longas que funcionam em corrente contínua.

• Muitos dispositivos, equipamentos ou sistemas eletrônicos tem o seu funcionamento baseado na geração de uma corrente alternada ou aproximadamente alternada. A corrente alternada é gerada em *osciladores* construídos a partir de *circuitos RLC*, *cristais*, *klystrons*, *mágnetrans*, *gyrotrons* e outros dispositivos.

• Uma corrente qualquer, variável no tempo, pode ser entendida como uma superposição de correntes alternadas de frequências definidas³. Isto significa que a compreensão do comportamento de um circuito com corrente alternada simples (de frequência definida) permite compreender o comportamento deste circuito num caso mais complicado, em que a corrente é arbitrariamente variável com o tempo.

• O formalismo matemático usado em corrente alternada se aplica igualmente bem a qualquer tipo de oscilação. Assim, oscilações mecânicas, oscilações ou ondas eletromagnéticas e outras, podem ser representadas por *quantidades complexas*, da mesma maneira que para uma corrente alternada.

11.2 Quantidades complexas

Algumas propriedades de quantidades complexas são resumidas a seguir. Uma quantidade complexa qualquer pode ser representada na forma

$$\hat{C} = a + j b \quad \text{onde} \quad j = \sqrt{-1} \quad (11.5)$$

sendo a e b quantidades reais. Com exceção de j , uma quantidade complexa será indicada aqui pelo símbolo \wedge sobre a letra que representa a quantidade. Uma quantidade complexa qualquer \hat{C} também pode ser expressa pela *fórmula de Euler*⁴:

$$\hat{C} = C e^{j\alpha} \quad \text{onde} \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha \quad (11.6)$$

³Matematicamente, a tensão qualquer é uma série ou integral de Fourier. Uma abordagem mais detalhada é apresentada no Capítulo 20 da Referência 1.

⁴A demonstrações desta fórmula é baseada na expansão em séries de potências das quantidades envolvidas.

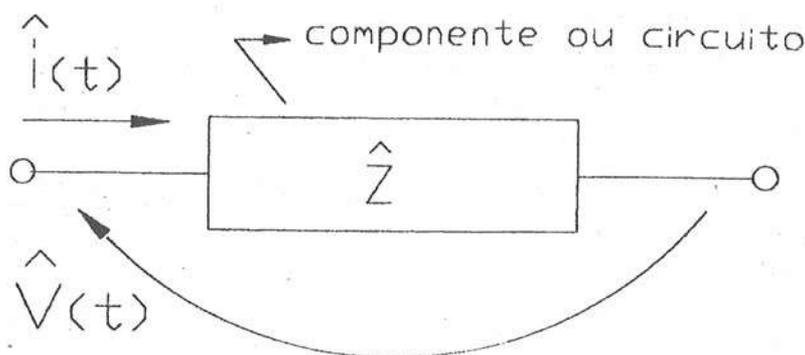


Figura 11.2: Tensão e corrente alternadas num bipolo.

O módulo C e o ângulo α são dados pelas relações

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (11.7)$$

O complexo conjugado de \hat{C} é dado por

$$\hat{C}^* = a - jb = C e^{-j\alpha} \quad (11.8)$$

Como pode ser visto, para se obter o complexo conjugado de \hat{C} , basta substituir j por $-j$. Esta regra é válida mesmo quando a expressão para \hat{C} é mais complicada. Esta regra é muito útil para se obter o módulo de uma expressão complicada, usando a relação

$$C = \sqrt{\hat{C} \hat{C}^*} \quad (11.9)$$

As partes *real* e *imaginária* de $e^{j\alpha}$ são, respectivamente,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (11.10)$$

A derivada e a integral⁵ de $e^{j\omega t}$, em relação a t , são dadas por

$$\frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t} \quad \text{e} \quad \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \quad (11.11)$$

Em resumo, derivar $e^{j\omega t}$ em relação a t equivale a multiplicar por $j\omega$, enquanto que integrar equivale a dividir por $j\omega$.

⁵Integral a menos de uma constante arbitrária

11.3 Representação por complexos

Uma tensão alternada

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad (11.12)$$

pode ser representada pela *parte real* da quantidade complexa

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) &= V_m e^{j(\omega t + \phi_0)} \\ &= V_m \cos(\omega t + \phi_0) + j V_m \sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned} \quad (11.13)$$

Uma corrente alternada $i(t) = i_m \cos \omega t$ pode ser representada de maneira análoga, como a *parte real* de

$$\hat{i}(t) = i_m e^{j\omega t} = i_m \cos \omega t + j i_m \sin \omega t \quad (11.14)$$

Em geral, a corrente alternada também deve ser dada na forma da Equação 11.4. Entretanto a fase ϕ_1 foi omitida aqui, por simplicidade, uma vez que não é necessária no tratamento apresentado a seguir.

11.4 Impedâncias complexa e real

Em corrente alternada, o comportamento de um bipolo pode ser caracterizado por uma *impedância complexa* \hat{Z} , definida por⁶

$$\hat{V}(t) = \hat{Z} \hat{i}(t) \quad (11.15)$$

onde $\hat{V}(t)$ representa a tensão aplicada e $\hat{i}(t)$ representa a corrente elétrica, como mostrado na Figura 11.2.

A impedância complexa \hat{Z} pode ser escrita na forma

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_m} \quad (11.16)$$

onde o módulo Z_0 é definido como *impedância* (real) do bipolo.

Substituindo as expressões 11.13, 11.14 e 11.16 na Equação 11.15, obtém-se

$$V_m e^{j(\omega t + \phi_0)} = Z_0 i_m e^{j\phi_0} e^{j\omega t} \quad (11.17)$$

⁶Justificativa mais detalhada pode ser obtida nas Referências 1 e 2.

Assim, resultam

$$V_m = Z_0 i_m \quad \text{e} \quad \phi_0 = \phi_m \quad (11.18)$$

Em resumo, se a corrente num bipolo com impedância $\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_0}$ é

$$i(t) = i_m \cos \omega t \quad (11.19)$$

a tensão nos terminais deste bipolo é

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{onde} \quad V_m = Z_0 i_m \quad (11.20)$$

Isto é, se a corrente é alternada, a tensão também é alternada com *fase adiantada* ϕ_0 em relação à corrente e com amplitude máxima dada por $V_m = Z_0 i_m$.

Como pode ser visto, o comportamento de um bipolo em corrente alternada fica perfeitamente determinado, se a *impedância complexa* $\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_0}$ é conhecida.

Em geral, a impedância é dividida nas suas partes real e imaginária,

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi_0} = R + jX \quad (11.21)$$

onde

$$R = Z_0 \cos \phi_0 \quad \text{e} \quad X = Z_0 \sin \phi_0 \quad (11.22)$$

são chamadas de *parte resistiva* (R) e *reatância* (X), respectivamente.

11.5 Potência transferida a um bipolo

A potência transferida do circuito para uma impedância em cada instante t é dada por⁷

$$P(t) = V(t) i(t) \quad (11.23)$$

Substituindo as expressões 11.19 e 11.20, obtém-se⁸

$$P(t) = V_m i_m \cos \omega t \cos(\omega t + \phi_0) \quad (11.24)$$

⁷Esta fórmula é deduzida na Seção 1.2 da 1ª Parte desta Apostila. É uma fórmula completamente geral, válida para qualquer bipolo, em quaisquer condições.

⁸Ver Questão 3.

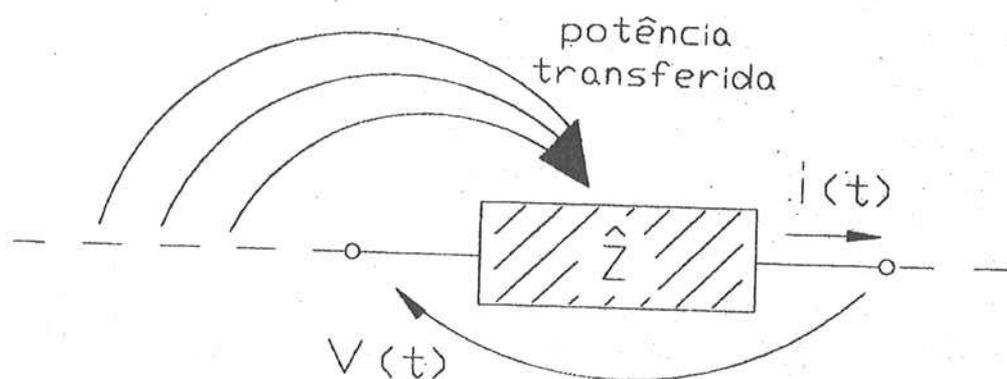


Figura 11.3: Potência transferida a uma impedância

A expressão também pode ser escrita como

$$P(t) = \frac{1}{2} V_m i_m \cos \phi_0 + \frac{1}{2} V_m i_m \cos(2\omega t + \phi_0) \quad (11.25)$$

Nesta expressão, o segundo termo se anula, em média. Assim, resulta que a *potência média* transferida para a impedância é dada por

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_m i_m \cos \phi_0 \quad (11.26)$$

Os valores eficazes para tensão e corrente são definidos por

$$V_{ef} = V_m / \sqrt{2} \quad \text{e} \quad i_{ef} = i_m / \sqrt{2} \quad (11.27)$$

Assim, obtém-se

$$\bar{P} = V_{ef} i_{ef} \cos \phi_0 \quad (11.28)$$

Por isso, $\cos \phi_0$ é chamado *fator de potência* da impedância. No caso de uma simples resistência,

$$\phi_0 = 0, \quad \cos \phi_0 = 1 \quad \text{e} \quad \bar{P} = V_{ef} i_{ef} \quad (11.29)$$

Para circuitos envolvendo capacitores e indutores, o fator de potência $\cos \phi_0$ é diferente de 1, em geral.

11.6 Resistor, capacitor e indutor

No caso de um resistor R , a relação entre tensão e corrente é

$$V = Ri \quad \text{ou} \quad \hat{V} = R\hat{i} \quad (11.30)$$

Comparando com a expressão 11.15 ($\hat{V} = \hat{Z}\hat{i}$), resulta que

$$\hat{Z} = R \quad (11.31)$$

Isto é, no caso de um simples resistor, a impedância é a própria resistência R e não existe defasagem entre tensão e corrente ($\phi_0 = 0$).

Para um indutor,

$$V = L \frac{di}{dt} \quad \text{ou} \quad \hat{V} = L \frac{d\hat{i}}{dt} = j\omega L \hat{i} \quad (11.32)$$

Comparando com a expressão 11.15 ($\hat{V} = \hat{Z}\hat{i}$), resulta que

$$\hat{Z} \equiv \hat{X}_L = j\omega L \quad (11.33)$$

Esta impedância complexa \hat{X}_L , associada a uma indutância, é chamada *reatância indutiva complexa*. A fórmula de Euler mostra que

$$\hat{X}_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (11.34)$$

Portanto, para um indutor, $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, significando que a fase da tensão é *adiantada* de $\pi/2$ em relação à corrente. A amplitude máxima da tensão é dada por

$$V_m = Z_0 i_m \equiv X_L i_m \quad (11.35)$$

onde $X_L = \omega L$ é chamada *reatância indutiva (real)*.

Para um capacitor, a menos de uma constante,

$$V = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{ou} \quad \hat{V} = \frac{1}{C} \int \hat{i} dt = \frac{1}{j\omega C} \hat{i} \quad (11.36)$$

Comparando com a expressão 11.15 ($\hat{V} = \hat{Z}\hat{i}$), resulta que

$$\hat{Z} \equiv \hat{X}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (11.37)$$

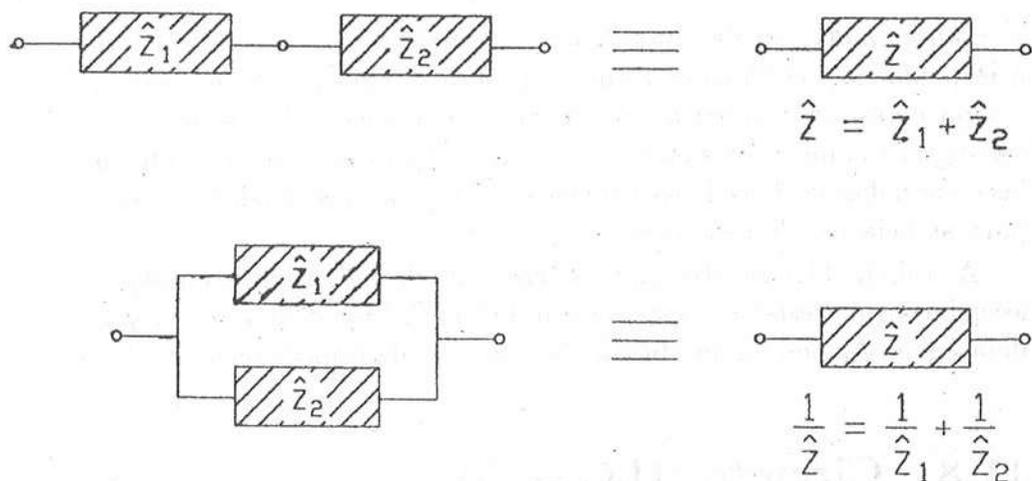


Figura 11.4: Associações de impedâncias complexas.

Esta impedância complexa \hat{X}_C associada a um capacitor é chamada *reatância capacitiva complexa*. A fórmula de Euler mostra que

$$\hat{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (11.38)$$

Portanto, para um capacitor, $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$, significando que a fase da tensão é *atrasada* de $\pi/2$ em relação à corrente. A amplitude máxima da tensão é dada por

$$V_m = Z_0 i_m \equiv X_C i_m \quad (11.39)$$

onde $X_C = \frac{1}{\omega C}$ é chamada *reatância capacitiva (real)*.

A *potência média* transferida para indutor ou capacitor, é

$$\bar{P} = V_{ef} i_{ef} \cos \phi_0 = 0 \quad (11.40)$$

Isto significa que, em média, não há transferência de potência de um circuito para um capacitor ou para um indutor. Entretanto, em cada instante, a potência $P(t)$ é dada por 11.25 e pode ser diferente de zero.

11.7 Associações de bipolos

A grande vantagem das *impedâncias complexas* consiste no fato que a impedância complexa equivalente de um circuito qualquer pode ser obtida pelas mesmas regras simples para associações de resistores. Estas regras são mostradas na Figura 11.4. A demonstração destas fórmulas é baseada nas Leis de Kirchoff e é análoga ao caso da demonstração para associações de resistores.

A Tabela 11.1 mostra *impedâncias complexas* para exemplos de associações de resistor, capacitor e indutor. A impedância real Z_0 e a defasagem ϕ_0 podem ser obtidas diretamente da impedância complexa.

11.8 Circuito RLC-série

Um exemplo de associação de bipolos é o circuito *RLC-série*. A impedância complexa é a soma da resistência e das reatâncias complexas:

$$\hat{Z} = R + \hat{X}_L + \hat{X}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (11.41)$$

A impedância real é

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (11.42)$$

e a defasagem ϕ_0 é obtida por

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \quad (11.43)$$

Se uma tensão de amplitude máxima V_m é aplicada ao circuito, a amplitude máxima de corrente é

$$i_m = \frac{V_m}{Z_0} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (11.44)$$

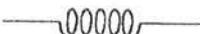
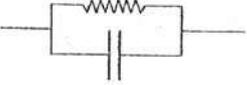
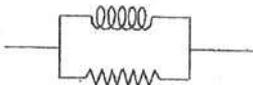
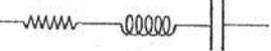
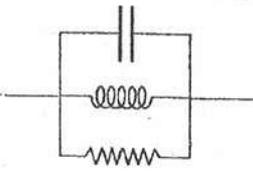
Circuito		Impedância complexa
R		R
L		$j\omega L$
C		$\frac{1}{j\omega C}$
RC série		$R + \frac{1}{j\omega C}$
RC paralelo		$\frac{R+1}{j\omega RC}$
RL série		$R + j\omega L$
RL paralelo		$\frac{j\omega RL}{R+j\omega L}$
RLC série		$R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$
RLC paralelo		$\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$

Tabela 11.1: Impedâncias complexas de associações simples.

11.9 Fasores

A soma de duas tensões alternadas arbitrárias, mas de mesma frequência, pode ser escrita como

$$V(t) = V_{1m} \cos(\omega t + \phi_{10}) + V_{2m} \cos(\omega t + \phi_{20}) \quad (11.45)$$

Isto equivale a somar as componentes x de 2 vetores de módulos V_{1m} e V_{2m} girando com velocidade angular ω no plano- xy e com ângulos iniciais ϕ_{10} e ϕ_{20} . Evidentemente, os vetores *podem ser somados diretamente*, considerando-se a componente- x do “vetor soma”. Além disso, pode-se realizar a soma vetorial no instante $t = 0$, pois a partir deste instante, o “vetor soma” também gira com mesma velocidade angular.

Estes vetores girantes são chamados⁹ de *fasores* e podem ser utilizados para realizar somas tais como a da Equação 11.45.

No exemplo do circuito *RLC-série* as tensões (reais) se somam e a corrente é a mesma, resultando

$$V(t) = V_{Lm} \cos(\omega t + \phi_L) + V_{Rm} \cos(\omega t + \phi_R) + V_{Cm} \cos(\omega t + \phi_C) \quad (11.46)$$

Representado as tensões por fasores, as fases iniciais das tensões no indutor, no resistor e no capacitor são $+\frac{\pi}{2}$, 0 e $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente. A Figura 11.5 mostra os fasores \vec{V}_L , \vec{V}_R e \vec{V}_C correspondentes e o fasor soma \vec{V} .

Uma vez que no circuito *RLC-série* a corrente é a mesma, as amplitudes das tensões nos componentes são diretamente proporcionais às impedâncias reais dos mesmos. As defasagens das tensões também são as mesmas das impedâncias complexas. Assim, a resistência R , a reatância indutiva \hat{X}_L e a reatância capacitiva \hat{X}_C podem ser representadas por fasores e somadas como mostrado na Figura 11.6.

O método também pode ser aplicado para somar correntes defasadas, quando a tensão é a mesma, tal como no circuito *RLC-paralelo*.

O método dos fasores é um método alternativo ao uso de quantidades complexas, sendo mais simples de utilizar em circuitos simples, na falta de familiariedade na manipulação de quantidades complexas.

⁹Fasores são extensivamente usados nas Referências 1 e 2.

Entretanto, em casos gerais, a representação de tensões e correntes por meio de quantidades complexas constitui um método mais simples e eficaz para análise de circuitos. Por isso, mesmo os leitores familiarizados com fasores, deveriam aprender a usar quantidades complexas, na análise de circuitos com corrente alternada.

11.9.1 Questões

1. Demonstrar as expressões 11.7 a partir das expressões 11.5 e 11.6.
2. Demonstrar a Equação 11.9.
3. Demonstrar a Equação 11.24, usando as expressões 11.10.
4. Determinar as impedâncias reais Z_0 e as defasagens ϕ_0 para os circuitos mostrados na Tabela 11.1.
5. Esboçar os gráficos da impedância Z_0 em função da frequência para os circuitos *RLC-série* e *RLC-paralelo*.

Referências

1. W.H. Hayt Jr. y J.E. Kemmerly, *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, Libros McGraw-Hill, Mexico (1970).
2. C. M. Close, *Circuitos Lineares, Vol.1*, EDUSP e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (1975).
3. D. Halliday, R. Resnick e J. Merrill, *Fundamentos de Física - 3, Eletromagnetismo*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (1991).

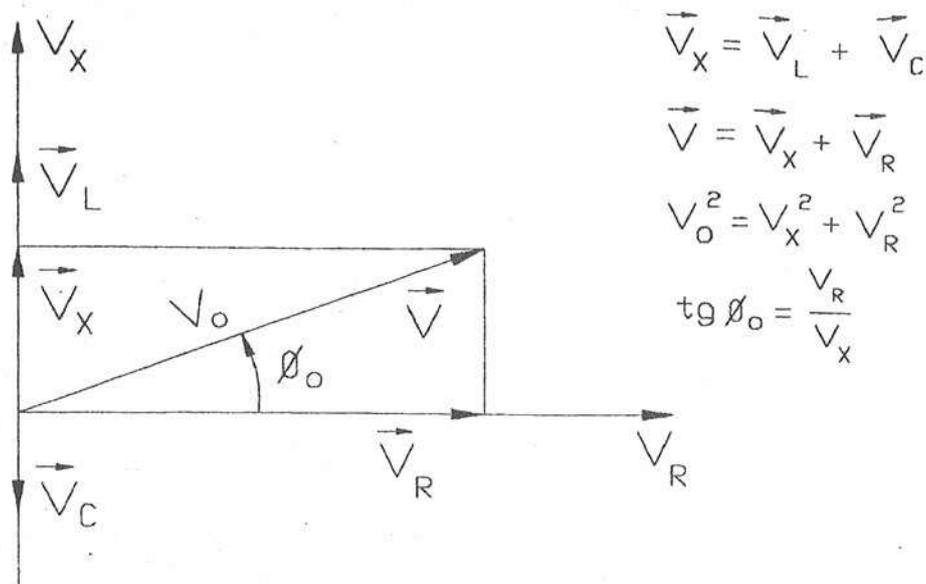


Figura 11.5: Fasores para soma de tensões alternadas.

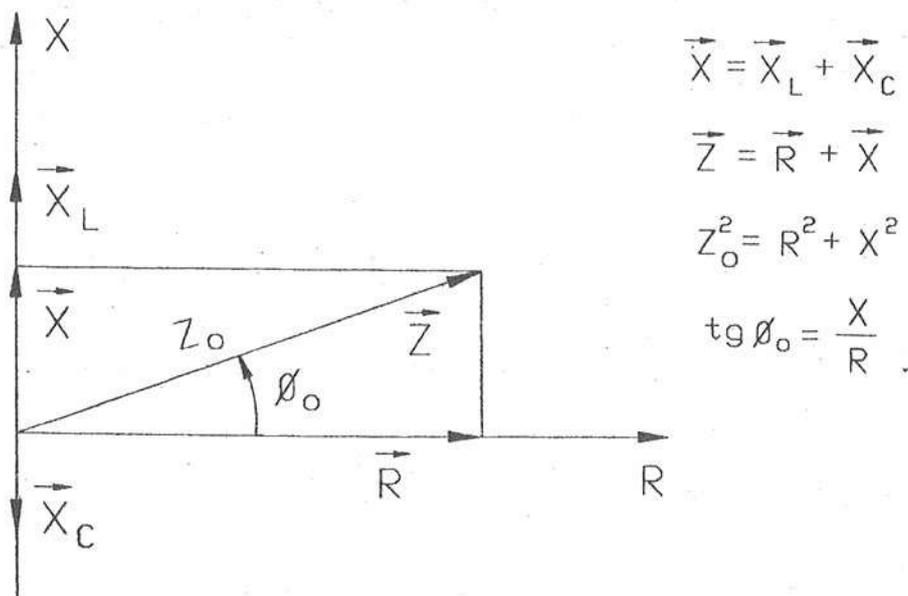


Figura 11.6: Soma de fasores representando impedâncias em série.

12

Componentes não ideais

Algumas limitações e modelos simples para capacitor, resistor e indutor reais (não ideais) são resumidos nesta seção.

12.1 Introdução

Capacitor ideal, resistor ideal e indutor ideal são, respectivamente, definidos pelas relações

$$V = \frac{1}{C} \int idt, \quad V = Ri \quad \text{e} \quad V = L \frac{di}{dt} \quad (12.1)$$

Para corrente alternada na frequência angular ω , estes componentes ideais são descritos pelas impedâncias:

$$\hat{X}_C \equiv \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{capacitor ideal}) \quad (12.2)$$

$$Z_R \equiv R \quad (\text{resistor ideal}) \quad (12.3)$$

$$\hat{X}_L \equiv \frac{1}{j\omega C} \quad (\text{indutor ideal}) \quad (12.4)$$

Os componentes reais correspondentes não se comportam exatamente conforme as definições. Com maior ou menor intensidade os efeitos capacitivo, resistivo e indutivo estão presentes em qualquer componente. Em geral, é possível descrever bem um determinado componente real como uma associação simples de componentes ideais.

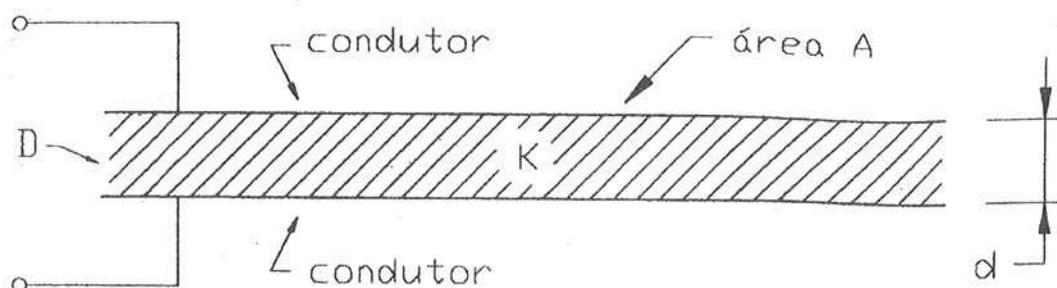


Figura 12.1: Desenho esquemático de um capacitor.

Tabela 12.1: Ordens de grandezas de características de dielétricos

Materiais	Constante dielétrica K	Rigidez dielétrica E_{rd} (kV/mm)
Ar seco	1.00059	≈ 2 ($d > 0,3\text{mm}$)
Plásticos	de 2 a 4	de 10 a 200
Ceras, parafinas, resinas e borrachas	de 2 a 3	de 10 a 40
Vidros e porcelanas	de 4 a 10	de 15 a 30
Micas	de 4 a 9	de 50 a 200
Cerâmicas especiais	de 5 a 2000	de 20 a 30
Óleos	de 2 a 5	≈ 20
Óxido de alumínio	7	≈ 100

Nas subseções seguintes, são apresentadas algumas limitações práticas de componentes reais e também alguns modelos úteis. Na elaboração de um modelo, deve sempre ser considerada a observação de ordem geral apresentada a seguir.

Um componente real (não ideal) é descrito como uma associação de componentes ideais. Matematicamente, o componente pode ser representado por uma impedância complexa conforme Equação 11.21 :

$$\hat{Z} = \text{Re } \hat{Z} + j \text{Im } \hat{Z} = R + jX \quad (12.5)$$

A potência média transferida para o componente é

$$\bar{P} = V_{ef} i_{ef} \cos \phi_0 \quad \text{onde} \quad \text{tg } \phi_0 = \frac{X}{R} = \frac{\text{Im } \hat{Z}}{\text{Re } \hat{Z}} \quad (12.6)$$

Portanto, se um determinado componente, *em média*, retira energia do circuito, $\cos \phi_0 \neq 0$ e a impedância tem parte real diferente de zero. Isto significa que, se o componente apresenta qualquer tipo de "perda" de energia, isto significa *efeito resistivo* e o modelo para o componente deve ter resistências representando estas "perdas". Por "perdas", entende-se qualquer energia retirada do circuito, em média, e convertida em outras formas de energia. Além de perdas por efeito ôhmico, perdas dielétricas, perdas por correntes de Foucault, histerese magnética, deve ser incluída a conversão em outras formas de energia tais como ondas sonoras, eletromagnéticas ou movimentos mecânicos.

12.2 Capacitor real

Um capacitor simples é constituído de um par de condutores separados por um dielétrico D de constante dielétrica K , como mostrado na Figura 12.1. A capacitância é dada por

$$C = f K \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (12.7)$$

onde $\epsilon_0 = 8,854 \dots \times 10^{-12} \text{ F/m}$, d é a distância entre os condutores, A a área que armazena cargas e f um fator adimensional menor ou aproximadamente igual a 1, conforme a *geometria* dos condutores.

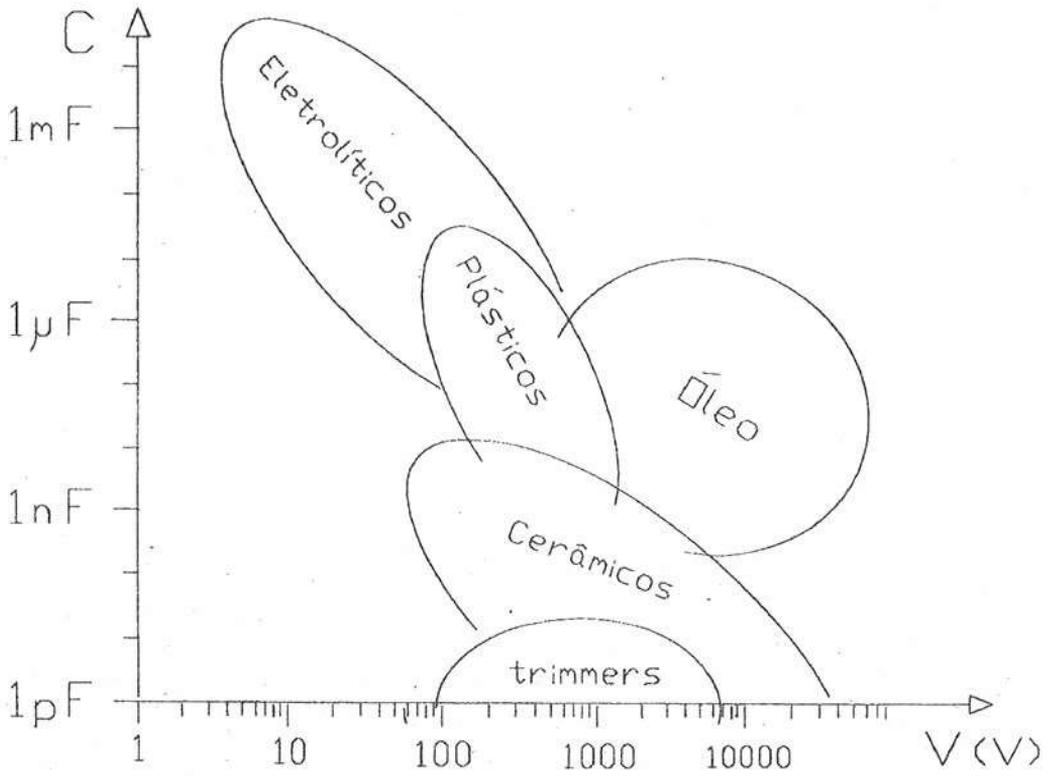


Figura 12.2: Características aproximadas de capacitores comerciais.

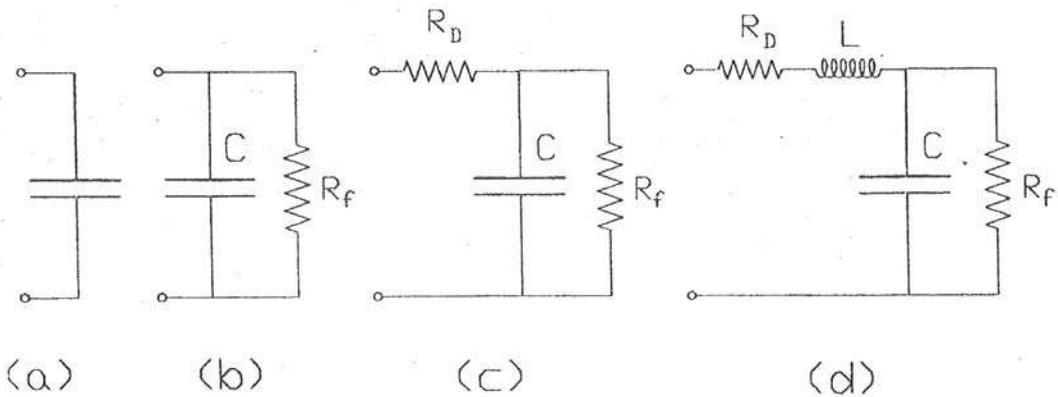


Figura 12.3: Modelos para capacitor não ideal.

Para capacitor plano de área A muito grande e separação d muito pequena, $f \cong 1$, o que corresponde ao capacitor de placas paralelas infinitas. Exceto se a geometria for muito diferente desta, a aproximação $f \cong 1$ pode ser usada na Equação 12.7, para estimar capacitâncias. Muitos capacitores comerciais são construídos a partir de um filme de isolante entre duas tiras condutoras, enrolando-se o conjunto. Externamente, o capacitor pode parecer um cilindro, mas a geometria é essencialmente a mesma de capacitor de placas paralelas.

A Tabela 12.1 mostra valores típicos para a constante dielétrica para materiais isolantes. Na expressão 12.7 a área é dada em m^2 . Assim, não é difícil ver que a única maneira de obter capacitâncias relativamente altas é por meio da diminuição da distância d . Por outro lado, existe um limite para a tensão que pode ser aplicada a um dielétrico. A rigidez dielétrica E_{rd} é a máxima tensão por unidade de distância que pode ser aplicada ao dielétrico sem destruir as suas propriedades isolantes e acima do qual inicia-se descarga elétrica no meio. Assim, resulta uma tensão máxima absoluta que pode ser aplicada ao capacitor:

$$V_{\text{limite}} \approx d E_{rd} \quad \text{onde} \quad (12.8)$$

Na prática, pequenos defeitos ou degradação do material dielétrico, efeito de pontas e outros efeitos podem provocar descarga elétrica no meio para valores bem abaixo do limite acima. Por isso, a tensão máxima de operação (V_{max}) especificada para um capacitor é muito menor que o limite estabelecido pela rigidez dielétrica, com boa margem de segurança.

Os capacitores comerciais são especificados pela capacitância e respectiva tolerância, pela tensão máxima de operação (V_{max}) e também pelo tipo de dielétrico usado. A Figura 12.2 mostra valores aproximados de C e V_{max} para os diversos tipos de capacitores. A diminuição de V_{max} com o aumento de C , como consequência da diminuição de d pode ser claramente observada na Figura 12.2.

Os maiores valores de C são para capacitores eletrolíticos, nos quais a capacitância ocorre entre uma camada metálica¹ e uma solução eletrolítica isoladas por uma fina camada de óxido que, essencialmente, é o dielétrico. Uma limitação do capacitor eletrolítico é que a tensão

¹Usualmente alumínio ou tântalo de alta pureza

aplicada deve ter *polaridade definida*. Devido às características do eletrólito e da camada de óxidos, o capacitor eletrolítico se torna praticamente um condutor e há risco de explosão, se a tensão é aplicada com polaridade invertida. Evidentemente, um capacitor eletrolítico simples não pode ser usado em corrente alternada. Os demais tipos de capacitores são insensíveis à polaridade da tensão aplicada².

Um dos problemas apresentado por capacitores reais são as chamadas *perdas dielétricas*. Uma destas perdas é devida à passagem de uma pequena corrente de condução pelo dielétrico. Esta "corrente de fuga" pode ser descrita considerando um modelo simples de capacitor ideal com uma resistência R_f em paralelo, como mostrado na Figura 12.3.b. Outros mecanismos também contribuem para perda de energia no dielétrico tais como dissipação de energia na *orientação e reorientação de dipolos* no interior do dielétrico e deformação do dielétrico. Estas perdas podem ser representadas por um resistor em série ou em paralelo ao capacitor. Como estas perdas não ocorrem com tensão constante, é preferível representá-las por meio de um resistor R_d em série com um capacitor ideal, como na Figura 12.3.c. Além disso, as resistências dos terminais de ligação e dos condutores do capacitor são melhor representadas por resistência em série.

Dependendo da geometria dos condutores e dos terminais de ligação, o capacitor pode também apresentar indutância significativa. Esta indutância pode ser considerada pelo modelo da Figura 12.3.d.

A conveniência de usar um ou outro modelo depende das circunstâncias e particularmente da frequência. O modelo de capacitor ideal pode ser plenamente satisfatório em baixas frequências, se existirem outras resistências no circuito que tornem R_f ou R_d irrelevantes. Em altas frequências, pode ser necessário usar o modelo com indutância em série. Deve ser lembrado que a reatância indutiva $X_L = \omega L$ aumenta com a frequência, enquanto que a reatância capacitiva $X_C = 1/\omega C$ diminui com a frequência. Em frequências suficientemente altas, o capacitor real pode ser mais um indutor do que um capacitor.

Um outro problema apresentado por capacitores é a *relaxação dielétrica*. Um capacitor, inicialmente carregado, é rapidamente descarregado e seus terminais são deixados em aberto, após a descarga. Verifi-

²Detalhes sobre capacitores e dielétricos são dados nas Referências 1, 2 e 3.

ca-se que, espontaneamente, pode reaparecer nos terminais do capacitor uma tensão. Isto se deve ao fato que, numa descarga rápida, os dipolos do dielétrico não se desalinham de forma que uma certa carga superficial de polarização segura uma carga livre residual nas placas do capacitor. A carga livre é cancelada pela carga superficial de polarização e a tensão nas placas se anula. Depois de algum tempo (tempo de relaxação dielétrica), os dipolos se desalinham no dielétrico e verifica-se o surgimento de uma tensão devida à carga livre residual. Dependendo do tempo de descarga e do tipo de capacitor, a tensão pode atingir a ordem de 10% do valor inicial, devido à relaxação dielétrica. Esta tensão que surge "espontaneamente", depois de se descarregar o capacitor, pode ser extremamente perigosa, no caso de altas tensões.

12.3 Indutor real

Usualmente, o indutor é uma bobina de fio, com ou sem núcleo magnético³. Para bobina de N espiras de área média A e comprimento l , a indutância em é dada por

$$L = f \mu \frac{N^2 A}{l} \quad (12.9)$$

onde f é um fator adimensional menor ou da ordem de grandeza de 1, que depende da geometria exata da bobina e μ é a *permeabilidade média* do material do núcleo, discutida na seqüência.

12.3.1 Bobina sem núcleo magnético

O fator adimensional f é exatamente igual a 1 para um solenóide ideal. Para solenóide curto de espiras circulares de raio r e comprimento l , pode ser usada a aproximação⁴

$$f \doteq \frac{1}{1 + 0.9 \frac{r}{l}} \quad \text{para } l > 0.8r \quad (12.10)$$

³Neste texto, materiais ferromagnéticos e ferrimagnéticos são denominados como "magnéticos", enquanto que materiais paramagnéticos e diamagnéticos são denominados "não magnéticos". Ver Referências 4 e 5, por exemplo.

⁴Ver Referência 4, por exemplo.

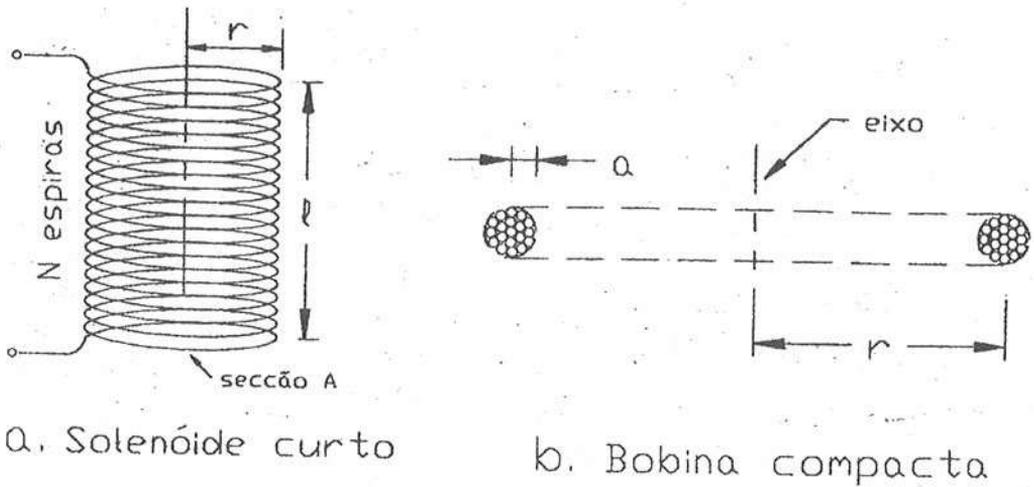


Figura 12.4: Exemplos de bobinas.

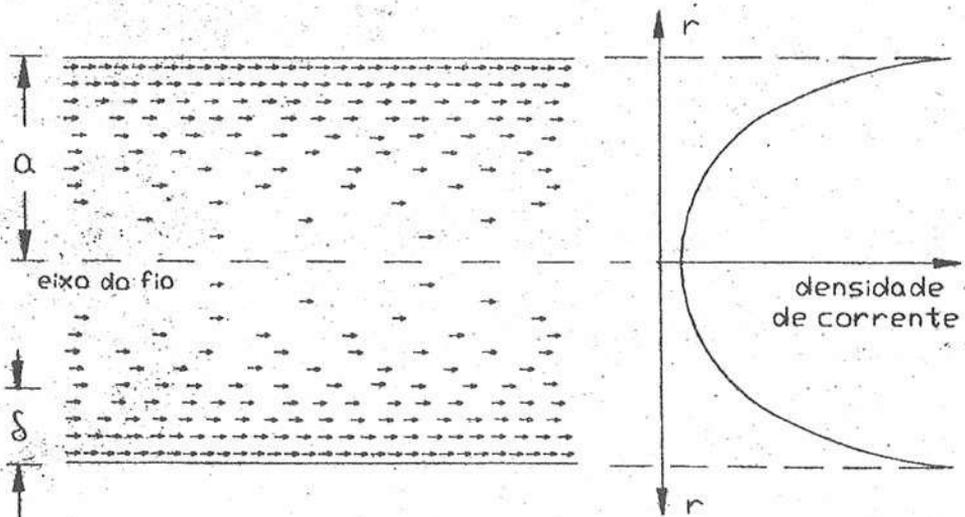


Figura 12.5: Distribuição de corrente num condutor em alta frequência.

Para uma bobina compacta de N espiras circulares de raio r , tal como a da Figura 12.4.b, pode-se usar a aproximação⁵

$$L \cong N^2 r \mu_0 \left[\ln\left(\frac{8r}{a}\right) - 2 \right] \quad (12.11)$$

onde $a \ll r$ é o raio médio da seção da bobina. Esta expressão também pode ser usada para uma única espira, sendo a o raio do fio.

Para bobinas sem núcleos magnéticos, isto é, núcleos de materiais paramagnéticos ou diamagnéticos, pode-se considerar como boa aproximação

$$\mu \cong \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2} \quad (12.12)$$

Na Equação 12.9, a área deve ser dada em m^2 . Isto mostra que indutâncias relativamente altas ($\gg 1 mH$) só podem ser obtidas para bobinas pequenas com um número N muito grande de espiras. Isto significa grande quantidade de fio fino e, portanto, com resistência elétrica não desprezível.

Uma indutância baixa só tem interesse para uso em altas frequências, pois $X_L = \omega L$. Neste caso, a distribuição de corrente deixa de ser uniforme⁶ e tende a se escoar pela superfície do condutor, como mostrado na Figura 12.5. Numa frequência angular ω , a corrente elétrica tende a se concentrar numa camada superficial ("skin depth") de espessura δ dada por

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\omega}} \quad (12.13)$$

onde ρ é a resistividade do meio. Assim, resulta que a resistência efetiva R_{ef} em altas frequências pode ser bem maior que a resistência R_0 em corrente contínua. A resistência efetiva de um fio de raio a , em altas frequências é dada por⁷

$$R_{ef} = \frac{a}{2\delta} R_0 \quad (12.14)$$

Por exemplo, obtém-se $\delta = 0,021 mm$, para cobre na frequência de $10 MHz$. Assim, para um fio de cobre de $1 mm$ de raio, a resistência efetiva em $10 MHz$ é $R_{ef} \cong 24 R_0$.

⁵Ver Seções 5.24 e 5.25 da Referência 4, por exemplo.

⁶Ver Seção 5.16 da Referência 4 ou Referência 5.

⁷Ver Seção 5.17 da Referência 4, por exemplo. Ver também Questão 1.

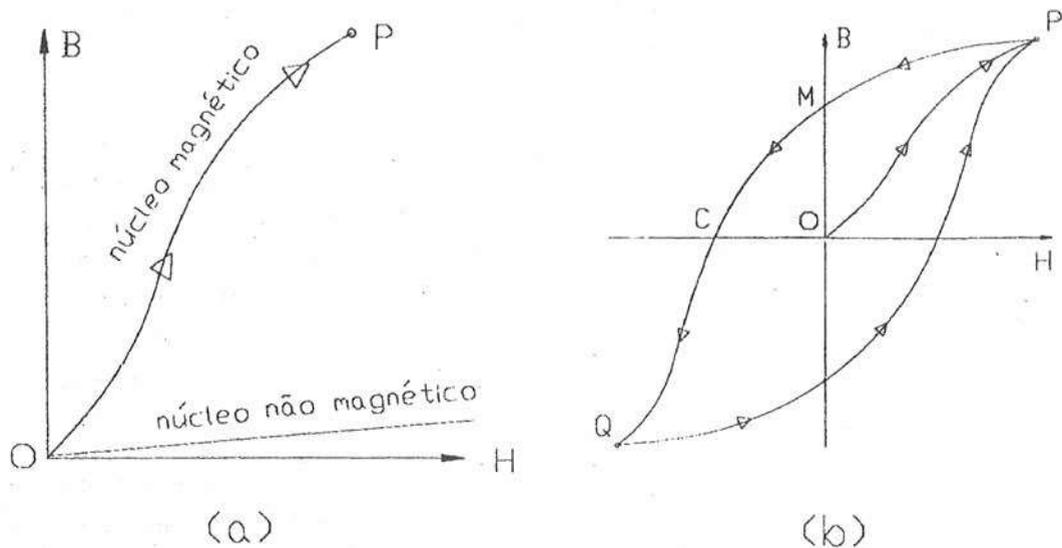


Figura 12.6: Curvas de magnetização para materiais magnéticos.

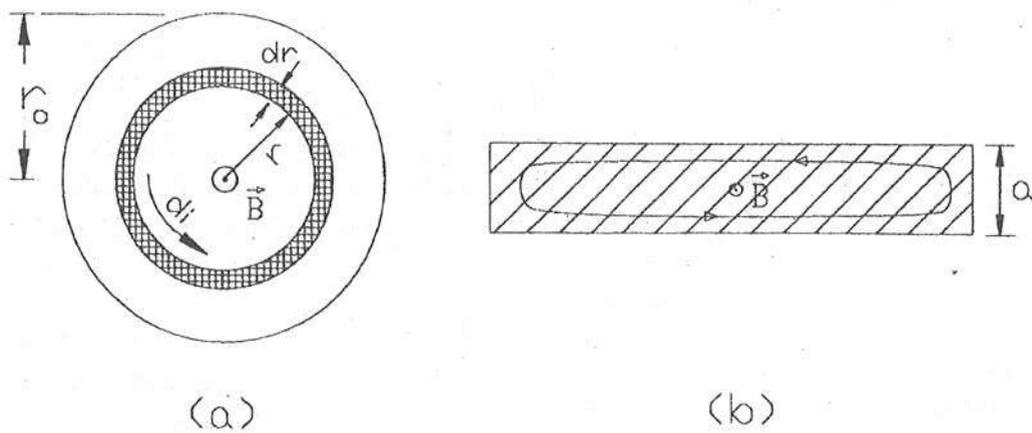


Figura 12.7: Correntes de Foucault num cilindro e numa lâmina.

12.3.2 Bobina com núcleo magnético

No caso de núcleo magnético, o fluxo fora do material magnético é desprezível, em geral. Neste caso, a área A pode ser considerada como a secção transversal do núcleo, aproximadamente. A permeabilidade média μ deve ser obtida da relação entre a *indução magnética* B e da *intensidade de campo magnético* H :

$$\mu \cong \frac{dB}{dH} \quad (12.15)$$

Entretanto, a relação entre B e H para material magnético é complicada, como mostrado no Figura 12.6.b. Aplicando-se um campo H numa amostra inicialmente desmagnetizada, a relação entre B e H segue a curva OP. Se H é reduzido e invertido, B segue as curvas PM, MC e assim por diante. Resulta que μ não pode ser definido de maneira geral, mas somente em condições bastante particulares. Por exemplo, para material desmagnetizado e H pouco intenso⁸, pode-se considerar a *permeabilidade inicial* μ_i , que é o valor da permeabilidade $\mu = dB/dH$ na região inicial da curva OP, como aproximação. Valores típicos de μ_i variam de 5 a 1000 μ_0 para materiais ferromagnéticos e ferrimagnéticos (ferrites), mas podem atingir valores muito maiores para certas ligas magnéticas especiais ou ferrites especiais.

Indutâncias relativamente altas ($\gg 1 mH$) podem ser obtidas para bobinas pequenas com pequeno número N espiras, usando-se núcleo de material magnético, devido aos valores altos de μ_i . Assim, o fio da bobina pode ter resistência desprezível. Entretanto existem perdas de energia no núcleo magnético, devidas a vibrações ou movimentos do núcleo, *histerese magnética*, *correntes de Foucault* e outros efeitos.

As correntes de Foucault são correntes induzidas no núcleo magnético devido ao campo magnético variável. Como exemplo, a Figura 12.7.a mostra um cilindro de raio r_0 , resistividade ρ , com eixo perpendicular a um campo magnético alternado de baixa frequência. A potência média por unidade de volume que é dissipada por efeito ôhmico é dada aproximadamente por⁹

$$\bar{p} \approx \frac{r_0^2 \omega^2 B_0^2}{16\rho} \quad (12.16)$$

⁸Isto significa correntes baixas na bobina.

⁹Ver Questão 2.

onde o campo magnético é dado por $B = B_0 \cos \omega t$ e as correntes induzidas são admitidas suficientemente baixa para não impedir a penetração do campo magnético externo.

No caso de lâmina metálica de espessura a , como mostrado na Figura 12.7.b, a potência média por unidade de volume que é dissipada por efeito ôhmico é dada aproximadamente por¹⁰

$$\bar{p} \approx \frac{a^2 \omega^2 B_0^2}{24 \rho} \quad (12.17)$$

Assim, a resistividade finita do núcleo resulta em perdas inversamente proporcionais à resistividade. Os materiais ferromagnéticos são metais puros ou ligas metálicas com resistividade relativamente baixa e; portanto, com altas perdas por corrente de Foucault.

A Equação 12.17 mostra que a perda é proporcional ao quadrado da espessura a . Uma maneira de reduzir esta perda é usando núcleo formado por lâminas dispostas paralelamente ao campo magnético. Em bobinas e transformadores comuns para frequência de 60 Hz, com núcleo de ferro-silício, são utilizadas lâminas de 0,3 a 0,6 mm. Entretanto, para frequências maiores a espessura deve ser menor, pois a perda aumenta com ω^2 . No caso de frequências muito altas, pode ser inviável usar ferro em lâminas.

As perdas por correntes de Foucault também podem ser reduzidas usando núcleos de materiais ferrimagnéticos (ferrites) que têm resistividades muito altas.

Além das perdas por correntes de Foucault, existem as perdas por *histerese magnética*. A Figura 12.6.b mostra um exemplo de *ciclo de histerese (c.h.)* para uma amostra material ferromagnético. A amostra vai de P a Q, passando por C, e volta a P, passando por D. A densidade de energia na amostra é restabelecida, mas é necessário fornecer energia para realizar o ciclo de histerese. A energia por unidade de volume que deve ser fornecida é dada por¹¹

$$u = \oint_{c.h.} H dB \quad (12.18)$$

¹⁰Ver Seção 2.2 da Referência 6, por exemplo.

¹¹Ver Referência 5, por exemplo.

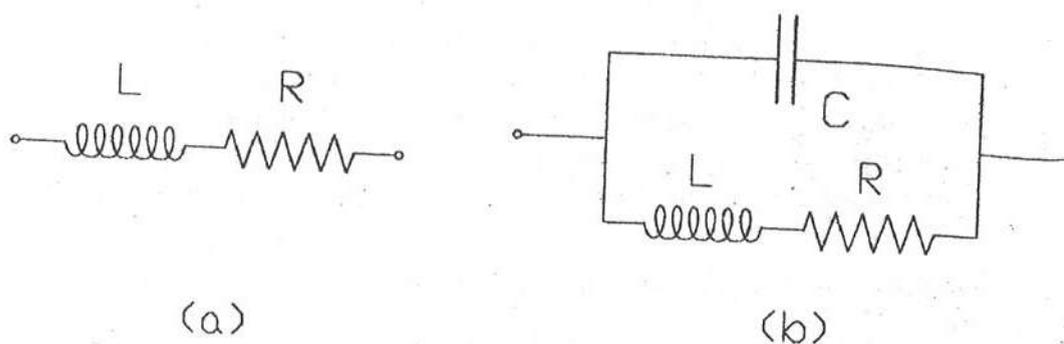


Figura 12.8: Modelos para indutor real.

Isto é, a perda de energia por unidade de volume no percurso PQP da Figura 12.6.b, no sentido indicado é a *área do ciclo de histerese*. O campo \vec{H} é diretamente relacionado com a corrente elétrica, pela Lei Circuital de Ampère. Assim, em corrente alternada, o campo \vec{H} é alternado e, em cada ciclo de oscilação da corrente, a amostra realiza um ciclo de histerese completo. Uma vez que, em cada ciclo completo, a energia armazenada na amostra é restabelecida, a perda de energia por unidade de volume é área do ciclo de histerese.

12.3.3 Modelos para indutor real

Conforme discutido, as perdas raramente podem ser desprezadas em uma bobina. Isto significa que, em geral, um *modelo para indutor real* deve incluir resistências para descrever tais perdas.

Em geral, o indutor real pode ser bem descrito por um modelo de indutor ideal em série com um resistor, como mostrado na Figura 12.8.a. Entretanto, a resistência R_{ef} pode não ser a simples resistência R_0 do fio para corrente contínua, como mostrado nas subseções anteriores.

As espiras de uma bobina são condutores justapostos e, por isso, podem apresentar efeito capacitivo significativo, no caso de grande número de espiras. A Figura 12.7.b mostra um modelo para descrever a capacitância correspondente.

Indutores sem núcleos magnéticos podem ser especificados pela indutância L , pela resistência R_0 do fio em corrente contínua e pela corrente máxima admissível. Entretanto, deve ser observado que, diferentemente de resistores e capacitores, indutores não são fabricados e vendidos comercialmente sob especificação de valores nominais. A grande maioria das bobinas encontradas comercialmente são peças de reposição para determinados aparelhos e não componentes de uso geral.

12.3.4 Associações de indutores

As regras para associação de indutores em série ou em paralelo são obtidas a partir das regras para impedâncias complexas. Uma vez que $\hat{Z}_L = \hat{X}_L = j\omega L$, resulta que *indutores ideais* se combinam pelas mesmas regras simples dos resistores. Entretanto, devem ser observados os seguintes aspectos:

- A resistência associada ao indutor real raramente pode ser desprezada. Assim, a regra simples para indutores em paralelo não pode ser usada, sendo necessário utilizar a regra de associação de impedâncias complexas em paralelo. No caso de indutores reais em série, as indutâncias e resistências podem ser somadas, independentemente.
- As regras simples para associações de indutores são válidas somente no caso em que não existe acoplamento magnético entre as diferentes bobinas. Isto é, não deve existir fluxo magnético significativo de uma bobina sobre a outra.

Quando existe acoplamento magnético entre as bobinas, a indutância L_{eq} , equivalente às indutâncias L_1 e L_2 em série é dada por¹²

$$L_{eq} = L_1 + 2k\sqrt{L_1L_2} + L_2 \quad (12.19)$$

onde k é o coeficiente de acoplamento magnético entre as indutâncias, que assume valores entre -1 e $+1$. O termo $M = k\sqrt{L_1L_2}$ é a indutância mútua das bobinas.

No caso de espiras justapostas e com correntes de mesmo sentido, pode-se considerar que o fluxo nas espiras é o mesmo e o coeficiente de acoplamento entre uma espira e outra é $k \cong 1$.

¹²Ver Referência 5, por exemplo.

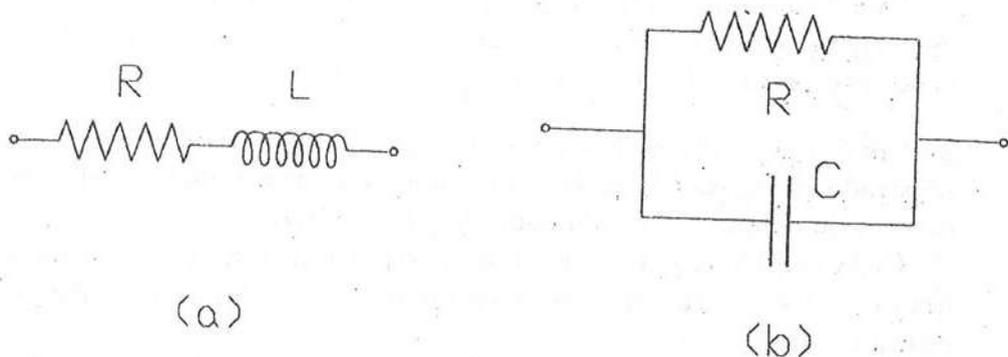


Figura 12.9: Modelos para resistor de fio de valor baixo em alta frequência (a) e de valor alto em baixa frequência (b).

A indutância equivalente das indutâncias em paralelo é dada por

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (12.20)$$

12.4 Resistores reais

Um resistor também apresenta capacitâncias e indutâncias parasitas que podem ser desprezadas, usualmente. Entretanto, em certas circunstâncias, devem ser consideradas. Por exemplo, resistores de potência elevada são, usualmente, feitos de fio enrolado num suporte cerâmico. Assim, para um “resistor de fio” de baixo valor, a reatância indutiva ($X_L = \omega L$) pode se tornar significativa em altas frequências. Para baixas frequências e um “resistor de fio” de valor muito alto, a reatância capacitiva ($X_C = 1/\omega C$) pode ser significativa devido à pequena capacitância parasita associada às espiras justapostas. Os modelos correspondentes são mostrados nas Figuras 12.9.

Questões

1. Admitindo como aproximação que, em alta frequência, a densidade de corrente num fio é uniforme e ocorre somente numa camada superficial de espessura δ , deduzir a Equação 12.14.

2. Considerar o núcleo cilíndrico de raio r_0 e resistividade ρ , como mostrado na Figura 12.7.a. O campo magnético alternado tem a direção do eixo do cilindro e módulo dado por $B = B_0 \cos \omega t$.

Cada anel de raio r , largura dr e espessura b se comporta como uma espira em curto circuito. Mostrar que a corrente induzida nesta espira é

$$di = \frac{\omega B r b}{2\rho} dr \quad (12.21)$$

Mostrar que a potência média (no tempo) dissipada por unidade de volume é

$$\frac{dP}{dV} = \frac{r^2 \omega^2 B_0^2}{8\rho} \quad (12.22)$$

Mostrar que a potência média dissipada (no tempo e no volume do cilindro) é dada por

$$\bar{P} = \frac{r_0^2 \omega^2 B_0^2}{16\rho} \quad (12.23)$$

Referências

1. M. Wellauer, *Introdução à Técnica das Altas Tensões*, Editora Polígono e EDUSP, São Paulo (1973).
2. *Capacitor*, *Encyclopaedia Britannica*, Vol.4, Chicago (1971).
3. *Capacitor*, *Revista Nova Eletrônica*, Nos 40 e 41, São Paulo (1980).
4. S. Ramo, J.R. Whinnery e T. Van Duzer, *Campos e ondas em Eletrônica das Comunicações*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1981).
5. J.R. Reitz, F.J. Milford e R.W.Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editora Campus, Rio de Janeiro (1982).
6. G.R.Slemon, *Equipamentos Magnetelétricos, Vol.1*, EDUSP e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (1974).

13

Quadripolos

13.1 Considerações gerais

Vários componentes, circuitos ou instrumentos funcionam como quadripolos elétricos, pois têm 4 terminais para ligações elétricas, como mostra a Figura 13.1. Conforme o modo de ligação dos 4 terminais a circuitos externos, 2 terminais são considerados como *entrada* e os outros 2 como *saída*.

Muitas vezes, o quadripolo só tem 3 terminais, sendo um destes terminais comum para a entrada e saída. Por exemplo, pode ocorrer que os terminais B e D na Figura 13.1 estejam diretamente ligados entre si, constituindo um único terminal. Frequentemente, este terminal é ligado à terra¹ e o quadripolo é denominado "de terra comum".

Quadripolos são muito importantes na análise de circuitos e sistemas eletrônicos. Com frequência, circuitos complicados ou associações de circuitos ou instrumentos são entendidos e analisados como uma sucessão de quadripolos. A Figura 13.2 mostra um exemplo simples de uma associação de 4 quadripolos: um transformador, uma ponte retificadora, um filtro e um circuito oscilador. É suficiente compreender bem a função e as características de entrada e saída de cada um destes quadripolos, individualmente, para se entender e analisar o circuito.

¹Ver Seções 8.2 e 9.4 da primeira Parte desta Apostila.



Figura 13.1: Quadripolo elétrico.

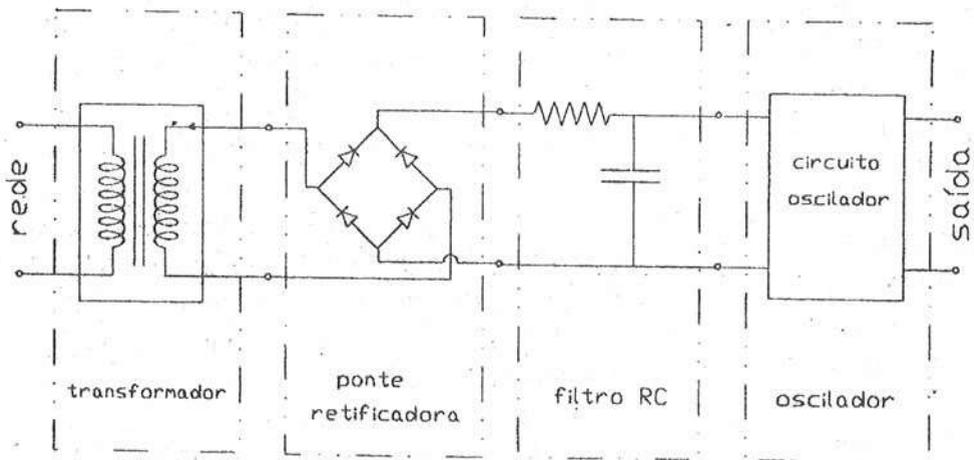


Figura 13.2: Exemplo de associação de quadripolos elétricos.

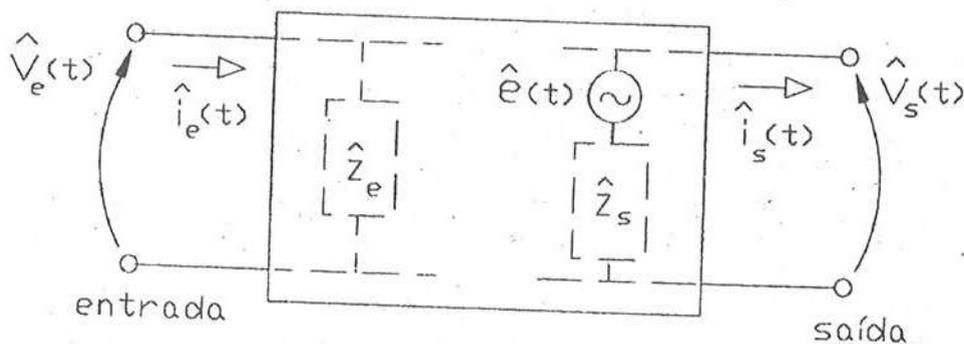


Figura 13.3: Modelo simples para um quadripolo elétrico.

A caracterização completa do comportamento de um quadripolo qualquer é bem complicada, em geral. Mesmo para um quadripolo que só tem componentes passivos², a caracterização completa ainda é complicada, geralmente feita por meio de 4 parâmetros complexos³.

Nesta Seção, apenas são apresentadas algumas definições gerais e modelos simples de validade restrita que são muito úteis na maioria dos casos mais simples e comuns.

13.2 Impedâncias de entrada e saída

A Figura 13.3 mostra um *modelo simples* para quadripolo. Do ponto de vista da entrada, o quadripolo é visto como uma simples impedância \hat{z}_e (impedância de entrada). Do ponto de vista da saída, o quadripolo se comporta como um gerador ideal de tensão alternada $\hat{e}(t)$ em série com uma impedância \hat{z}_s (impedância de saída).

A *impedância de entrada* pode ser definida como

$$\hat{z}_e = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{i}_e} \quad (13.1)$$

²Elementos resistivos, capacitâncias, indutâncias e, eventualmente, as mútuas indutâncias, tal como num transformador.

³Por exemplo, ver Referência 1 (Seção 12.4, Modelos gerais para quadripolos) ou Referência 2 (Capítulo 17, Redes con dos puertas).

Em geral, esta impedância é bem mais complicada que a impedância de um bipolo simples, pois depende também da tensão e da corrente de saída do quadripolo. Mas, em muitos casos, \hat{z}_e pode ser considerada como uma simples impedância, aproximadamente.

Para o modelo simples da Figura 13.3, a *impedância de saída* pode ser definida a partir da relação

$$\hat{V}_s(t) = \hat{e}(t) - \hat{z}_s \hat{i}_s(t) \quad (13.2)$$

Em geral, $\hat{e}(t)$ e \hat{z}_s podem depender das tensões e das correntes de entrada e de saída do quadripolo. Mas, em muitos casos, o modelo da Figura 13.3 pode ser utilizado e, pelo menos aproximadamente, \hat{z}_s se comporta como uma simples impedância.

As impedâncias de entrada e de saída são indicadas aqui por letras minúsculas (\hat{z}_e e \hat{z}_s) para lembrar o fato que não são simples impedâncias de bipolos, mas podem ser funções complicadas das correntes e tensões de entrada e de saída do quadripolo.

13.3 Ganho complexo e ganho real

As impedâncias de entrada e de saída são características importantes de um quadripolo, mas o que essencialmente descreve o seu comportamento é a relação entre a tensão de entrada e a tensão de saída.

Considerando apenas tensões alternadas e representando estas tensões por quantidades complexas:

$$\hat{V}_e(t) = V_{me} e^{j\omega t} \quad \text{e} \quad \hat{V}_s(t) = V_{ms} e^{(j\omega t + \phi_0)} \quad (13.3)$$

o *ganho complexo* é definido por

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{V}_e(t)} \quad (13.4)$$

O ganho complexo também é chamado de *função de transferência*.

Substituindo (13.3) em (13.4), obtém-se

$$\hat{G} = G e^{j\phi_0} \quad \text{onde} \quad G = \frac{V_{ms}}{V_{me}} \quad (13.5)$$

O módulo de \hat{G} é definido como *ganho real* G , ou simplesmente, *ganho* G do quadripolo.

O ganho G em decibéis é definido como

$$G(\text{dB}) = 20 \log \frac{V_{ms}}{V_{me}} \equiv 20 \log G \quad (13.6)$$

O ganho real ou o ganho em decibéis são frequentemente utilizados para caracterizar quadripolos em corrente alternada. Entretanto, deve ser observado que uma caracterização mais completa deve ser pelo *ganho complexo* que, além da relação entre as amplitudes máximas (G), indica também defasagem entre as tensões de saída e de entrada.

13.4 Integradores e diferenciadores

A seguir, são analisados alguns quadripolos importantes, que são os circuitos integradores e diferenciadores passivos, que funcionam também como filtros. Estes circuitos se enquadram no modelo mostrado na Figura 13.4. A relação entre tensão e corrente de entrada é

$$\hat{V}(t) \cong \hat{Z} \hat{i}(t) \quad (13.7)$$

onde \hat{Z} é a impedância complexa da associação de \hat{Z}_a em série com as impedâncias \hat{Z}_s e \hat{Z}_c em paralelo. No caso

$$Z_s \ll Z_c \quad (13.8)$$

a corrente de saída i_s é desprezível, comparada com a corrente de entrada i e

$$\hat{Z} = \hat{Z}_a + \hat{Z}_s \quad (13.9)$$

A tensão de saída é dada por

$$\hat{V}_s = \hat{Z}_s \hat{i}(t) \quad (13.10)$$

Utilizando a Equação 13.7, obtém-se

$$\hat{V}_s(t) \cong \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}} \hat{V}(t) \quad (13.11)$$

O ganho complexo é dado por

$$\hat{G} = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}} = \frac{\hat{Z}_s}{\hat{Z}_a + \hat{Z}_s} \quad (13.12)$$

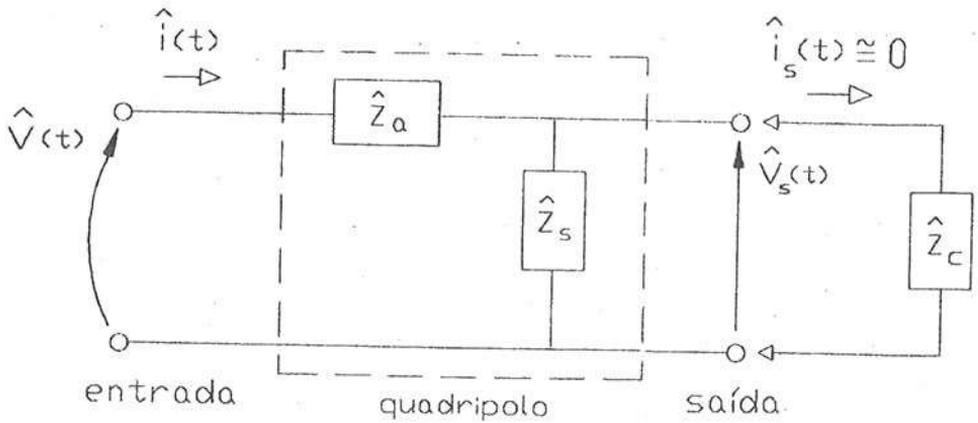


Figura 13.4: Modelo para circuitos integradores e diferenciadores.

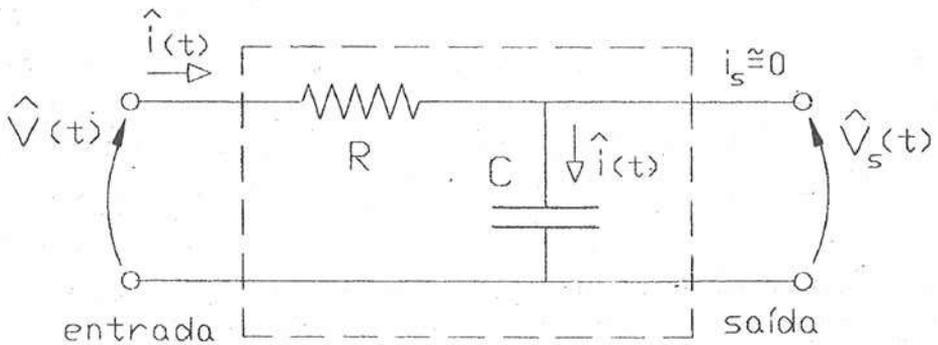


Figura 13.5: Circuito RC integrador.

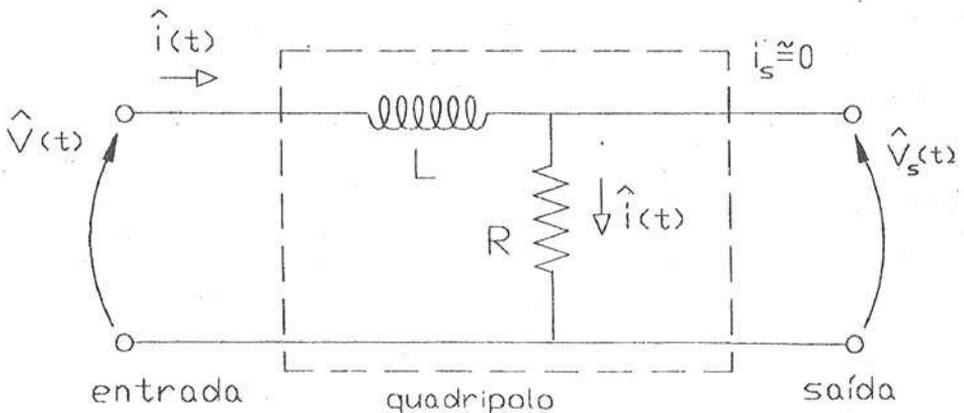


Figura 13.6: Circuito LR integrador.

13.4.1 Circuitos integradores passivos

Um circuito integrador realiza a integração de uma tensão $V(t)$ em relação ao tempo t . O circuito integrador mais utilizado é o mostrado na Figura 13.5. Admitindo-se que a corrente de saída $i_s(t)$ é desprezível, o ganho complexo é dado por

$$\hat{G} = \frac{\hat{X}_C}{\hat{X}_C + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (13.13)$$

e a tensão de saída é

$$\hat{V}_s(t) = \hat{G} \hat{V}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \hat{V}(t) \quad (13.14)$$

No caso $\omega RC \gg 1$, pode-se desprezar a unidade no denominador da expressão e

$$\hat{V}_s(t) \cong \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega} \hat{V}(t) \quad \text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{RC} \quad (13.15)$$

ou ainda ⁴

$$\hat{V}_s(t) \cong \frac{1}{RC} \int \hat{V}(t) dt \quad \text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{RC} \quad (13.16)$$

Em resumo, se a condição de alta frequência ($\omega \gg 1/RC$) é satisfeita, o circuito RC da Figura 13.5 realiza a *integração da tensão de entrada*. Por isso, este circuito RC é chamado *circuito integrador*.

Conforme já observado, os resultados são válidos para corrente de saída desprezível. Isto significa que a impedância Z_c , ligada à saída do integrador, seja muito maior que X_C .

Um grande inconveniente deste integrador consiste em não funcionar para frequências baixas. Outro inconveniente é a grande redução na amplitude do sinal de saída. A Equação 13.15 mostra que a amplitude do sinal de saída é reduzida de um fator $\omega RC \gg 1$. Estes inconvenientes podem ser minimizados usando-se um *integrador ativo*, tal como o construído a partir de *amplificador operacional*, como mostrado na próxima Seção.

⁴Ver Equações 11.11 da Seção 11.2.

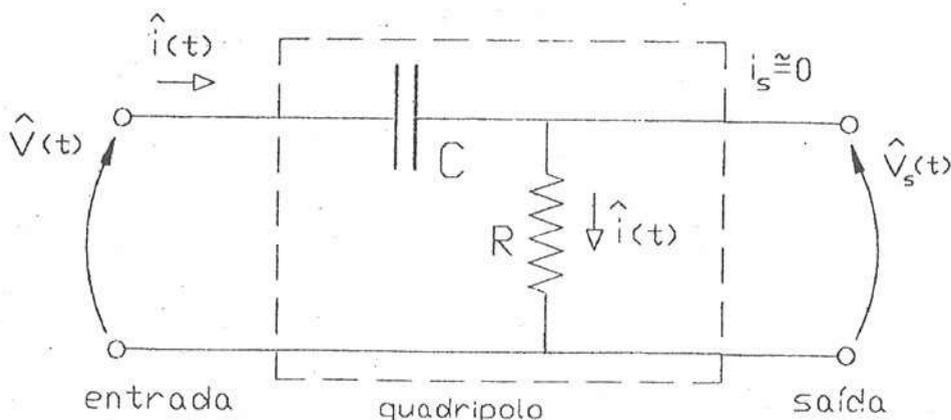


Figura 13.7: Circuito RC diferenciador.

O circuito LR montado como na Figura 13.6 também é um circuito integrador. Neste caso, pode-se mostrar que⁵.

$$\hat{V}_s(t) \cong \frac{R}{L} \frac{1}{j\omega} \hat{V}(t) = \frac{R}{L} \int \hat{V}(t) dt \quad \text{para} \quad \omega \gg \frac{R}{L} \quad (13.17)$$

Portanto, o circuito LR da Figura 13.6 também funciona como circuito integrador. Entretanto, em geral, este circuito só usado para frequências muito altas⁶. Conforme discutido na Seção 12, uma bobina com alta indutância sempre tem uma resistência associada que é relativamente alta. Resulta que é muito difícil construir uma bobina com uma razão R/L baixa. Assim, a condição $\omega \gg \frac{R}{L}$ é muito difícil de ser satisfeita para baixas frequências.

Como regra geral, impedância Z_c , ligada à saída, deve ser muito maior que R . Entretanto, no caso em que a esta impedância é uma simples resistência R_c , as expressões 13.17 são válidas para a resistência equivalente de R e R_c .

13.4.2 Circuitos diferenciadores passivos

Um circuito diferenciador permite obter a derivada de uma tensão $V(t)$ em relação ao tempo t . Um exemplo de circuito diferenciador

⁵Questão 1.

⁶Ver Questão 2.

mostrado na Figura 13.7. Admitindo-se que $i_s(t)$ é desprezível, o ganho complexo é dado por

$$\hat{G} = \frac{R}{R + \hat{X}_C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (13.18)$$

e a tensão de saída é

$$\hat{V}_s(t) = \hat{G} \hat{V}(t) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \hat{V}(t) \quad (13.19)$$

No caso $\omega RC \ll 1$, pode-se desprezar ωRC no denominador da expressão e obtém-se

$$\hat{V}_s(t) \cong RC j\omega \hat{V}(t) \quad \text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{RC} \quad (13.20)$$

ou ainda ⁷

$$\hat{V}_s(t) \cong RC \frac{d\hat{V}(t)}{dt} \quad \text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{RC} \quad (13.21)$$

Em resumo, se a condição de baixa frequência ($\omega \ll 1/RC$) é satisfeita, o circuito RC da Figura 13.7 realiza a *diferenciação da tensão de entrada*. Por isso, este circuito RC é chamado circuito diferenciador.

No caso geral, a impedância Z_c , ligada à saída do integrador, deve ser muito menor que R . No caso em que esta impedância é uma simples resistência R_c , valem as expressões 13.21 para a resistência equivalente.

O circuito LR montado como na Figura 13.8 também é um circuito diferenciador. Neste caso, pode-se mostrar que⁸.

$$\hat{V}_s(t) \cong j\omega \frac{L}{R} \hat{V}_c(t) = \frac{L}{R} \frac{d\hat{V}(t)}{dt} \quad \text{para} \quad \omega \ll \frac{R}{L} \quad (13.22)$$

Portanto, o circuito LR da Figura 13.8 também funciona como circuito diferenciador. A impedância Z_c ligada à saída deste diferenciador deve ser muito maior que $X_L = \omega L$.

⁷Ver Equações 11.11 da Seção 11.2.

⁸Questão 3.

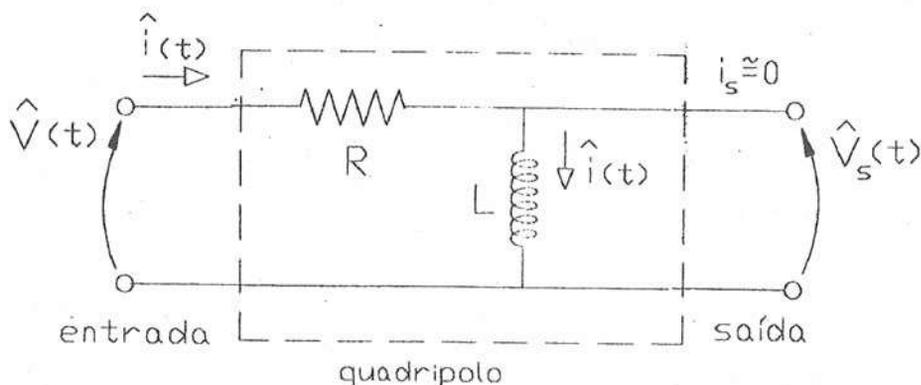


Figura 13.8: Circuito LR diferenciador.

13.4.3 Superposição de frequências

Uma tensão $V(t)$ qualquer, pode ser entendida como uma superposição de tensões alternadas de diferentes amplitudes e diferentes frequências⁹.

Uma tensão periódica $V(t)$ pode ser representada por meio de uma *série de Fourier*. Isto significa que esta tensão pode ser entendida como uma *superposição de um conjunto discreto de tensões harmônicas de diferentes amplitudes e diferentes frequências*. A Figura 13.9 mostra uma tensão $V(t)$ periódica, de amplitude V_0 e frequência f_0 . Matematicamente, esta função pode ser representada pela série de Fourier¹⁰

$$V(t) = \frac{4V_0}{\pi} \text{sen } \omega_0 t + \frac{4V_0}{3\pi} \text{sen } 3\omega_0 t + \frac{4V_0}{5\pi} \text{sen } 5\omega_0 t + \dots \quad (13.23)$$

onde $\omega_0 = 2\pi f_0$ e o número de termos se estende ao infinito. As amplitudes e frequências das 3 primeiras tensões alternadas que compõem a tensão $V(t)$ são mostradas na Figura 13.10. Na prática, pode-se obter uma aproximação razoável para $V(t)$ considerando apenas alguns termos em 13.23. A Figura 13.11 o resultado da superposição das 3 primeiras tensões harmônicas.

⁹Série ou integral de Fourier. Ver Capítulo 20 da Referência 2, por exemplo.

¹⁰Por exemplo, ver Seção 23 da Referência 4 ou Capítulo 2 da Referência 5.

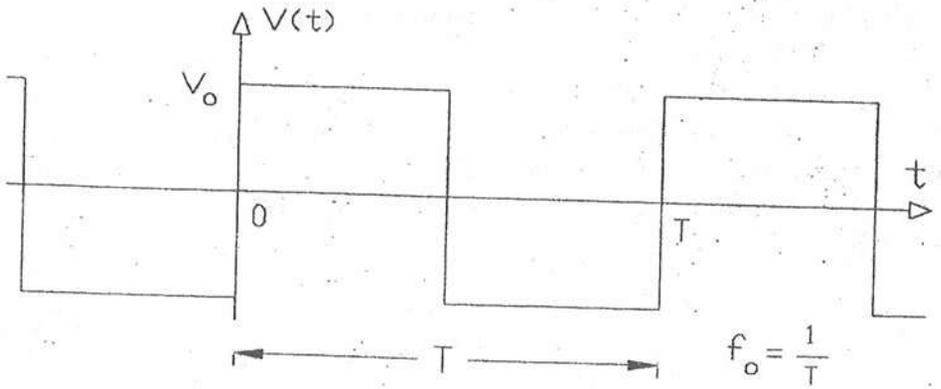


Figura 13.9: Tensão periódica quadrada (“onda quadrada”).

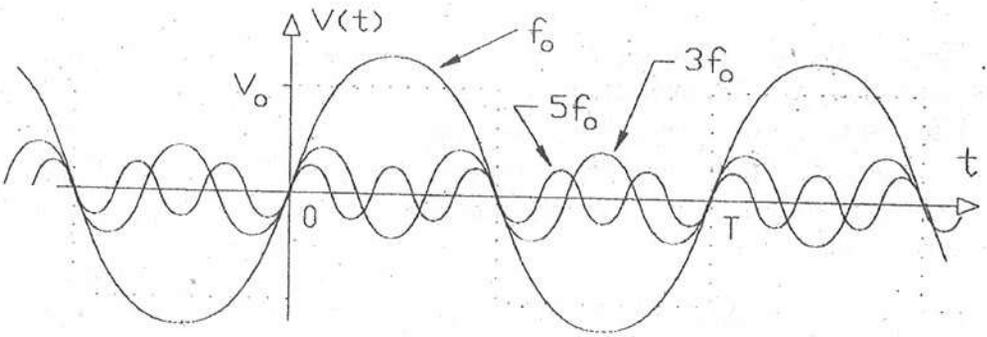


Figura 13.10: Componentes harmônicas da “onda quadrada”.

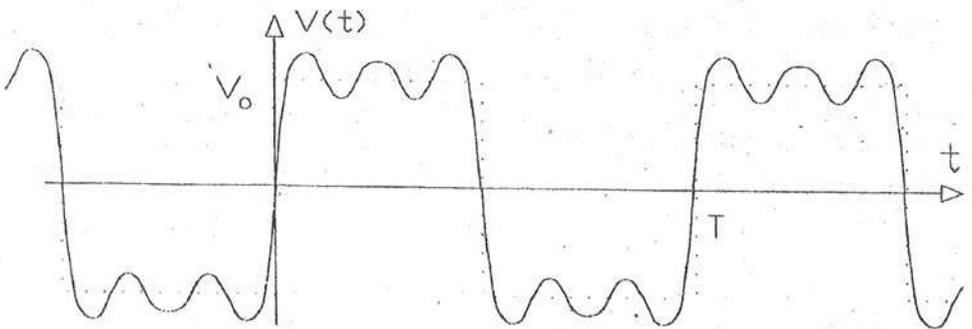


Figura 13.11: Superposição de 3 harmônicas da “onda quadrada”.

Uma tensão $V(t)$ não periódica pode ser representada por meio de uma integral de Fourier. Matematicamente, a série de Fourier se transforma numa integral quando se considera uma tensão periódica $V(t)$, com período tendendo ao infinito. O resultado é que a *distribuição discreta de tensões harmônicas se transforma numa distribuição contínua*, neste limite. Por exemplo, o pulso mostrado na Figura 13.12.a é uma tensão não periódica, variável no tempo e a expressão matemática correspondente é dada por

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (13.24)$$

Este pulso também pode ser representado por¹¹

$$V(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad \text{onde} \quad A(\omega) = V_0 \tau e^{-\tau\omega} \quad (13.25)$$

Isto é, $A(\omega) d\omega$ pode ser interpretado como a amplitude de componentes harmônicas entre as frequências angulares ω e $\omega + d\omega$. A Figura 13.12.b mostra o gráfico de $A(\omega)$.

A largura Δt de um pulso no tempo e a largura $\Delta\omega$ da distribuição de frequências angulares são relacionadas entre si pela relação geral aproximada:

$$\Delta t \Delta\omega \approx 2\pi \quad (\text{ou} \quad \Delta t \Delta f \approx 1) \quad (13.26)$$

Isto é, $\Delta t \Delta f$ é da ordem de grandeza de 1. Esta relação¹² é útil para se determinar ordens de grandeza para a composição de frequências de um pulso. Por exemplo, se a largura do pulso da Figura 13.12.a é aproximadamente $\Delta t \approx 4\tau$, resulta que $\Delta\omega \approx 1/4\tau$. Assim, a composição de frequências do pulso não deve ter componentes muito significativas em frequências muito maiores que $\omega_c = 1/4\tau$. Isto pode ser verificado na Figura 13.12.b.

A importância da análise de Fourier em circuitos é devida ao fato que, em geral, é relativamente fácil compreender o comportamento do

¹¹ Por exemplo, ver Seção 33 da Referência 4 ou Capítulo 6 da Referência 5.

¹² Esta é uma relação geral, válida também para pacotes de ondas e, em particular, para pacotes de onda de De Broglie. A partir desta relação obtém-se o princípio de incerteza da mecânica quântica.

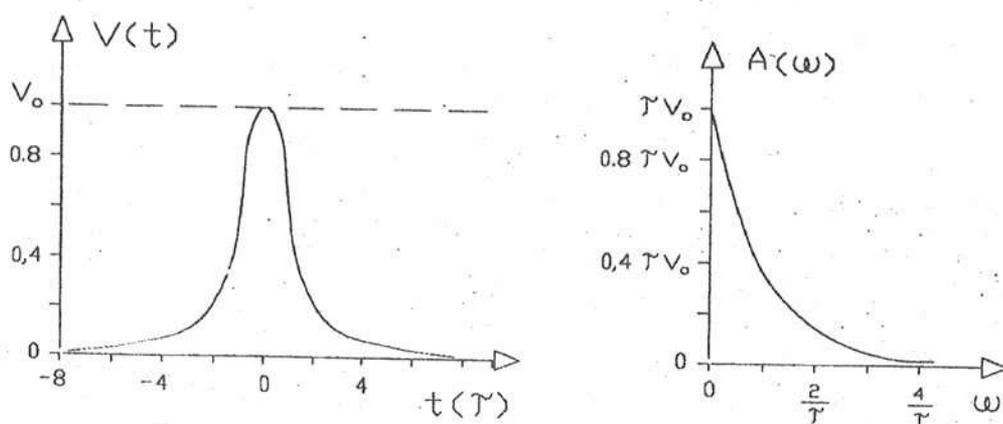


Figura 13.12: Pulso de tensão e respectiva composição de frequências.

circuito para uma tensão harmônica de frequência definida. Se as componentes harmônicas de uma tensão $V(t)$ qualquer são conhecidas, basta analisar o efeito do circuito sobre cada uma destas componentes. Em particular, no caso de um quadropolo, o ganho complexo $\hat{G}(\omega)$ pode ser determinado em função da frequência angular. A tensão na saída do quadropolo é a superposição de cada componente de Fourier multiplicada pelo respectivo ganho.

As expressões 13.16, 13.17, 13.21 e 13.22, para integradores e diferenciadores foram deduzidas para tensão alternada simples na frequência angular ω . Se as condições de alta frequência ou baixa frequência são satisfeitas para as diferentes frequências que compõem uma tensão arbitrária $V(t)$, então as expressões para integral ou derivada são válidas também para esta tensão arbitrária.

Os integradores e diferenciadores discutidos são chamados de “passivos” porque só têm componentes “passivos” (resistores, capacitores e indutores) e não necessitam de baterias ou fontes de alimentação para funcionar. Existem circuitos integradores e diferenciadores chamados “ativos” que, além de componentes passivos, exigem baterias ou fontes de alimentação externa para funcionar. Circuitos integradores e diferenciadores ativos, baseados em *amplificadores operacionais* são estudados na próxima Seção. A maior vantagem dos circuitos ativos é que as restrições sobre as frequências de operação são menores.

13.5 Filtros

O circuito mostrado na Figura 13.5 também pode funcionar como um filtro que *deixa passar determinadas frequências e corta outras*. Admitindo-se que $i_s(t)$ é desprezível, o ganho complexo é dado por

$$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{onde} \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad (13.27)$$

Assim, o ganho real G é dado por

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}} \quad \text{ou} \quad G(\text{dB}) = -10 \log(1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2) \quad (13.28)$$

Assim,

$$G \cong 1 \quad \text{se} \quad \omega \ll \omega_c \quad (13.29)$$

$$G = \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad \omega = \omega_c \quad (13.30)$$

$$G \cong \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{se} \quad \omega \gg \omega_c \quad (13.31)$$

A amplitude da tensão na saída é $V_s(t) = GV(t)$. Para baixas frequências ($\omega \ll \omega_c$), a tensão na saída do quadripolo é igual à tensão de entrada. Para altas frequências ($\omega \gg \omega_c$), a tensão na saída é *atenuada de um fator ω_c/ω* . Embora atenuadas, as altas frequências ainda passam e, por isso, este não é um filtro muito eficiente.

Em resumo, o circuito RC da Figura 13.5 funciona como um filtro que deixa passar baixas frequências e atenua altas frequências. A frequência angular $\omega_c = 1/RC$ é uma característica do filtro. Para $\omega = \omega_c$, o ganho em decibéis é dado por

$$G(\text{dB}) = -10 \log(1 + (\frac{\omega_c}{\omega})^2) = -3.010 \dots \quad (13.32)$$

Por isso, a frequência $f_0 = \omega_c/2\pi$ é chamada "frequência -3 dB" do filtro.

O circuito da Figura 13.6 também funciona como um filtro que deixa passar baixas frequências, enquanto que os circuitos das Figuras 13.7 e 13.8 funcionam como filtros que deixam passar altas frequências e

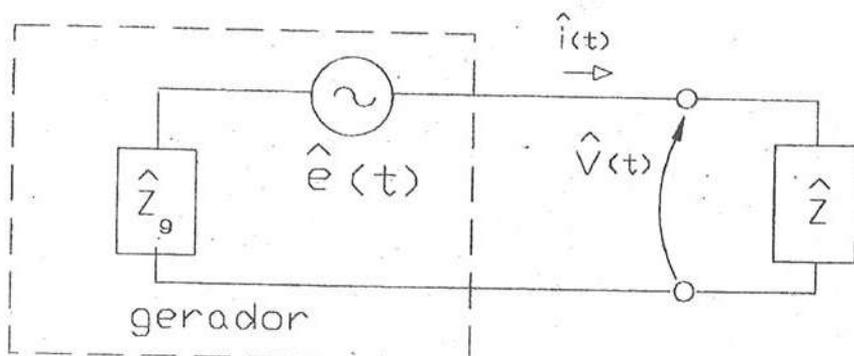


Figura 13.13: Impedância \hat{Z} ligada a um gerador de tensão alternada $\hat{V}(t)$ com impedância interna \hat{Z}_g .

cortam baixas frequências¹³. Tais filtros, embora não muito eficientes, são muito utilizados pela sua simplicidade. Estes são apenas exemplos simples de filtros. Podem ser construídos filtros passivos ou ativos, mais complicados e bem mais eficientes¹⁴.

No caso de uma tensão arbitrária $V(t)$, deve ser considerado o efeito do filtro sobre as diferentes tensões harmônicas. A tensão na saída do filtro é modificada conforme a atenuação das diversas componentes. Por exemplo, se a “onda quadrada” da Figura 13.9 entra num filtro com “frequência -3 dB” igual a $f_c \approx 4f_0 = 4\omega_0/2\pi$, as componentes harmônicas nas frequências f_0 , $2f_0$ e $3f_0$ quase não são atenuadas, enquanto que para as frequências maiores a atenuação é bastante significativa. Assim, a tensão na saída do filtro deve ser bastante semelhante à mostrada na Figura 13.11.

13.6 Acoplamento de impedâncias

A Figura 13.13 mostra um gerador de tensão alternada $\hat{e}(t)$ com uma impedância interna \hat{Z}_g e ligado a uma impedância externa \hat{Z} .

¹³Ver Questão 4.

¹⁴Ver Referência 6, por exemplo.

Estas impedâncias podem ser escritas como

$$\hat{Z}_g = R_g + j X_g \quad \text{e} \quad \hat{Z} = R + j X \quad (13.33)$$

A corrente $\hat{i}(t)$ e a tensão $\hat{V}(t)$ são dadas por

$$\hat{i}(t) = \frac{\hat{e}(t)}{\hat{Z}_g + \hat{Z}} \quad \text{e} \quad \hat{V}(t) = \hat{Z} \hat{i}(t) \quad (13.34)$$

A potência média¹⁵ transferida para a impedância \hat{Z} é

$$\bar{P} = V_{ef} i_{ef} \cos \phi = V_{ef}^2 \frac{1}{|\hat{Z} + \hat{Z}_g|} \cos \phi \quad (13.35)$$

onde V_{ef} e i_{ef} são valores eficazes da tensão e da corrente, sendo o fator de potência dado por

$$\cos \phi = \frac{R}{|\hat{Z} + \hat{Z}_g|} \quad (13.36)$$

Assim, obtém-se

$$\bar{P} = V_{ef}^2 \frac{R}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \quad (13.37)$$

Admitindo que a impedância externa \hat{Z} pode variar arbitrariamente, *máxima transferência de potência do gerador para a impedância \hat{Z}* ocorre quando são satisfeitas as condições

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (13.38)$$

Calculando as derivadas e resolvendo as equações resultantes, obtém-se

$$R = R_g \quad \text{e} \quad X = -X_g \quad (13.39)$$

Isto é, a máxima transferência de potência do gerador para a impedância \hat{Z} ocorre quando esta impedância é a *complexa conjugada da impedância interna do gerador*:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_g^* \quad (13.40)$$

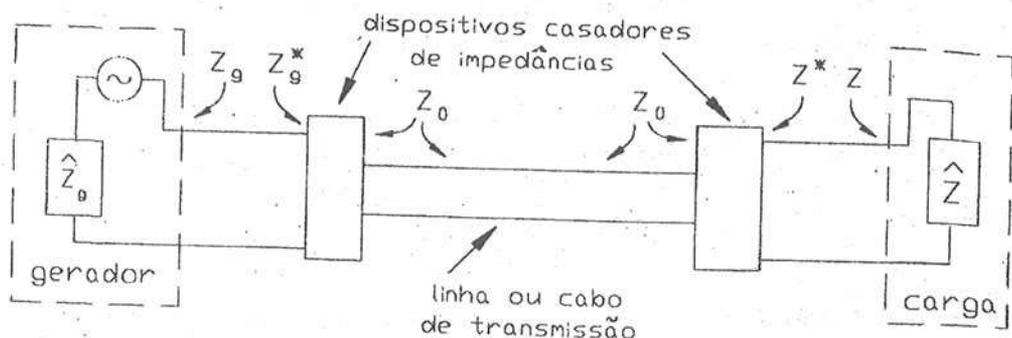


Figura 13.14: Casamento de impedâncias na conexão de um gerador a uma impedância \hat{Z} , usando um cabo para transmissão do sinal.

No caso de impedâncias puramente resistivas (reais), a condição 13.40 se reduz a

$$R = R_g \quad (13.41)$$

Na condição de “máxima potência transferida”, a eficiência é muito baixa (50%), uma vez que metade da potência é dissipada na resistência interna do próprio gerador. Por isso, no caso de um gerador de potência¹⁵, não há nenhum interesse em utilizar as condições 13.40 (ou 13.41). Entretanto, quando se trata de um “gerador de sinal elétrico”, em geral, interessa extrair a máxima potência possível do gerador, independentemente da eficiência e o “casamento de impedâncias”, conforme 13.40 ou 13.41 deve ser utilizado.

Conforme o modelo mostrado na Figura 13.3, a saída de qualquer quadripolo pode ser entendida como um “gerador”. Assim, o casamento de impedâncias também deve ser utilizado para uma sucessão de quadripolos.

Para altas frequências, o circuito mostrado na Figura 13.13 pode ser muito idealizado, pois as impedâncias dos fios de ligação podem ser importantes. A Figura 13.14 mostra um modelo mais realista, no

¹⁵Ver Seção 10.5

¹⁶Baterias, pilhas, fontes de alimentação, geradores eletromagnéticos e outras fontes de energia elétrica.

qual considera-se a linha ou cabo de transmissão entre o gerador e a impedância \hat{Z} . Neste caso, devem ser utilizados dispositivos *adaptadores de impedâncias* do gerador para a linha de transmissão e desta para a impedância \hat{Z} .

Uma linha de transmissão de seção constante e sem perdas resistivas ou dielétricas, tem "impedância característica" real¹⁷

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13.42)$$

onde L e C são a indutância e a capacitância por unidade de comprimento. Os cabos de transmissão mais usuais são cabo coaxial e par de fios paralelos.

Um exemplo comum de casamento de impedâncias é um gerador de sinal de vídeo¹⁸ com 75Ω de impedância de saída. A transmissão do sinal para a televisão deve ser feita por meio de um cabo coaxial de 75Ω . Se a entrada da televisão é para cabo de fios paralelos de 300Ω , deve existir um dispositivo "casador de impedâncias", tal como um transformador, para adaptar a impedância de 75Ω do cabo coaxial para 300Ω do cabo de fios paralelos. Um outro exemplo é um amplificador de som com impedância de saída de 600Ω ligado a um altofalante de baixa impedância tal como 8Ω . Praticamente, não haveria potência no altofalante ligado diretamente ao amplificador. A solução é utilizar um transformador para "casar" as impedâncias. Em aparelhos de som antigos era bastante utilizado o chamado "transformador de saída" para se obter este casamento das impedâncias.

13.7 Transformadores

O transformador é um quadripolo muito importante que permite elevar ou rebaixar a amplitude de uma tensão alternada. Além destas, existem outras importantes aplicações do transformador tais como *casamento de impedâncias, transformação da forma de pulsos e a isolamento eletrostática entre circuitos*. As aplicações e outras observações gerais são resumidas no final desta seção.

¹⁷Este assunto é discutido em detalhes nos Capítulos 1 e 2 das Referências 7 e 8.

¹⁸Amplificador de antena, receptor de antena parabólica ou videocassete.

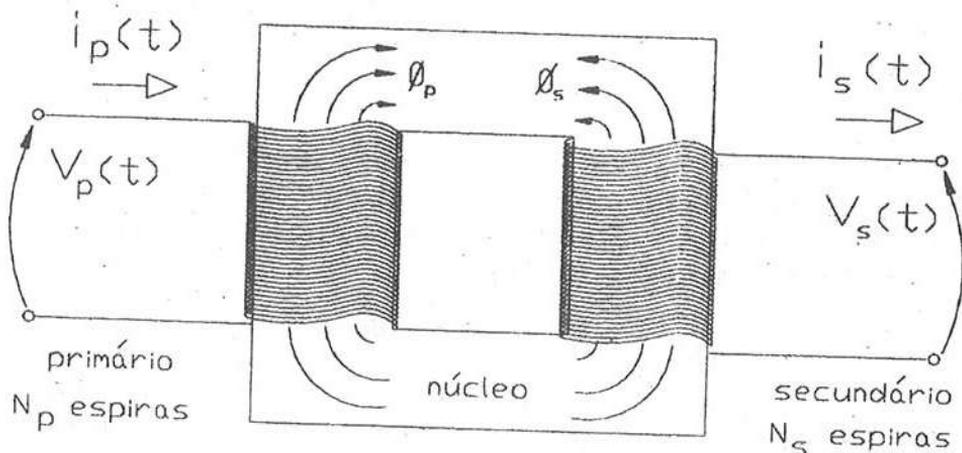


Figura 13.15: Desenho esquemático de um transformador.

A Figura 13.15 mostra um desenho esquemático de um transformador comum simples¹⁹ constituído de 2 bobinas enroladas em um núcleo de material ferromagnético, tal como ferro em lâminas ou ferrite. A bobina correspondente à entrada é chamada “enrolamento primário” ou “primário”, simplesmente. A bobina correspondente à saída é chamada “secundário”. Esta nomenclatura é um pouco arbitrária porque primário e secundário podem ser invertidos, em princípio. Na prática, existem certas limitações referentes a perdas resistivas e isolamento elétrico entre espiras, de forma que primário e secundário não podem ser invertidos, em geral.

Aplicando-se uma tensão alternada \hat{V}_p no primário, no secundário surge uma tensão induzida \hat{V}_s , conforme a Lei de Faraday da Indução.

No transformador da Figura 13.15, é essencial considerar a mútua indutância M , além das autoindutâncias L_p e L_s do primário e secundário.

O *fluxo magnético total no primário* é a soma dos fluxos magnéticos nas N_p espiras primárias e é indicado por ϕ_p . Analogamente, ϕ_s é o *fluxo magnético total nas N_s espiras secundárias*. O *fluxo magnético total no primário* é a soma do fluxo ϕ_{pp} no primário devido à corrente i_p no primário

¹⁹Existem transformadores bem mais complicados com vários enrolamentos. Além disso, transformadores podem ter formas bem diferentes da Figura 13.15.

e do fluxo ϕ_{ps} no primário devido à corrente i_s no secundário.

$$\phi_p = \phi_{pp} - \phi_{ps} \quad (13.43)$$

Como a corrente no secundário é, em geral, uma corrente induzida devido ao primário, o fluxo ϕ_{ps} deve ser oposto ao fluxo ϕ_{pp} , conforme a Lei de Lenz²⁰. Por isso, foi considerado um sinal negativo²¹ para ϕ_{ps} . Assim, a tensão no primário é dada por

$$V_p = \frac{d\phi_p}{dt} = \frac{d\phi_{pp}}{dt} - \frac{d\phi_{ps}}{dt} \quad (13.44)$$

O primeiro termo é a tensão devida à autoindutância L_p do primário:

$$\frac{d\phi_{pp}}{dt} = L_p \frac{di_p}{dt} \quad \text{onde} \quad L_p = \frac{d\phi_{pp}}{di_p} \quad (13.45)$$

O segundo termo é a tensão devida à mútua indutância M entre primário e secundário:

$$\frac{d\phi_{ps}}{dt} = M \frac{di_s}{dt} \quad \text{onde} \quad M = \frac{d\phi_{ps}}{di_s} \quad (13.46)$$

Assim, a tensão no primário pode ser escrita como

$$V_p = L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} \quad (13.47)$$

A autoindutância pode ser escrita como²²

$$L_p \cong f_p \mu \frac{A_p N_p^2}{l} \quad (13.48)$$

onde A é a seção do núcleo, μ a permeabilidade efetiva, l o comprimento da bobina, f_p um fator adimensional. A indutância mútua pode ser escrita como

$$M = k \sqrt{L_p L_s} \quad (13.49)$$

²⁰O fluxo criado por correntes induzidas tendem a se opor a variações de fluxo.

²¹Uma discussão detalhada dos sinais envolvidos nas equações é omitida aqui. O leitor interessado pode consultar o Capítulo 7 da Referência 1.

²²Ver Equação 12.9 da Seção 12.3.

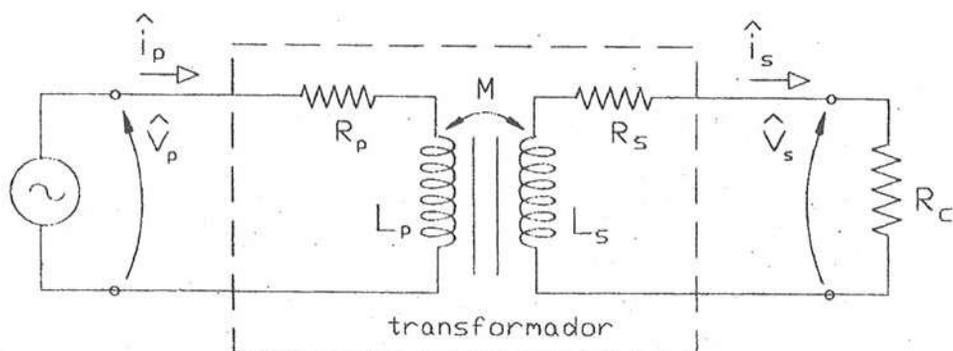


Figura 13.16: Transformador ligado a uma carga resistiva.

onde k é o coeficiente de acoplamento entre as bobinas do primário e do secundário, que assume valores entre -1 e $+1$.

Para o secundário, valem as mesmas considerações e

$$V_s = \frac{d\phi_s}{dt} = M \frac{di_p}{dt} - L_s \frac{di_s}{dt} \quad (13.50)$$

Em geral, a existência de tensão no secundário é devida à mútua indutância. Por isso, o termo correspondente é o mais importante e foi considerado com sinal positivo em 13.50. A autoindutância do secundário é definida de maneira análoga à do primário:

$$L_s \cong f_s \mu \frac{A_s N_s^2}{l} \quad (13.51)$$

Se os enrolamentos do primário e secundário são semelhantes, pode-se admitir que $A_s \cong A_p$ e $f_s \cong f_p$. Assim, resulta que as indutâncias são proporcionais aos quadrados dos números de espiras, respectivamente.

13.7.1 Transformador com uma carga resistiva

A Figura 13.16 mostra um circuito com transformador ligado a uma resistência R_c . As resistências ôhmicas R_p e R_s do primário e do secundário também estão incluídas. Utilizando as Leis de Kirchhoff, as Equações 13.47 e 13.50 podem ser reescritas como

$$V_p = L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} + R_p i_p \quad (13.52)$$

e

$$V_s = M \frac{di_p}{dt} - L_s \frac{di_s}{dt} = R_c i_s \quad (13.53)$$

onde a resistência R_s do secundário foi desprezada.

Estas equações podem ser reescritas utilizando notação complexa:

$$\hat{V}_p = j\omega L_p \hat{i}_p - j\omega M \hat{i}_s + R_p \hat{i}_p \quad (13.54)$$

e

$$\hat{V}_s = -j\omega L_s \hat{i}_s + j\omega M \hat{i}_p = R_c \hat{i}_s \quad (13.55)$$

As correntes podem ser eliminadas destas equações para se obter o *ganho complexo do transformador*, entendido como um quadripolo:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_p} = \frac{j\omega R_c M}{R_c R_p + \omega^2 (M^2 - L_p L_s) + j\omega (R_c L_p + R_p L_s)} \quad (13.56)$$

13.7.2 Transformador de acoplamento unitário

A indutância mútua M entre duas bobinas pode ser escrita como²³

$$M = k \sqrt{L_p L_s} \quad (13.57)$$

onde k é o *coeficiente de acoplamento* entre as bobinas do primário e do secundário, que assume valores entre -1 e +1.

Um *transformador de acoplamento unitário* é um transformador para o qual existe *acoplamento magnético perfeito* entre as bobinas do primário e do secundário. Isto significa que todas as linhas de campo magnético criadas por uma das bobinas são enlaçadas pela outra. O fluxo magnético em cada espira (ϕ_{esp}) é o mesmo, seja para espiras do primário ou do secundário. Assim, os fluxos magnéticos no primário e no secundário são dados por

$$\phi_p = N_p \phi_{esp} \quad \text{e} \quad \phi_s = N_s \phi_{esp} \quad (13.58)$$

Neste caso, pode ser mostrado²⁴ que o coeficiente de acoplamento é unitário,

$$k = 1 \quad \text{e} \quad M = \sqrt{L_p L_s} = \frac{N_s}{N_p} L_p \quad (13.59)$$

²³Ver subseção 12.3.4 anterior e referências citadas.

²⁴Ver Questão 6.

Substituindo em 13.56, obtém-se o *ganho complexo do transformador de acoplamento unitário* com carga resistiva:

$$\hat{G}_{un} = \frac{j\omega L_p}{R_p + j\omega(L_p + L_s \frac{R_p}{R_c})} \frac{N_s}{N_p} \quad (13.60)$$

13.7.3 Transformador ideal

Um *transformador ideal* é definido como um transformador de acoplamento unitário, para o qual indutâncias são suficientemente altas, permitindo desprezar as resistências ôhmicas do primário e do secundário. Desprezando R_p e R_s na equação 13.60, obtém-se o ganho do transformador ideal:

$$\hat{G}_{id} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_p} = \frac{N_s}{N_p} \quad (13.61)$$

Isto é, as tensões no primário e no secundário *estão em fase e são proporcionais aos respectivos números de espiras.*

A impedância da entrada para um transformador ligado como na Figura 13.16 pode ser obtida de 13.54 e 13.55:

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_p}{\hat{i}_p} = R_p + \frac{j\omega L_p R_c + \omega^2 (M^2 - L_s L_p)}{R_c + j\omega L_s} \quad (13.62)$$

Para um transformador ideal e no caso $R_c \ll \omega L_s$, obtém-se

$$\hat{Z}_e = R_p + \frac{L_p}{L_s} R_c \quad \text{para} \quad R_c \ll \omega L_s \quad (13.63)$$

Portanto, neste caso, a impedância de entrada é puramente resistiva e depende diretamente da resistência R_c ligada à saída do transformador.

Entretanto, se o secundário estiver em aberto ($R_c \rightarrow \infty$), a impedância de entrada obtida de 13.62 é a esperada:

$$\hat{Z}_e = R_p + j\omega L_p \quad (13.64)$$

13.7.4 Observações gerais sobre transformadores

As principais aplicações de transformadores são resumidas a seguir.

- A principal utilização de um transformador é elevar ou rebaixar a amplitude de uma tensão alternada. Por isso, os transformadores são dispositivos extremamente importantes na distribuição e utilização da energia elétrica comercial. Mesmo instrumentos que funcionam tensão de alimentação contínua (pilhas ou baterias), muitas vezes necessitam de altas tensões e não dispensam transformador.
- Uma aplicação importante de transformadores é o casamento de impedância. Conforme mostrado na Seção 13.6, para máxima transferência de potência de um quadripolo a outro ocorre quando as impedâncias são casadas conforme as Equações 13.40 ou 13.41. Usualmente, a maneira mais simples e prática de realizar o casamento de impedâncias é por meio de um transformador. Exemplos são dados na Seção 13.6.
- Uma outra aplicação importante de um transformador é a isolação eletrostática entre primário e secundário. O desenho esquemático da Figura 13.15 mostra que não existe ligação elétrica direta entre primário e secundário. Assim, o secundário podem estar num potencial arbitrário diferente. Por exemplo, o primário pode ser ligado à rede elétrica e o terminal inferior do secundário pode ser ligado a um terra local. Em muitos aparelhos, o transformador na entrada, além de elevar ou rebaixar a tensão da rede, também desempenha esta importante função de isolar os circuitos da rede elétrica, de forma que estes circuitos e a caixa do aparelho podem ser aterradas. Às vezes, não há necessidade de modificar a amplitude da tensão da rede, mas utiliza-se um transformador como "transformador de isolação".

Entretanto, a isolação eletrostática não é perfeita porque existe acoplamento eletrostático entre espiras do primário e do secundário, que são justapostas, em geral. Isto é, pode-se considerar que existe uma capacitância entre o primário e o secundário que pode "conduzir" correntes de altas frequências ou pulsos rápidos. Certos transformadores são enrolados com especiais cuidados para reduzir esta capacitância.

- Transformadores de pulso são utilizados em circuitos eletrônicos para melhorar a forma de um pulso e isolação eletrostática.

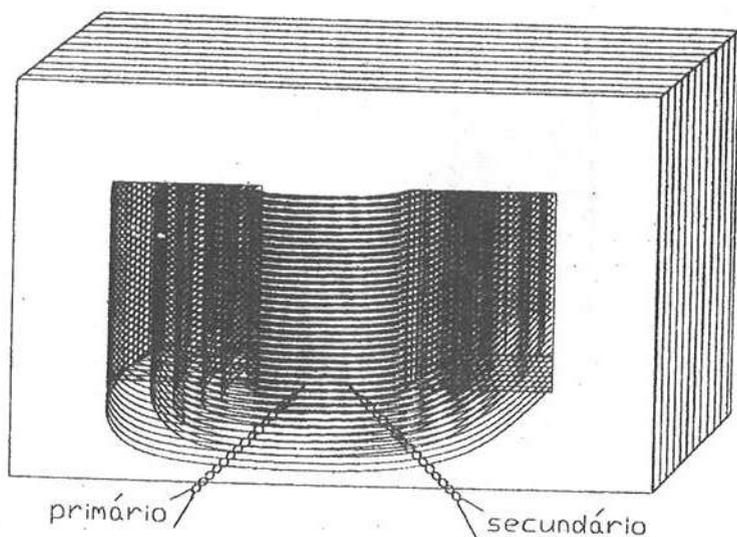


Figura 13.17: Tipo mais comum de transformador.

A Figura 13.17 mostra o tipo mais usual de transformador com núcleo "E" formado de lâminas de ferro e as duas bobinas enroladas num mesmo carretel central. Entretanto, este é apenas o tipo mais comum de transformador. Existe uma infinidade de tipos de transformadores das mais variadas formas e com variados tipos de núcleos, desde minúsculos transformadores de pulsos usados em circuitos eletrônicos até transformadores de dezenas de toneladas. Alguns exemplos de transformadores pouco convencionais são mencionados a seguir.

- A chamada "bobina de ignição" em automóveis é, na realidade, um transformador que gera pulsos de alta tensão, a partir de pulsos de baixa amplitude.
- Num tokamak, o plasma é confinado em uma câmara toroidal e pode ser considerado uma espira. Assim, o plasma funciona como "secundário" para uma bobina primária no eixo do toróide. Assim, intensos pulsos de corrente na bobina primária provocam corrente e aquecimento ôhmico do plasma.

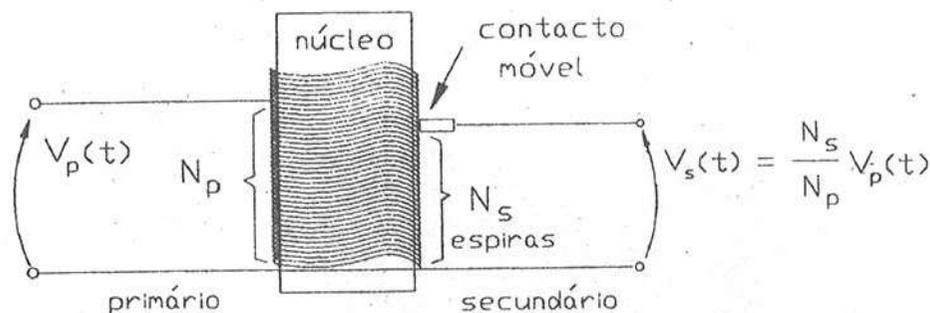


Figura 13.18: Desenho esquemático de um autotransformador (variac).

- As “pistolas de solda” funcionam com primário de muitas espiras e uma única espira muito grossa como secundário. A ponteira para solda é um pouco mais fina e fecha o circuito da espira secundária. A corrente de dezenas de ampères induzida aquece a ponteira.
- O autotransformador (variac) é um transformador bastante diferente do desenho esquemático da Figura 13.15. Num variac, uma mesma bobina serve de primário e secundário, como esquematizado na Figura 13.18. As tensões de entrada e saída são proporcionais ao número de espiras, conforme a Equação 13.61. O número de espiras no secundário pode ser ajustado por um contacto de carvão, permitindo ajustar a tensão no secundário desde valores próximos de zero até valores um pouco maiores que a tensão de entrada.
 - No variac não existe isolação entre primário e secundário. Por isso, um variac deve sempre ser utilizado com bastante cuidado. Um variac ajustado para tensão de saída de poucos volts, pode dar uma falsa sensação de segurança, pois um dos fios da saída podem estar na tensão da rede elétrica.

Questões

1. Mostrar que o ganho complexo do circuito LR integrador da Figura 13.6 é dado por

$$\hat{G} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}j\omega} \quad (13.65)$$

2. Calcular aproximadamente a indutância de uma pequena bobina de 200 espiras, de 1 cm de diâmetro e 10 cm de comprimento.

Considerando valores para R da ordem de dezenas de Ω , mostrar que para bobinas pequenas e sem núcleo ferromagnético, Mostrar que, com esta bobina, é inviável construir um circuito integrador para frequências baixas, da ordem de dezenas de Hertz.

3. Mostrar que o ganho complexo do circuito LR diferenciador da Figura 13.8 é dado por

$$\hat{G} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \quad (13.66)$$

4. Fazer o gráfico esquemático do ganho em função da frequência para os quadropolos das Figuras 13.6, 13.7 e 13.8, entendidos como filtros. Determinar a "frequência -3dB" nos 3 casos.

5. Deduzir as condições 13.39 para casamento de impedâncias.

6. Utilizando as equações 13.44, 13.50 e 13.58, mostrar que para um transformador de acoplamento unitário,

$$\left(\frac{M}{N_s} - \frac{L_p}{N_p} \right) \frac{di_p}{dt} = \left(\frac{M}{N_p} - \frac{L_s}{N_s} \right) \frac{di_p}{dt} \quad (13.67)$$

Uma vez que esta equação deve ser válida qualquer que seja a resistência no secundário, mostrar que

$$M = \frac{N_s}{N_p} L_p = \frac{N_p}{N_s} L_s \quad (13.68)$$

Referências

1. C. M. Close, *Circuitos Lineares, Vol.2*, EDUSP e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (1975).
2. W.H. Hayt Jr. y J.E. Kemmerly, *Análisis de Circuitos en Ingeniería*, Libros McGraw-Hill, Mexico (1970).
3. C. M. Close, *Circuitos Lineares, Vol.1*, EDUSP e Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro (1975).
4. M.R. Spiegel, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo (1973).
5. F.S. Crawford, *Waves, Berkeley Physics Course, Vol.3*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).
6. H.D. Romano, *Filtros e Linhas*, 2ª Ed., Editora Campus, Rio de Janeiro (1982).
7. W.C. Johnson, *Transmission Lines and Networks*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokio (1950).
8. S. Ramo, J.R. Whinnery e T. Van Duzer, *Campos e Ondas em Eletrônica das Comunicações*, Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1981). McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokio (1950).

14

Amplificador operacional

Os conceitos básicos para utilização prática de amplificadores operacionais são resumidos nesta Seção.

14.1 Amplificador operacional ideal.

Um *amplificador operacional ideal* (*op-amp ideal*) é o dispositivo eletrônico representado na Figura 14.1, com duas entradas (V_1 e V_2) e uma saída (V_s), e cujo funcionamento é resumido nas seguintes regras:

1. Não há corrente nas entradas de um *op-amp ideal*. Isto é,

$$i_1 = i_2 = 0 \quad (14.1)$$

2. O *op-amp ideal* modifica a tensão de saída V_s de forma a manter, se possível, as 2 entradas num mesmo potencial. Isto é,

$$V_1 = V_2 \quad (\text{quando possível}) \quad (14.2)$$

À primeira vista, a função básica de um *op-amp*, resumida nas duas regras acima, parecem muito pouco interessantes ou significativas. Entretanto, a partir de um *op-amp* podem ser montados de modo relativamente simples, dezenas de dispositivos eletrônicos tais como *amplificadores*, *somadores*, *diferenciadores*, *integradores*, *filtros*, *casadores de impedância*, *fontes de corrente* e outros circuitos úteis.

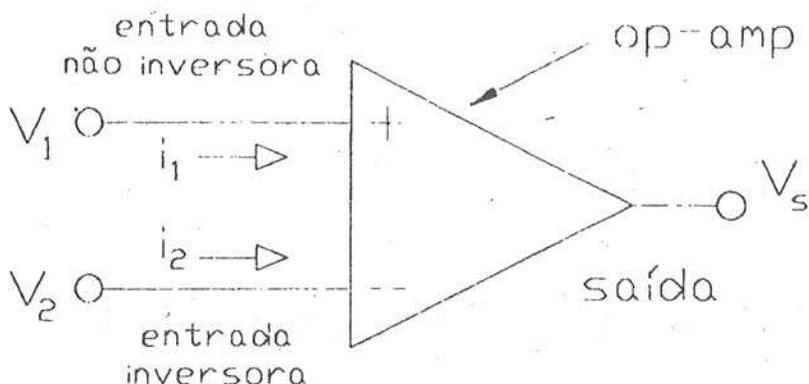


Figura 14.1: Representação simbólica de um op-amp.

Os circuitos mencionados são construídos ligando-se ao op-amp, alguns componentes passivos¹ adequados nas entradas e entre as entradas e a saída. Tais componentes, montados externamente ao op-amp, constituem a chamada *malha de realimentação*.

Em geral, um mecanismo de realimentação pode ser entendido como um processo adequado de interação entre saída e entrada de um sistema, para se corrigir ou aperfeiçoar um resultado desejado. No caso do op-amp, a tensão de saída V_s é modificada no sentido de igualar as tensões V_1 e V_2 nas entradas, por meio da malha de realimentação. No caso, o resultado desejado é igualar as tensões nas entradas.

A seguir, são resumidas algumas considerações práticas sobre os amplificadores operacionais. Uma discussão mais detalhada é apresentada no Capítulo 3 da Referência 1, um excelente livro sobre eletrônica em geral e, em particular, sobre amplificadores operacionais.

As malhas de realimentação para se obter amplificadores, integradores, diferenciadores e outros circuitos, são apresentadas nas seções subsequentes. Numa primeira leitura, pode ser mais conveniente ler inicialmente estas seções posteriores, embora várias limitações apresentadas para tais circuitos sejam pouco compreensíveis sem conhecer as limitações práticas dos amplificadores operacionais.

¹Resistores, elementos resistivos, capacitores, indutores.

14.2 Op-amps não ideais

O grande interesse nos op-amps se deve a serem montados em *circuitos integrados*, que são componentes pequenos e, em geral, de baixo custo e fácil aquisição.

A Figura 14.2 mostra os circuitos internos do amplificador operacional 741, talvez o mais conhecido e usado. Como pode ser observado, trata-se de um circuito bastante complicado. Entender em detalhes o funcionamento de tais circuitos é coisa para especialistas em eletrônica. Felizmente, o que interessa é entender principais características e limitações práticas do op-amp, que são resumidas a seguir. As principais características do 741 são mostradas na Figura 14.3.

- Os circuitos internos de um op-amp necessitam de *fonte de alimentação*, que seja independente das tensões da entrada ou da saída. Geralmente são duas tensões constantes V_+ e V_- , respectivamente positiva e negativa. Estas tensões de alimentação são representadas conforme mostrado na Figura 14.4. O op-amp não é capaz de gerar tensão de saída maior que a tensão V_+ ou menor que V_- .

- Existe um valor máximo para a diferença de tensão aplicada às entradas (maximum differential input voltage). O integrado pode ser danificado para tensão diferencial maior que a especificada.

- A *corrente de entrada (input bias current)* não é nula, mas é extremamente baixa. No caso do op-amp 741, esta corrente é da ordem de 80 nA . Mas existem op-amps com corrente de entrada muitíssimo menores, tal como $0,01 \text{ pA}$.

- A *resistência de entrada* pode ser definida como a razão entre a tensão e corrente numa entrada, quando a outra entrada está ligada à terra, como mostrado na Figura 14.5. No caso de um op-amp ideal é infinita, pois a corrente de entrada é nula. Para um op-amp, esta resistência é muito alta, mas não é infinita. Como *ordem de grandeza*, esta impedância pode ser estimada admitindo-se uma tensão na entrada igual à máxima admissível. Para o op-amp 741, $V_{max} = 30 \text{ V}$ e assim,

$$R_e \approx \frac{30 \text{ V}}{80 \text{ nA}} \approx 400 \text{ M}\Omega \quad (14.3)$$

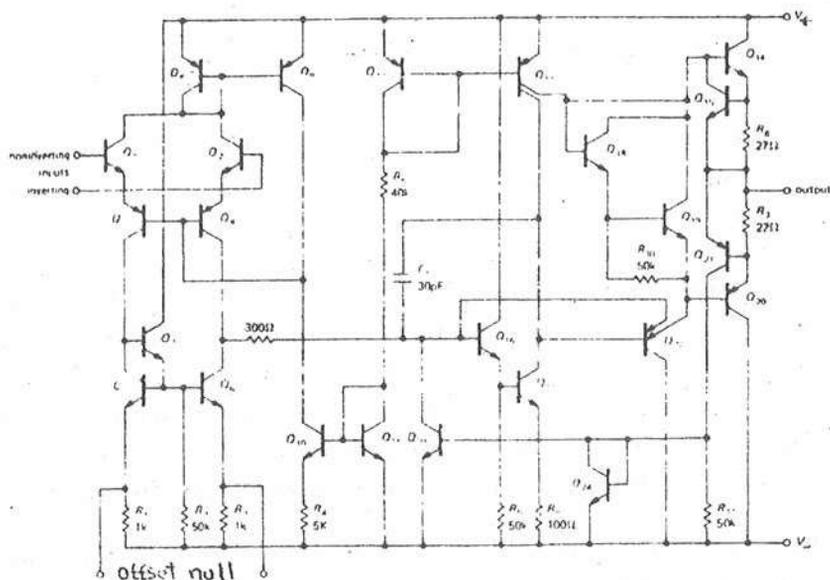


Figura 14.2: Circuitos internos do amplificador operacional 741.

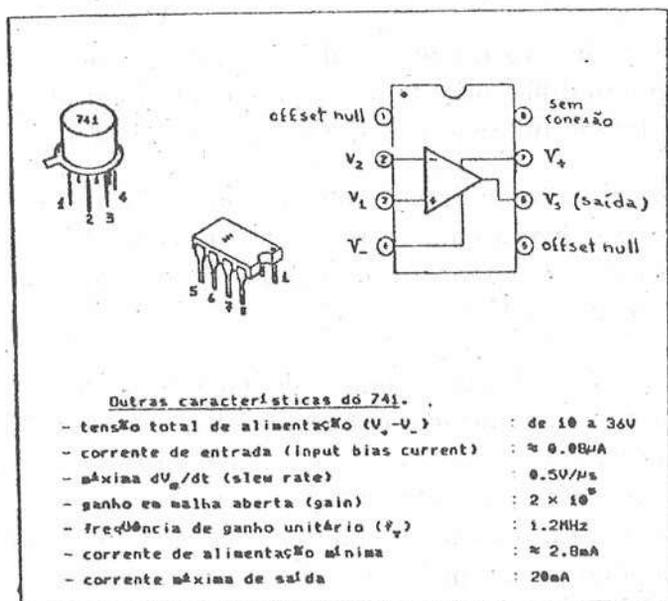


Figura 14.3: Características do op-amp 741.

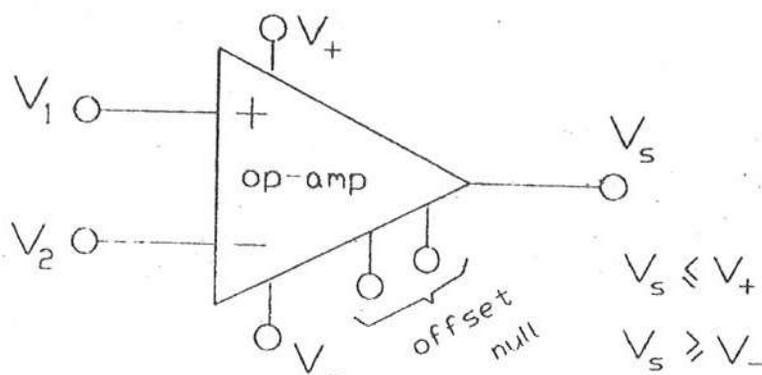


Figura 14.4: Representação do 741, incluindo terminais para as tensões de alimentação e para anular tensão DC espúria na saída.

• O *ganho em malha aberta* (*voltage open loop gain*) é a razão entre a tensão de entrada e a de saída quando não existe malha de realimentação, tal como na Figura 14.5.

$$G_{VOL} = \frac{V_s}{V_1} \quad \text{ou} \quad G_{VOL}(dB) = 20 \log \frac{V_s}{V_1} \quad (14.4)$$

No caso de um op-amp ideal, este ganho é infinito. Para um op-amp real este ganho é muito alto, mas não é infinito. Para o op-amp 741 este ganho é da ordem de 10^5 ($> 100 \text{ dB}$) para frequências menores que 100 Hz . A partir desta frequência, o ganho diminui com a taxa de “6 dB por oitava”, isto é, cada vez que a frequência dobra, G_{VOL} diminui 6 dB.

• A *taxa de variação da tensão de saída com o tempo* (*slew rate*) é limitada. Para o 741 é da ordem de $0,5 \text{ V}/\mu\text{s}$. Mas esta taxa pode atingir a ordem de $6000 \text{ V}/\mu\text{s}$ para certos op-amps rápidos.

• Quando a tensão nas entradas é nula, a tensão de saída também deve ser nula. Entretanto, nem sempre isto ocorre e pode existir na saída, uma tensão contínua indesejável (*offset voltage*). No caso do op-amp 741, esta tensão pode ser reduzida usando os terminais 1 e 5, mostrados na Figura 14.4 (*offset null*). Usualmente, os manuais de fabricantes trazem sugestões para reduzir esta tensão.

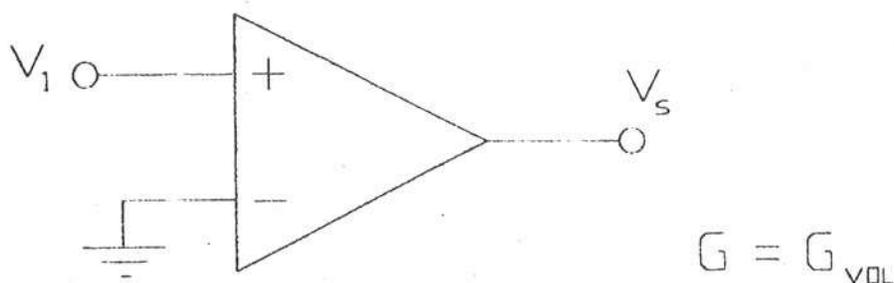


Figura 14.5: *Op-amp sem malha de realimentação (malha aberta).*

- A *corrente de saída* de um op-amp é limitada. No caso do 741, esta corrente máxima é 20 mA . Entretanto, em regime de corrente máxima pode ocorrer aquecimento do integrado e flutuações das características com a temperatura. Assim, a operação com corrente máxima deve ser evitada.

- A *resistência de saída* não é uma quantidade muito definida. A *ordem de grandeza* pode ser estimada em *centenas de ohms*, admitindo uma tensão de saída da *ordem de grandeza* 10 V em regime de corrente máxima (20 mA).

As observações apresentadas constituem apenas um resumo simplificado das principais características de op-amps e do 741, em particular. Os *manuals de fabricantes* são muito mais detalhados e devem ser consultados na realização de qualquer projeto com op-amps em circuitos integrados. Além disso, existem outras características não mencionadas aqui tais como as relativa a rejeição de modo comum, ruído na tensão e corrente de entrada e outras que, usualmente, não são muito importantes em projetos mais simples. Os bons manuais apresentam valores máximos e mínimos para os diversos parâmetros envolvidos, efeitos de variação com a temperatura, curvas de ganho em função da tensão de alimentação ou em função da frequência de operação, método de cancelar a tensão "offset", rejeição de modo comum, ruído na tensão e corrente de entrada e outras especificações, além dos vários tipos de en-

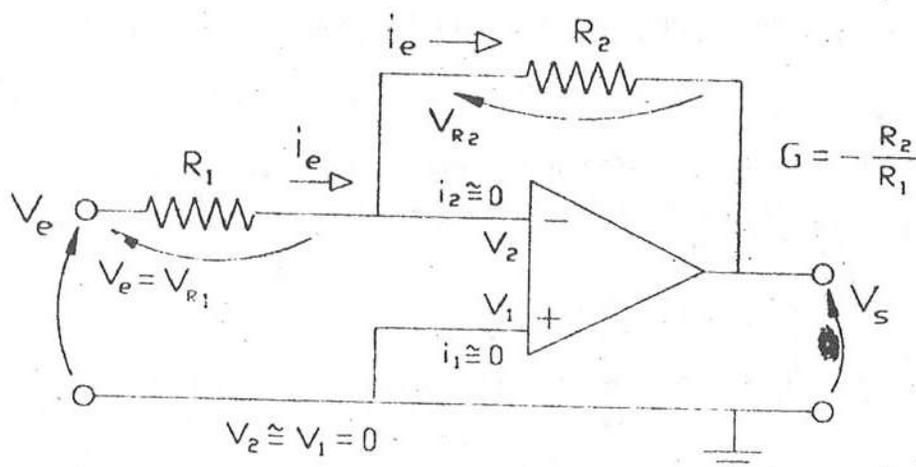


Figura 14.6: Amplificador inversor simples.

capsulamento do integrado e identificação dos terminais. Os chamados “manuais de aplicações”, também elaborados pelos fabricantes, apresentam várias sugestões de circuitos, utilizando os op-amps.

Nas circuitos apresentados a seguir, são omitidas as tensões de alimentação, bem como outros detalhes, tais como a de compensação de tensão de saída (offset null) e componentes menos essenciais. Um exemplo de projeto completo é mostrado na Figura 14.14.

14.3 Amplificadores simples

14.3.1 Amplificador inversor simples

A Figura 14.6 mostra um *amplificador simples*². A malha de realimentação é constituída de dois resistores R_1 e R_2 , sendo a entrada positiva (+) ligada diretamente à terra, admitida como em potencial $V_T = 0$. Assim,

$$V_1 = 0 \quad (14.5)$$

²A palavra “simples” é usada para distinguir de configurações “diferenciais”. Por exemplo, um “amplificador diferencial” amplifica a diferença das entradas.

Conforme as Equações 14.1 e 14.2 para um op-amp, resultam

$$V_1 = V_2 \cong 0 \quad \text{e} \quad i_1 = i_2 \cong 0 \quad (14.6)$$

Se $i_1 = 0$, a corrente de entrada i_e que passa por R_1 deve ser a mesma que passa por R_2 , como indicado na Figura 14.6. Uma vez que $V_1 = 0$, resultam:

$$V_s + V_{R2} = V_s + R_2 i_e = 0 \quad \text{e} \quad V_e = V_{R1} = R_1 i_e \quad (14.7)$$

O ganho do circuito, entendido como um quadripolo é dado por

$$G = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (14.8)$$

Isto é, a tensão de entrada, V_s é *amplificada de um fator G e invertida*. No caso $G < 1$, o amplificador se torna um atenuador, na realidade. Isto é, o amplificador inversor pode ser utilizado para amplificar um sinal elétrico muito pequeno ou atenuar um sinal elétrico muito grande.

O resultado acima é deduzido para um op-amp ideal, para o qual

$$i_1 = i_2 = 0 \quad \text{e} \quad G_{VOL} = \infty \quad (\text{op-amp ideal}) \quad (14.9)$$

Para o op-amp real, nem as correntes de entrada são nulas e nem o ganho em malha aberta é infinito. Entretanto, o op-amp real pode ser considerado ideal com muito boa aproximação quando são respeitadas as condições

$$i_e \gg i_1 \quad \text{ou} \quad i_2 \quad (\text{op-amp real}) \quad (14.10)$$

$$|G| \ll G_{VOL} \quad (\text{op-amp real}) \quad (14.11)$$

Assim, as resistências R_1 e R_2 da malha de realimentação devem ser escolhidas de forma a respeitar estas condições. Para o op-amp 741, $i_1 \approx i_2 \approx 80 \text{ nA}$ e $G_{VOL} \approx 10^5$. Para amplificação de tensão contínua com ganho alto, pode ser necessário utilizar os terminais "offset null", para anular a "tensão offset".

A resistência de entrada do amplificador é

$$R_{ea} = \frac{V_e}{i_e} = R_1 \quad (14.12)$$

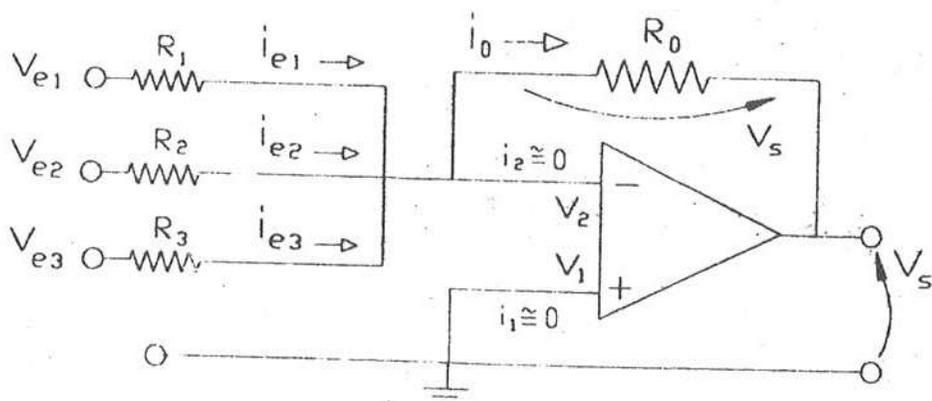


Figura 14.7: Somador de tensões.

Uma vez que R_1 e R_2 podem ser escolhidos arbitrariamente numa extensa faixa de valores, resulta que o amplificador inversor pode também ser usado para casamento de impedâncias.

Uma outra restrição que deve ser lembrada é que a tensão de saída deve ser menor que a tensão de alimentação. Assim, com um ganho muito alto, a saída do op-amp pode atingir o máximo (saturação do op-amp) com tensões relativamente baixas na entrada. Por exemplo, se um amplificador a op-amp é alimentado com duas baterias de $9V$ ($V_+ = +9V$ e $V_- = -9V$) e dimensionado para $G = 100$, uma tensão de $100mV$ na entrada resulta em saturação do op-amp.

14.3.2 Somador inversor simples

O circuito da Figura 14.7 permite somar diversas tensões. Utilizando as condições

$$V_1 \cong V_2 = 0 \quad \text{e} \quad i_{e1} + i_{e2} + i_{e3} \cong i_0 \quad (14.13)$$

resultam

$$V_s = -R_0 i_0 \quad V_{e1} = R_1 i_{e1} \quad V_{e2} = R_2 i_{e2} \quad \text{e} \quad V_{e3} = R_3 i_{e3} \quad (14.14)$$

Substituindo as correntes em 14.13, obtém-se

$$V_s = -\left(\frac{R_0}{R_1} V_{e1} + \frac{R_0}{R_2} V_{e2} + \frac{R_0}{R_3} V_{e3}\right) \quad (14.15)$$

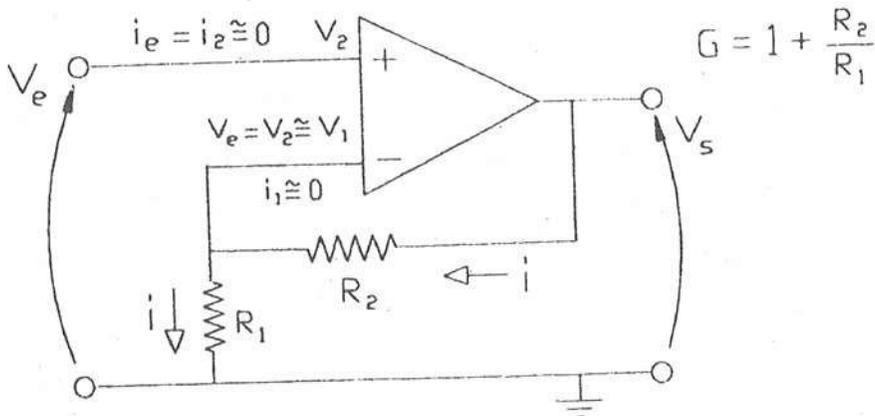


Figura 14.8: Amplificador não inversor simples.

A expressão pode ser generalizada para qualquer número de entradas. Neste caso, o conceito de ganho do quadripolo não se aplica, pois existem várias entradas.

Em geral, circuito somador permite misturar sinais elétricos. Em particular, o circuito somador é útil para eliminar certos sinais elétricos indesejáveis (ruídos) em um dado sinal elétrico de interesse. Por exemplo, quando é possível captar um sinal invertido correspondente a um determinado ruído, este sinal de ruído e o sinal de interesse são injetados nas entradas do somador. Ajustando-se a resistência da entrada correspondente ao ruído, pode-se cancelar o ruído correspondente ao sinal de interesse.

14.3.3 Amplificador não inversor simples

A Figura 14.8 mostra um amplificador simples não inversor. Como pode ser visto, $V_e \cong V_1 = R_1 i$ e $V_s = (R_1 + R_2) i$, resultando

$$G = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (14.16)$$

Isto é, o sinal é amplificado de um fator G e não é invertido. As limitações práticas são essencialmente as mesmas do amplificador inversor.

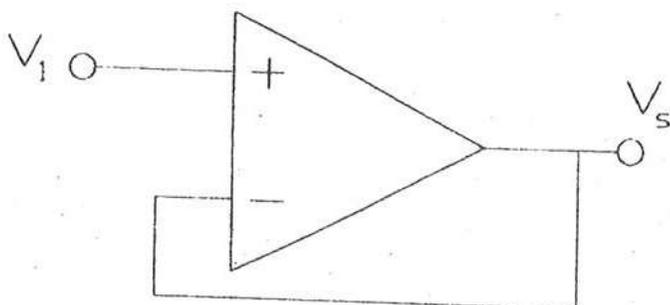


Figura 14.9: Seguidor de tensão.

Uma vez o sinal elétrico é aplicado diretamente à entrada do op-amp, a resistência de entrada do amplificador é a mesma do op-amp, que é muito alta. Assim, este amplificador tem resistência interna *muito maior que a do amplificador inversor*. Uma outra diferença em relação ao amplificador inversor é que a tensão não pode ser atenuada no amplificador não inversor, como mostra a Equação 14.16.

Um circuito interessante é o chamado “seguidor de tensão”, mostrado na Figura 14.9. Trata-se de um amplificador não inversor com $R_1 = \infty$ e $R_2 = 0$. A expressão 14.16 mostra que $G = 1$, neste caso. Portanto, o sinal de saída V_s é igual ao sinal de entrada³. Entretanto, a grande vantagem é que a impedância de entrada é muito alta, enquanto que a impedância de saída é baixa. O seguidor de tensão é útil para ser ligado a um sensor, detetor ou circuito com impedância interna extremamente alta.

14.4 Diferenciadores e integradores

A Figura 14.10 mostra um circuito similar ao amplificador inversor simples, onde as resistências foram substituídas por impedâncias quaisquer. O ganho pode ser obtido de modo análogo ao amplificador inversor:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = -\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} \quad (14.17)$$

³A tensão de saída “segue” a tensão de entrada.

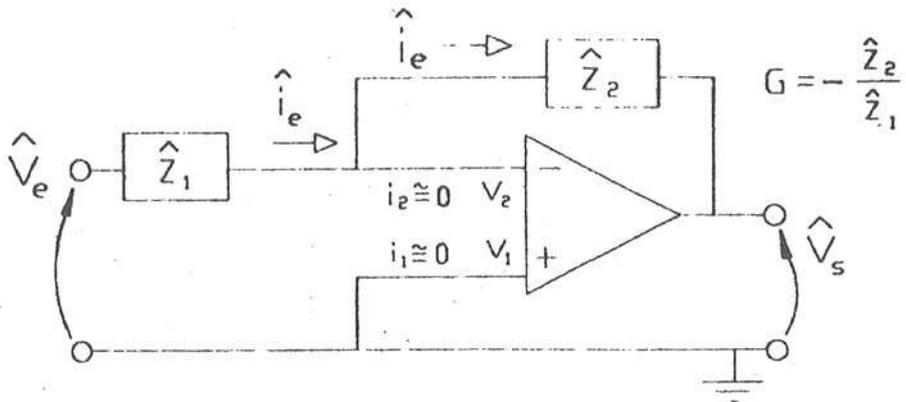


Figura 14.10: Malha de realimentação com impedâncias quaisquer.

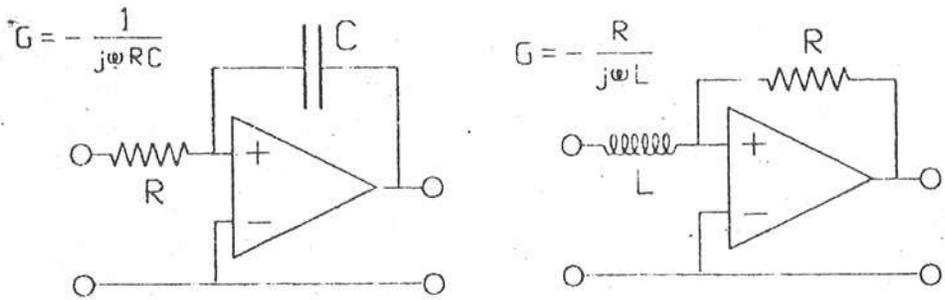


Figura 14.11: Integradores ativos e respectivos ganhos.

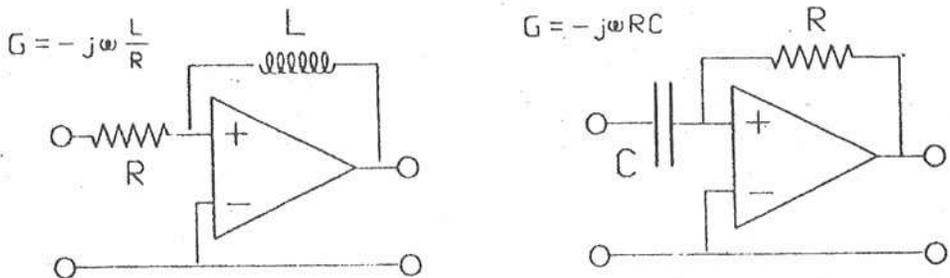


Figura 14.12: Diferenciadores ativos e respectivos ganhos.

Um circuito integrador pode ser obtido utilizando um capacitor com impedância Z_2 e um resistor como impedância Z_1 , como mostrado na Figura 14.11. Resulta que

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}_e} = -\frac{1}{j\omega RC} \quad (14.18)$$

Isto é,

$$\hat{V}_s = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e dt \quad (14.19)$$

A grande vantagem deste *integrador ativo*, em relação ao integrador RC passivo⁴ é que não existe a condição de frequências suficientemente altas ($\omega \gg 1/RC$). Isto é, o integrador ativo também funciona em frequências baixas.

Existe uma limitação importante para o integrador ativo. Para uma tensão contínua na entrada, a integral aumenta linearmente com o tempo. Assim, a saída satura rapidamente, dependendo dos valores de R , C e da tensão envolvida. Assim, o integrador ativo não pode ser usado para integrar tensão contínua, exceto se existir um circuito adicional que realize descargas periódicas do capacitor C . Pelo mesmo motivo, o integrador pode saturar para frequências muito baixas.

A Figura 14.11 mostra também um circuito integrador LR. A Figura 14.12 mostra exemplos de circuitos diferenciadores. Em cada caso, o ganho complexo é indicado na própria figura e não existem limitações de frequência exceto as intrínsecas do próprio do op-amp.

14.5 Configurações diferenciais

Configurações diferenciais podem ser montadas para amplificadores, diferenciadores, integradores e outros circuitos. As duas entradas são utilizadas e a tensão de saída é correlacionada com a *diferença das tensões nas entradas*. A Figura 14.13 mostra uma configuração "diferencial", com dupla malha de realimentação formada por impedâncias quaisquer.

⁴Ver Seção 13.4.1.

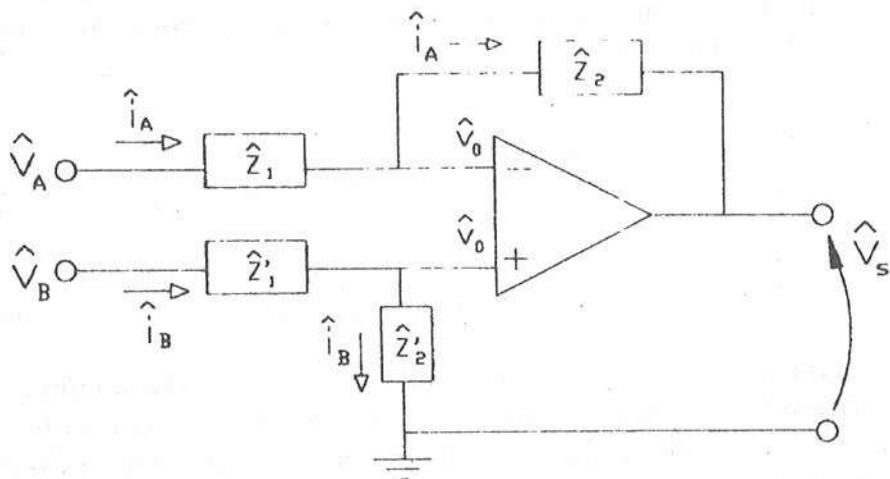


Figura 14.13: Configuração com dupla malha de realimentação.

Admitindo que as tensões de entrada do op-amp são iguais (V_0) e que as correntes de entrada são desprezíveis, pode-se escrever

$$\hat{V}_A = \hat{Z}_1 \hat{i}_A + \hat{V}_0 \quad \hat{V}_B = \hat{Z}'_1 \hat{i}_B + \hat{V}_0 \quad (14.20)$$

e

$$\hat{V}_0 - \hat{Z}_2 \hat{i}_A = \hat{V}_s \quad \hat{V}_0 - \hat{Z}'_2 \hat{i}_B = 0 \quad (14.21)$$

No caso particular em que as impedâncias satisfazem à condição:

$$\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} = \frac{\hat{Z}'_2}{\hat{Z}'_1} \quad (14.22)$$

é possível resolver as equações para se obter

$$\hat{V}_s = \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} (\hat{V}_A - \hat{V}_B) \quad (14.23)$$

Portanto, escolhendo-se convenientemente as impedâncias da malha de realimentação, pode-se obter amplificadores, diferenciadores e integradores que atuam sobre a diferença ($V_A - V_B$). Entretanto, deve ser observada a condição 14.22.

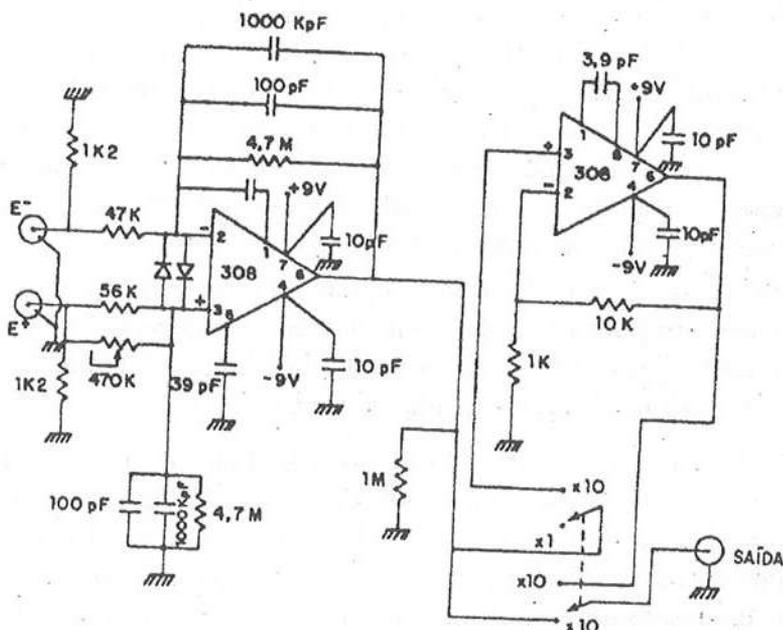


Figura 14.14: Integrador "diferencial" utilizado no Tokamak TBR1.

A Figura 14.14 mostra um exemplo de integrador "diferencial", que integra a diferença dos sinais das entradas. Este circuito integrador foi desenvolvido no Laboratório de Física de Plasmas do IFUSP e diversos módulos, com diferentes ganhos, são utilizados no Tokamak TBR1 para integrar sinais de sondas magnéticas e bobinas de Rogowski⁵. Além do integrador diferencial, existe um amplificador de ganho 10 que pode ser utilizado ou não, conforme opção feita na chave mostrada na parte inferior da figura.

14.6 Observações gerais

Os circuitos discutidos são apenas exemplos de dispositivos que podem ser montados a partir de op-amps. Vários outros circuitos, podem ser realizados, tais como amplificador logarítmico, filtros diversos, detetor de tensão de pico, comparador de tensões, fontes de corrente, osciladores e outros. Tais circuitos são discutidos na Referência 1, por exemplo.

⁵Ver Referência 2, por exemplo.

Além dos circuitos padrões mais conhecidos, outras configurações podem ser criadas para fins mais específicos. Por exemplo, pode-se construir um circuito somador com impedâncias arbitrárias nas entradas. Assim, diversos sinais podem ser misturados, mas também total ou parcialmente integrados ou diferenciados, além de amplificados ou atenuados. Isto pode ser muito útil na eliminação de componentes indesejáveis num determinado sinal elétrico de interesse.

Além disso, foram discutidas apenas as considerações de ordem prática mais importantes. Existem outras que devem ser levadas em conta num projeto prático. O exemplo da Figura 14.14 mostra vários destes detalhes práticos, resumidos a seguir.

- Os 2 diodos mostrados são diodos de silício comuns e constituem proteção do op-amp contra sobretensões. Usualmente, as tensões nas entradas do op-amp são iguais e o diodo não conduz. Entretanto, se por qualquer motivo for aplicada uma tensão excessiva nestas entradas, um dos diodos conduz, limitando a tensão nas entradas a $\approx 0,6 V$.

- Os resistores de alto valor ($4,7 M\Omega$) se destinam a evitar integração de tensão contínua ou de frequência muito baixa, o que resultaria na saturação do op-amp.

- Os capacitores principais do integrador são de $1000 KpF \equiv 1 \mu F$, que são capacitores plásticos de indutância muito alta. Isto poderia resultar em forte realimentação para ruídos de alta frequência, devido ao aumento da impedância com a frequência ($X_L = \omega L$). Para se evitar parcialmente este efeito, acrescenta-se um capacitor cerâmico de $100 pF$, que não é indutivo e impede que a impedância total de realimentação ultrapasse determinado valor, por maior que seja a frequência.

- O resistor de $56 K\Omega$ e o potenciômetro em paralelo permitem ajustar a resistência da entrada inferior de forma que as constantes RC da malha inferior e da superior sejam exatamente iguais, conforme a condição 14.22.

- Os capacitores de $10 pF$ se destinam a filtrar eventuais ruídos originários das fontes de alimentação.

- Os capacitores de $39 pF$ se permitem reduzir a tensão "offset".

O melhor procedimento para elaboração de projetos práticos consiste em consultar os manuais de fabricantes, principalmente os chamados "manuais de aplicações", que apresentam os projetos de circuitos mais simples, sugestões para projetos mais elaborados e as recomendações mais importantes de cuidados a serem observados.

Um outro procedimento, nem sempre observado, consiste em escolher o op-amp mais adequado para o projeto visado, a partir das especificações fornecidas nos manuais de fabricantes. Por exemplo, o 741 é um op-amp de uso geral, muitas vezes utilizado por comodismo, devido ao baixo custo e fácil aquisição. Entretanto, nem sempre é o mais adequado para um projeto específico. No circuito da Figura 14.14, optou-se pelo 308, que tem corrente de entrada muito menor que a do 741 e a corrente de alimentação também é muito menor. A menor corrente de entrada significa menor erro na integração do sinal de entrada, enquanto que uma baixa corrente de alimentação é um detalhe importante num circuito alimentado por baterias de 9 V.

A maioria dos circuitos discutidos podem ser entendidos como quadripolos e se aplicam as considerações apresentadas na Seção 13.4.3, a respeito de superposição de frequências. Os resultados são obtidos para tensão harmônica⁶, mas têm validade mais geral, para outras tensões periódicas ou pulsadas. Isto é, os resultados são válidos desde que não existam restrições às diversas frequências que compõem estas tensões não harmônicas. Um aspecto pouco discutido aqui, mas que deve ser observado, é que os op-amps usuais têm sérias limitações para altas frequências, especialmente para configurações com altos ganhos.

⁶Isto é, variação com o tempo do tipo senoidal, com frequência definida.

Referências

1. P. Horowitz and W. Hill, *The Art of Electronics*, Cambridge University Press, Cambridge (1980)
2. A.Y. Ueta, *Campo Vertical de Equilíbrio no Tokamak TBR*, Tese de Mestrado, IFUSP (1985).

15

Laser e aplicações

Os princípios de funcionamento do laser e as propriedades do feixe de radiação são resumidos nesta Seção, juntamente com um resumo de aplicações.

15.1 Breve histórico

A palavra *laser* é formada pelas iniciais da expressão *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, que significa amplificação de luz por emissão estimulada de radiação. A própria palavra *laser* é sucessora da palavra mais antiga *maser*, formada a partir de *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*.

Em 1917, Einstein mostrou teoricamente que a emissão estimulada de radiação deveria existir. A idéia de amplificar radiação pelo efeito de emissão estimulada foi apresentada pelo físico soviético V. A. Fabrikant, em 1939. Em 1952, os físicos soviéticos N. G. Basov e A. M. Prokhorov e, independentemente destes, o físico americano C. H. Townes apresentaram a idéia de um amplificador para microondas, que foi inicialmente chamado "gerador a feixe molecular" e mais tarde, maser. Nos dois anos seguintes, equipes lideradas pelos mesmos físicos no Instituto Lebedev de Física na URSS e na Universidade de Columbia construíram o maser. Estes físicos, em 1964 receberam o Premio Nobel por seus trabalhos.

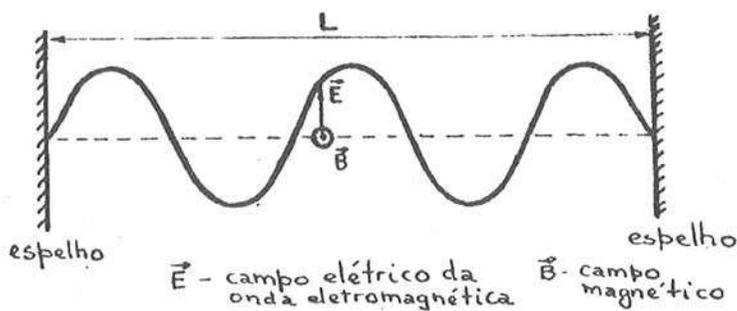


Figura 15.1: Onda estacionária no ressoador ótico.

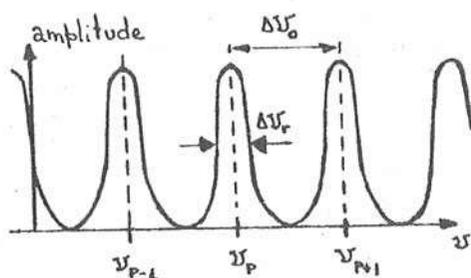


Figura 15.2: Ressonâncias para alto Q .

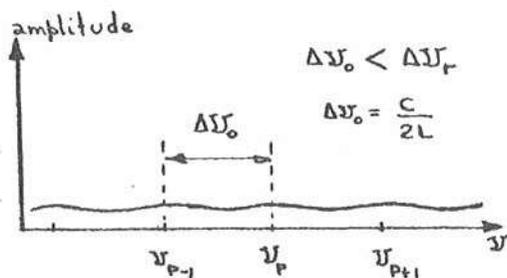


Figura 15.3: Ressonâncias para baixo Q .

Nos anos seguintes, muitos pesquisadores se dedicaram ao desenvolvimento do laser, isto é, o maser para a amplificação de luz visível. Por isso, o laser foi inicialmente chamado de "maser ótico". O primeiro "maser ótico", apresentado em 1960, foi um laser de rubi sintético, construído pelo físico americano T. H. Maiman. No mesmo ano, foi demonstrado o funcionamento do laser de He-Ne, que é o laser visível mais conhecido. Os principais tipos de lasers a gas, de estado sólido e semicondutores foram essencialmente desenvolvidos nos anos 60 e início dos anos 70. A partir do início da década de 60, a história dos lasers é impossível de ser resumida, devido à enorme variedade dos mesmos¹.

15.2 Alguns conceitos preliminares

15.2.1 Ressonador ótico

O *ressoador ótico* é essencial para o funcionamento de um laser. Um ressoador ótico simples² é constituído de dois espelhos planos, um contra o outro, como é mostrado na Figura 1. Se os espelhos são admitidos como planos paralelos de grandes dimensões, as soluções para a equação de onda eletromagnética na direção perpendicular aos espelhos são *ondas planas estacionárias*. Tais soluções também são chamadas *modos normais* do ressoador. As amplitudes máximas de oscilação são mostradas na Figura 15.1. A distância L entre os espelhos deve ser tal que:

$$L = p \frac{\lambda}{2} \quad (\text{onde } p = 1, 2, 3 \dots) \quad (15.1)$$

e λ é o comprimento de onda da radiação para o meio material entre os espelhos. Para o caso de vácuo ou gas a baixa pressão, o índice de refração n é 1 e as frequências dos modos normais são dadas por

$$\nu_p = \frac{c/n}{\lambda} = \frac{c}{2L} p \quad \text{onde } p = 1, 2, 3 \dots \quad (15.2)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

¹As Referências 1, 2, e 3 são textos que tratam de lasers, em geral. As demais Referências abordam temas mais específicos, a maioria deles em nível de divulgação.

²Este ressoador ótico simples é análogo a um fio com as extremidades fixas.

Se o ressoador ótico é excitado numa das frequências dos modos normais, ocorre ressonância e a amplitude máxima de oscilação do campo elétrico da onda pode ser muito alta, dependendo das perdas no ressoador, mesma quando a potência de excitação é relativamente pequena. Conforme mostra a Equação 15.2, as frequências de ressonâncias do ressoador ótico são regularmente espaçadas, a separação entre frequências sucessivas é $\Delta\nu_0 = \nu_{p+1} - \nu_p = (c/2L)$.

Além das frequências de ressonância, uma outra característica importante do ressoador é o *fator de qualidade* Q , dado por

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia total armazenada no ressoador}}{\text{Energia perdida por ciclo de oscilação}} = \frac{\nu_p}{\Delta\nu_r} \quad (15.3)$$

onde $\Delta\nu_r$ caracteriza a largura da curva de ressonância do ressoador na frequência ν_p .

Quanto maior o fator de qualidade, tanto mais estreita e alta é a ressonância. Conforme mostrado nas Figuras 15.2 e 15.3, o fator de qualidade deve ser suficientemente alto, para que a largura $\Delta\nu_r$ de cada ressonância seja menor que o espaçamento $\Delta\nu_0$ entre as ressonâncias.

As perdas num ressoador ocorrem pelos efeitos seguintes :

- *Difração da onda eletromagnética* devido ao fato que os espelhos são finitos e a onda estacionária não é exatamente uma onda plana.

- *Absorção ou espalhamento* da onda nos meios materiais entre os espelhos. Num laser, além do *meio ativo*, podem existir janelas óticas entre os espelhos.

- *Transmissão* da onda nos espelhos que não são perfeitos. No laser, o feixe de saída se forma pela transmissão de parte da radiação num dos espelhos e isto constitui perda para o ressoador.

15.2.2 Inversão de população e bombeamento

A Figura 15.4.a representa alguns níveis de energia de um sistema atômico qualquer, tal como átomo, molécula ou íon. Num meio material tal como um gas, constituído de sistemas atômicos idênticos, existem N_i sistemas em cada nível de energia E_i . A distribuição de N_i depende da temperatura, conforme as leis da Mecânica Estatística, sendo geralmente chamada *população dos níveis*.

Em condições normais de *equilíbrio termodinâmico*, para níveis com energias $E_0 < E_1 < E_2 < E_3 \dots$, as populações correspondentes são tais que

$$N_0 > N_1 > N_2 > N_3 > \dots \quad (15.4)$$

Isto é, a população é tanto menor quanto maior a energia do nível.

A expressão *inversão de população* se refere a uma condição excepcional, na qual a ordem acima se encontra invertida entre dois níveis quaisquer. Por exemplo, se

$$N_2 < N_3 \quad (15.5)$$

existe uma inversão de população entre os níveis 2 e 3. Evidentemente, esta não é uma situação de equilíbrio termodinâmico e a tendência é que o equilíbrio seja restabelecido, o que ocorre por meio de transições radiativas ou transferências ressonantes de energia.

Geralmente, o estado de menor energia (E_0) é o mais "populoso" e o método mais direto de criar uma inversão de população tal como $N_2 < N_3$, consiste em levar sistemas do nível 0 para o nível 3. Este processo é chamado *bombeamento*, devido à analogia com uma bomba hidráulica, cuja função consiste em bombear líquido para uma condição de energia mais alta. As expressões "encher o nível" ou "esvaziar nível" são geralmente usadas para indicar o processo de aumentar ou diminuir a população de determinado nível.

Alguns métodos de bombeamento são resumidos a seguir. O exemplo acima de inversão de população entre os níveis 2 e 3 será sempre adotado como referência no que segue.

- **Bombeamento ótico.** O sistema no nível 0 absorve energia de *radiação eletromagnética*, geralmente luz visível ou radiação infravermelha. Isto é, o sistema absorve um fóton de energia

$$\Delta E = E_3 - E_0 = \epsilon \quad (15.6)$$

e ocorre a transição para o nível 3. Este é o processo mais eficiente de bombeamento, quando a energia da radiação é exatamente a necessária para excitar o nível 3. Na prática, o bombeamento ótico é feito por meio de lâmpadas (contínuas ou flashes) ou um laser.

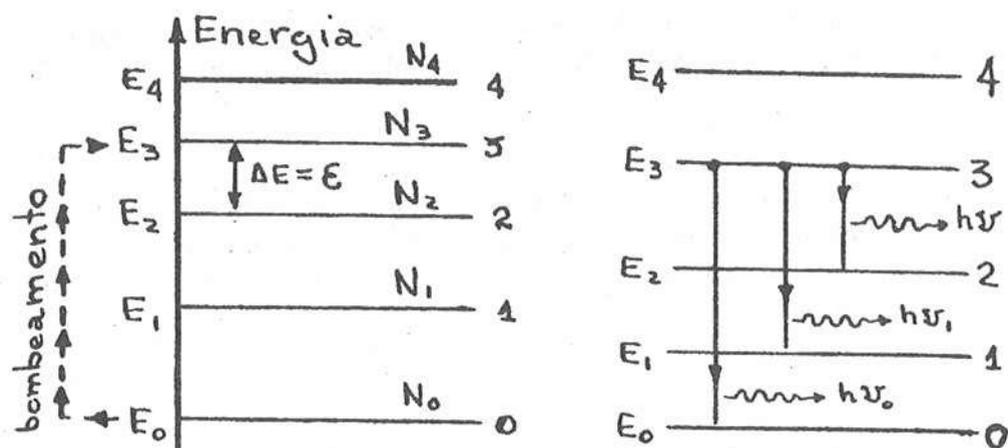


Figura 15.4: Níveis de energia e desexcitação radiativa.

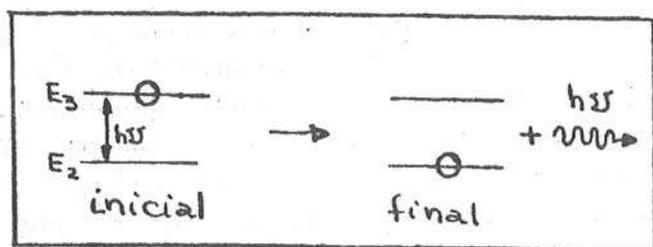


Figura 15.5: Emissão espontânea de radiação.

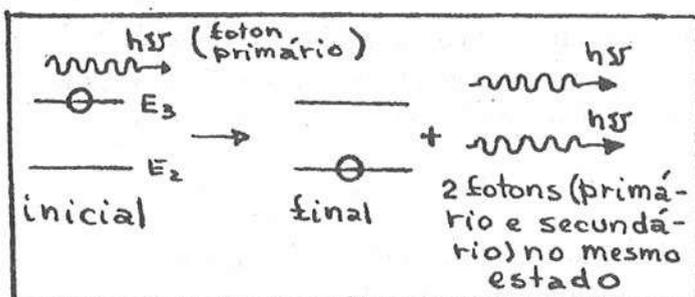


Figura 15.6: Emissão estimulada de radiação.

• **Bombeamento elétrico.** Uma descarga elétrica no meio provoca colisões entre elétrons, íons e sistemas atômicos neutros, podendo resultar em excitação do sistema atômico. O método é particularmente adequado quando o meio é um gás. As diversas condições envolvidas, tais como corrente elétrica, temperatura, pressão, composição do gás e outros fatores, podem ser ajustadas de forma a favorecer a excitação de um determinado nível.

Entretanto, não é fácil criar uma inversão de população por simples descarga elétrica. Por exemplo, quando se deseja criar uma inversão de população entre os níveis 2 e 3, os níveis 1 e 2 também são excitados, e geralmente em maior número que o nível 3. Em geral, deve existir um mecanismo auxiliar de enchimento do nível 3 que é a *transferência ressonante de energia de excitação*. Por exemplo, considerando um gás A no qual se deseja criar uma inversão de população entre os níveis 2 e 3, um outro gás B pode auxiliar o enchimento do nível 3 como explicado a seguir. O sistema atômico do gás B deve ser tal que exista um nível excitado meta-estável³ tal que a energia de excitação ΔE é igual à energia de excitação do sistema atômico do gás A. Assim, a descarga elétrica enche o nível meta-estável do gás B, que por colisões pode transferir a energia de excitação para o gás A, ajudando a encher o nível 3 do gás A. Exemplos deste mecanismo são os lasers de $He - Ne$ e de CO_2 . O laser de argônio (Ar) funciona sem nenhum gás auxiliar, devido ao rápido decaimento dos níveis inferiores.

• **Bombeamento químico.** Os sistemas atômicos podem ser formados em estados excitados, numa reação química altamente exotérmica. Como inicialmente não existem sistemas atômicos do tipo, as populações são naturalmente invertidas, na formação dos mesmos.

• **Bombeamento térmico.** O meio é aquecido a temperaturas muito altas e rapidamente resfriado. Muitos sistemas atômicos ficam em estados excitados imediatamente após o resfriamento e, dependendo das taxas de desexcitação, pode ocorrer inversão de população.

• **Bombeamento por injeção de portadores.** A inversão de população se deve à injeção de portadores numa junção de semicondutores.

³Estado meta-estável é um estado instável, mas tal que o sistema pode permanecer neste estado por um tempo relativamente longo.

15.2.3 Mecanismos de desexcitação

A forma mais usual de desexcitação é por *transição radiativa*, que é transição para um nível de energia mais baixa com emissão de um fóton. Se o sistema no nível 3 decai para o nível 2, a energia do fóton é

$$h\nu_f = E_3 - E_2 = \epsilon \quad (15.7)$$

Mas as outras transições mostradas na Figura 15.4.b são possíveis, desde que não contrariem leis de conservação. A transição radiativa pode ocorrer *espontaneamente*, mas também pode ser *estimulada*, como será visto a seguir. Além disso, existem outros mecanismos de desexcitação (transições não radiativas), tal como a transferência ressonante de energia de excitação.

- *Emissão espontânea de radiação.* Uma transição tal como a do nível 3 para 2, pode ocorrer espontaneamente, com probabilidade $W_{esp} = A$. Esta probabilidade depende somente do particular sistema atômico e da transição considerada. Isto é, a probabilidade de emissão espontânea de radiação é independente de quaisquer condições externas.

- *Emissão estimulada de radiação.* A emissão estimulada de radiação pode ocorrer na transição do nível 3 para o nível 2 quando existe um *campo de radiação na frequência ν* . Se existem N_f fótons por unidade de volume com energia $h\nu = \epsilon$, a probabilidade de emissão estimulada é dada por

$$W_{est} = B N_f \epsilon \quad (15.8)$$

onde B é uma constante para a transição $E_3 \rightarrow E_2$.

Se existem outras transições possíveis ($E_3 \rightarrow E_1$ e $E_3 \rightarrow E_0$), uma maneira de favorecer a transição $E_3 \rightarrow E_2$, consiste em criar um campo de radiação intenso na frequência ν .

Os coeficientes A e B são chamados *coeficientes de Einstein*, que em 1917 demonstrou teoricamente a existência da emissão estimulada de radiação. Para mostrar isto, pode-se considerar sistemas atômicos e fótons em equilíbrio estatístico, sendo que os sistemas atômicos têm um nível excitado de mesma energia ϵ dos fótons. Uma vez que a probabilidade de excitação é proporcional ao número de fótons presentes e deve existir equilíbrio estatístico, resulta que deve existir um mecanismo de desexcitação que tenha probabilidade proporcional ao

número de fótons presentes. Este mecanismo é justamente a emissão estimulada de radiação.

A emissão estimulada pode ser entendida como uma transição induzida pela passagem de um *fóton primário*, resultando da desexcitação, um *fóton secundário*. Uma característica importante da emissão estimulada é que o fóton secundário tem exatamente o mesmo estado quântico do fóton primário (Figura 15.6). Isto significa que o *fóton secundário tem a mesma energia, a mesma direção e a mesma polarização que o fóton primário*. Estas 3 características são muito importantes para o funcionamento de um laser.

15.3 Princípio de funcionamento do laser

O funcionamento do laser é baseado em uma particular transição radiativa ($E_3 \rightarrow E_2$, no exemplo). O meio material no qual ocorre a transição é chamado *meio ativo* e a particular transição é chamada *transição laser*. A *transição laser* ($E_3 \rightarrow E_2$) deve ser tal que seja *fácil criar e manter uma inversão de população*. Isto é, o processo de bombeamento deve encher facilmente o nível 3. Além disso, também é importante esvaziar o nível 2 para manter a inversão de população. O princípio de funcionamento do laser consiste em colocar o meio ativo num ressoador ótico sintonizado na frequência exata da transição laser. Devido à ressonância, aumenta o campo de radiação na frequência ν da transição laser. Assim, a transição laser $E_3 \rightarrow E_2$ é favorecida em relação a outras possíveis transições, sendo que os fótons emitidos na transição estimulada têm direção e polarização determinados pelo ressoador ótico. Um dos espelhos do ressoador transmite uma fração da radiação permitindo a formação do feixe de saída.

A Figura 15.7 mostra esquematicamente um laser polarizado a gas. O polarizador mostrado é apenas esquemático, pois não pode ser um polarizador comum. Filtros polarizadores comuns apresentam muita absorção e comprometeriam o fator de qualidade do ressoador. Na prática, o que funciona bem como filtro polarizador é uma janela de Brewster. Para um material de índice de refração n_0 , o ângulo de Brewster é o ângulo de incidência θ_B tal que $\text{tg } \theta_B = n_0$.

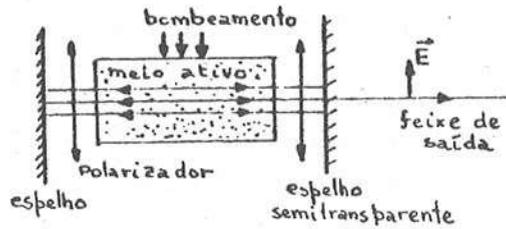


Figura 15.7: Diagrama esquemático de um laser.

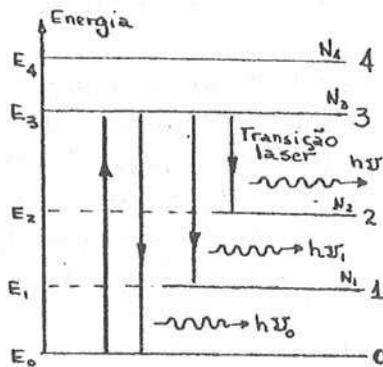


Figura 15.8: Níveis de energia envolvidos.

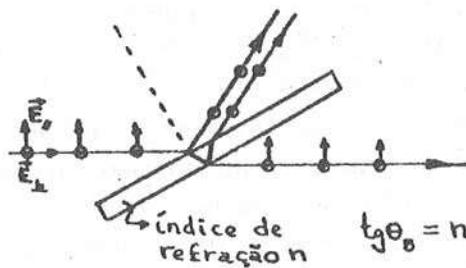


Figura 15.9: Janela de Brewster.

Para incidência em ângulo de Brewster θ_B , a luz refletida é totalmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência, como é mostrado na Figura 15.9. Assim, num percurso de ida e volta ocorrem 4 reflexões para esta polarização e as perdas são muito grandes. Resulta que o ressoador ótico só funcionará com *fator de qualidade alto para a polarização paralela ao plano de incidência*.

Para laser a gas, as janelas de Brewster servem também para fechar as extremidades do tubo com gas.

Sem janelas de Brewster, o laser pode funcionar igualmente bem, mas a radiação não será polarizada em um direção definida e o laser é chamado *não polarizado*. Em geral, durante tempo curto, o feixe é polarizado, mas a polarização varia com o tempo. No caso de laser não polarizado, os espelhos podem servir de janelas para fechar o tubo de descarga.

15.4 Características da radiação do laser

O feixe de radiação do laser é *altamente direcional*, mas se espalha conforme as leis da difração. Para estimar aproximadamente o ângulo de divergência do feixe de laser, pode-se considerar a difração de uma onda plana num orifício circular, como mostrado na Figura 15.10. O ângulo θ_d para o primeiro mínimo de difração é dado por

$$\text{sen } \theta_d \cong 1,22 \frac{\lambda}{a} \quad \text{ou} \quad \theta_d \approx 1,2 \frac{\lambda}{a} \quad (15.9)$$

onde a é o diâmetro do orifício. Admitindo que na saída do ressoador, o feixe tenha diâmetro d , o ângulo de divergência θ_d pode ser estimado pela expressão acima. Se um feixe de laser de He-Ne ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$), tem 1 mm na saída do ressoador, resulta $\theta_d \approx 8 \times 10^{-4} \text{ rd}$. Isto significa que o feixe terá aproximadamente 8 mm a 10 m de distância.

A expressão 15.9 mostra que, para melhorar a direcionalidade do laser, é necessário aumentar o diâmetro do feixe de saída. Além disso, para comprimentos de onda longos, tais como no infravermelho distante, a divergência é bem maior.



Figura 15.10: Difração em um orifício circular.

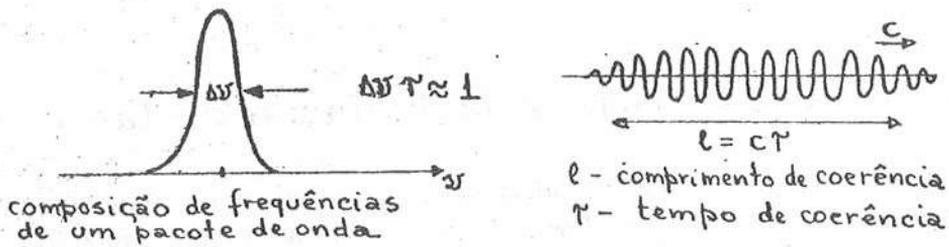


Figura 15.11: Relação entre o tamanho de um pacote de onda e a composição de frequência do mesmo.

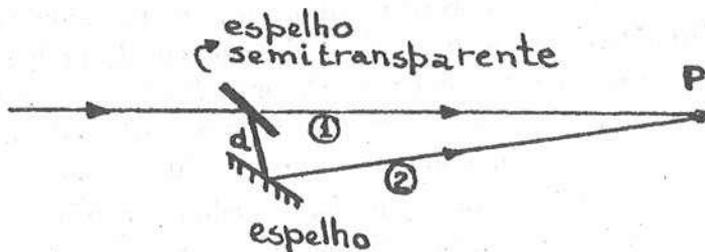


Figura 15.12: Interferência entre feixes luminosos.

A radiação do laser é *bastante coerente e altamente monocromática*. A coerência de um feixe pode ser avaliada pelo comprimento $l = c\tau$ dos *pacotes de onda* que constituem o feixe. O tempo de coerência τ é o tempo de passagem de um pacote de onda por um ponto de referência. Considerando a relação⁴ $\tau \Delta\nu_c \approx 1$, entre τ e a largura $\Delta\nu_c$ da distribuição de frequências de um pacote de ondas, resulta que existe uma estreita relação entre o tempo de coerência e a monocromaticidade do pacote de onda (Ver Figura 15.11).

O comprimento de coerência para fontes luminosas comuns é da ordem de milímetros, podendo chegar a 1 m para certas lâmpadas espectrais muito especiais. Para lasers, o comprimento de coerência varia de centímetros a dezenas de quilômetros.

A relevância da coerência pode ser avaliada no exemplo mostrado na Figura 15.12. Um feixe é dividido em feixes, que em seguida se encontram num ponto P. Não é possível observar interferência entre os feixes luminosos, se a diferença de percursos entre os feixes é maior que o comprimento de coerência. Experiências de *interferometria*, tais como esquematizadas na Figura 15.12 são bastante utilizadas e o comprimento de coerência sempre deve ser levado em consideração.

15.5 Tipos de lasers

Uma infinidade de tipos de lasers podem ser construídos e são classificados conforme o tipo de material ativo, o tipo de bombeamento utilizado e o regime de operação, que pode ser pulsado ou contínuo (CW - continuous wave). A Tabela 15.1, extraída da Referência 1, mostra uma classificação de tipos de lasers. Deve ser observado que, nesta classificação, *estado sólido* não tem o significado usual de *semicondutor*.

O bombeamento ótico pode ser feito com lâmpadas contínuas ou pulsadas (flashes). Mas em alguns casos, o bombeamento ótico é feito com *laser auxiliar*. Por exemplo, um laser para radiação infravermelha submilimétrica pode ser bombeado óticamente por um laser de CO_2 .

O bombeamento por descarga elétrica é bastante adequado para gases atômicos ou moleculares.

⁴Ver seção 13.4.3, por exemplo.

Tipo de meio ativo Tipo de Laser Tipo de bombeamento

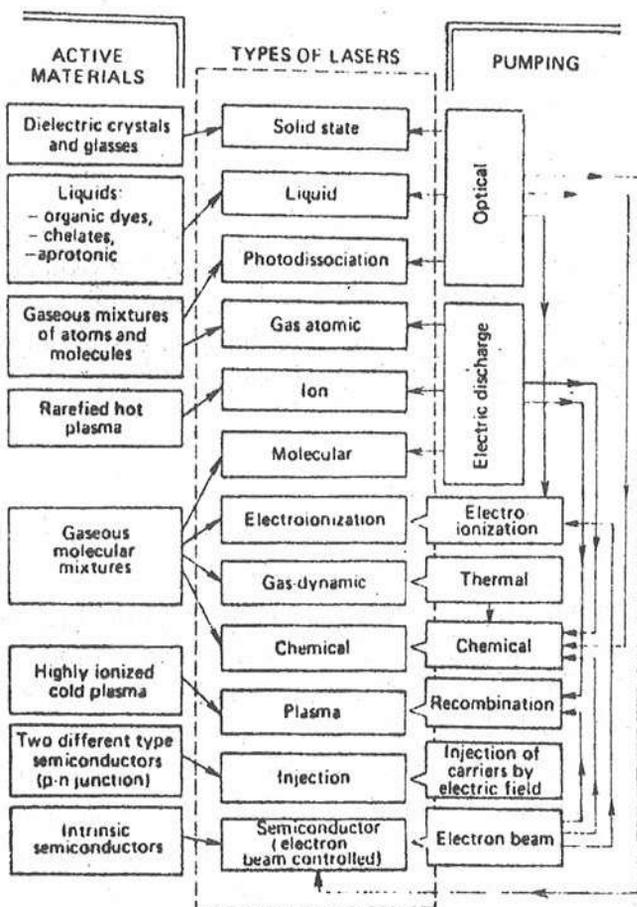


Tabela 15.1: Classificação de lasers conforme Referência 1.

15.6 Alguns lasers comuns

Laser de He-Ne. As transições envolvidas são mostradas na Figura 15.13 e o laser é mostrado esquematicamente na Figura 15.14. A transição mais utilizada é a correspondente a $632,8\text{ nm}$ (luz vermelha) do neônio, pois o laser pode funcionar para outras transições ($543,5\text{ nm}$, $1152,3\text{ nm}$ e 3391 nm). As transições envolvidas são todas do neônio, sendo que o papel do hélio consiste em ajudar a encher os níveis $5s$ ou $4s$ do neônio por meio de transferência ressonante de energia do *He* para o *Ne*.

Lasers de *He-Ne* comerciais comuns têm feixes com potências de $0,5$ a 10 mW , diâmetro do feixe de 1 mm aproximadamente, comprimento de coerência da ordem de 25 cm , funcionam em regime contínuo (CW) e podem ser *polarizados* (com janelas de Brewster) ou *não polarizados* (com espelhos perpendiculares à direção do laser).

Laser de Argônio (Ar). É um laser a gas de bombeamento por descarga elétrica que não exige nenhum outro gas para auxiliar o enchimento do nível superior. A inversão de população ocorre devido a alta eficiência no enchimento do nível superior e rápido decaimento dos níveis inferiores. O laser de Ar emite predominantemente no azul ($488,0\text{ nm} - 45\%$) e no verde ($514,5\text{ nm} - 35\%$). A potência CW usual é de vários watts, já tendo sido atingida a potência de 150 W em regime CW.

Laser de CO_2 . Um outro importante laser a gas é o laser de CO_2 . Funciona com uma mistura de $\text{CO}_2 - \text{N}_2 - \text{He}$ e as transições envolvidas são mostradas na Figura 15.15. O N_2 tem papel semelhante ao do *He* no laser de *He - Ne*, enquanto que o *He* tem função de resfriamento dos gas, devido a sua alta condutividade térmica. Os níveis envolvidos são do espectro *vibracional e rotacional*, e o laser pode emitir várias linhas do infravermelho distante, com comprimentos de onda de $9,6$ a $10,6\text{ }\mu\text{m}$. A importância do laser de CO_2 se deve às altas potências que podem ser obtidas, de alguns watts a dezenas de kilowatts em CW. Uma outra característica interessante do laser de CO_2 é a alta eficiência, que pode chegar a 20% em relação à potência elétrica, já tendo sido obtida eficiência próxima de 40% .

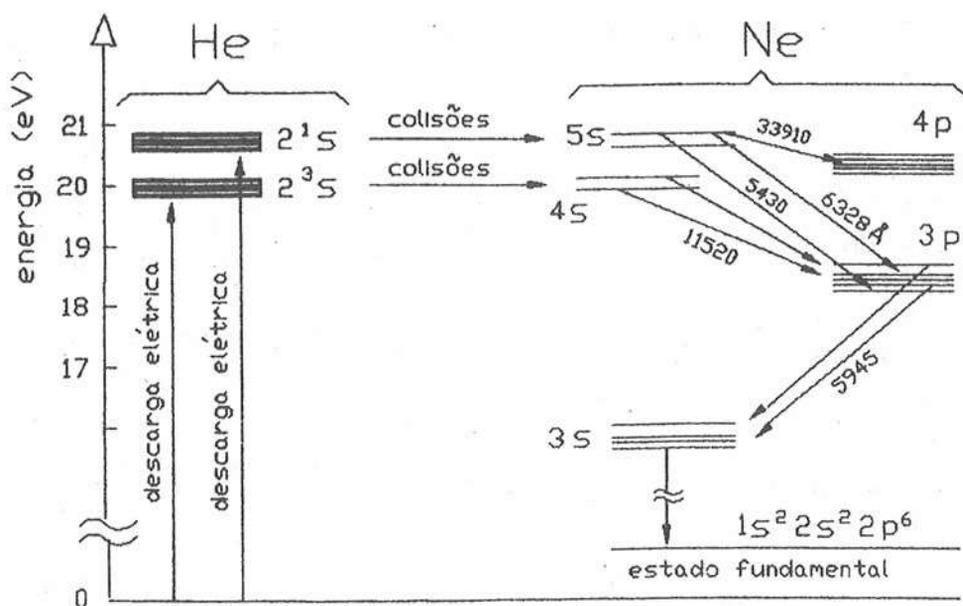


Figura 15.13: Níveis de energia envolvidos no laser de He - Ne.

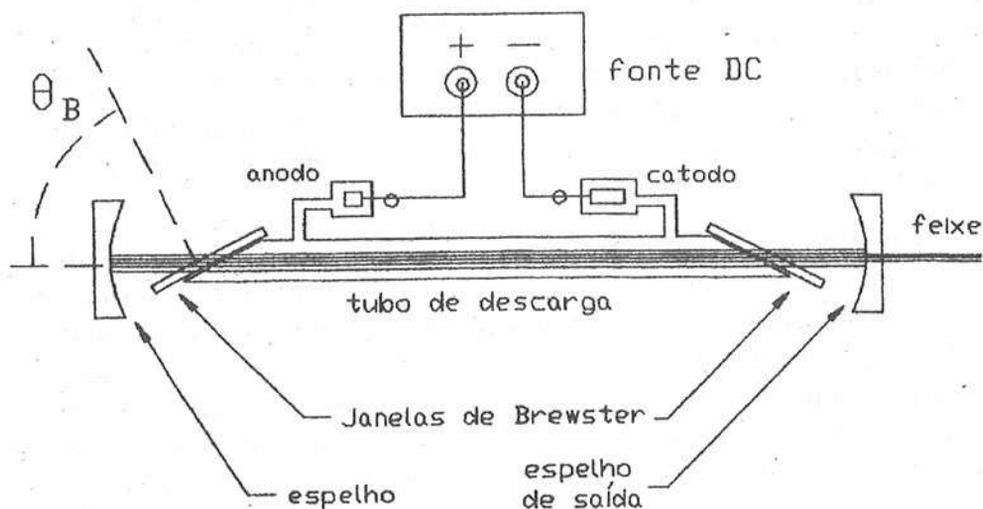


Figura 15.14: Desenho esquemático de um laser a gás.

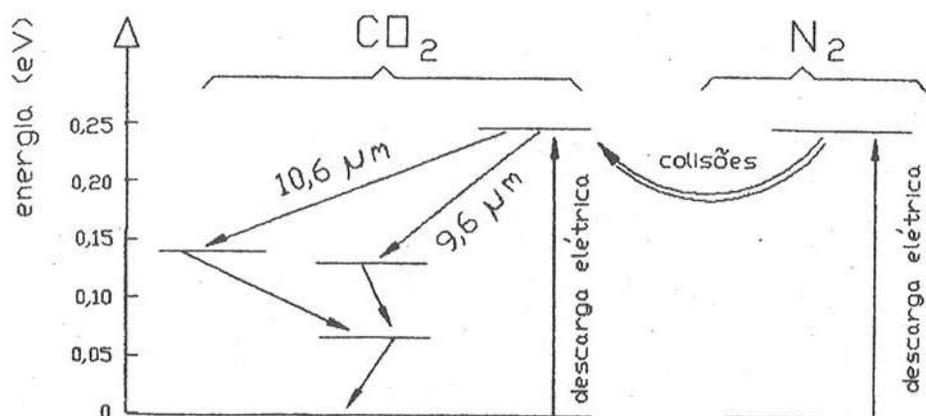


Figura 15.15: Níveis de energia envolvidos no laser de CO_2 .

Laser de Rubi. O meio ativo é uma cilindro de rubi sintético dopado (alguns íons de Al^{3+} do cristal de Al_2O_3 são substituídos por íons Cr^{3+}) e os espelhos são feitos nas próprias faces do cristal (Ver Figuras 15.16 e 15.17). Funcionam em regime pulsado bombeado opticamente por lâmpada *flash* e geram luz vermelha ($694,3 \text{ nm}$). Lasers comerciais geram pulsos com energias da ordem de 1 KJ , duração da ordem de 1 ms e comprimento de coerência de 10 cm a 10 m . O laser de rubi foi o primeiro laser a funcionar. Mais comuns atualmente são o *laser Nd:YAG* (neodymium-doped yttrium aluminium garnet) e lasers de vidro dopado com íons de elementos terras raras. Estes lasers são entendidos como lasers de *estado sólido*, que geralmente são distinguidos de lasers *semicondutores*.

Diódo laser de injeção Consiste basicamente de um diódo semicondutor (semelhante a um LED), tendo faces polidas para constituir um ressoador ótico (Ver Figura 15.18). As dimensões são da ordem de 1 mm . A inversão de população é obtida pela aplicação de campo elétrico na junção $p-n$, e o nome *laser de injeção* é referente a *elétrons injetados* do lado n do semicondutor para a junção ou *lacunas injetadas* do lado p para a junção. Os lasers de injeção são de custo relativamente baixo, pequenos e os mais simples de serem montados quando o diódo laser é disponível. Funcionam no infravermelho próximo e no visível (vermelho), com eficiências da ordem de 50% e potências até

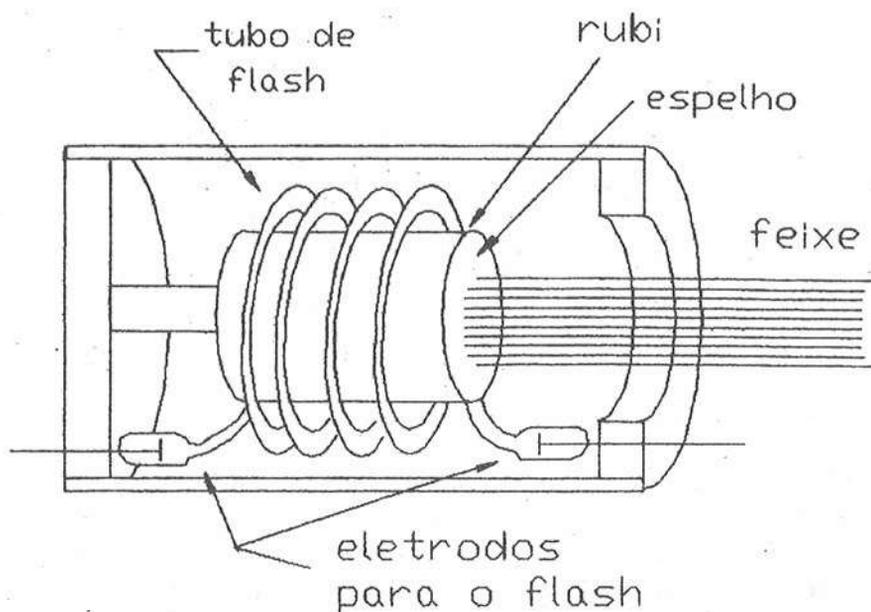


Figura 15.16: Desenho esquemático do laser de rubi.

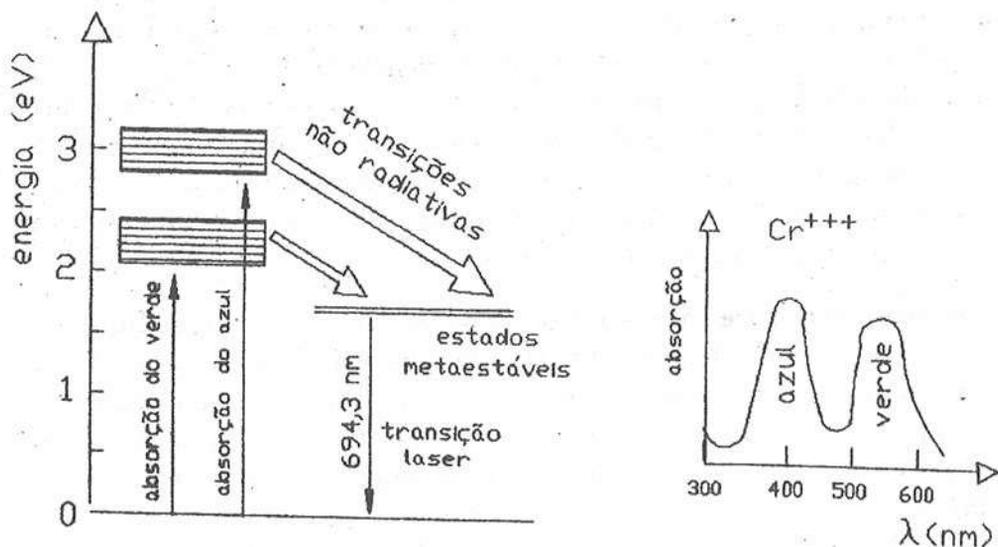


Figura 15.17: Níveis de energia envolvidos no laser de rubi.

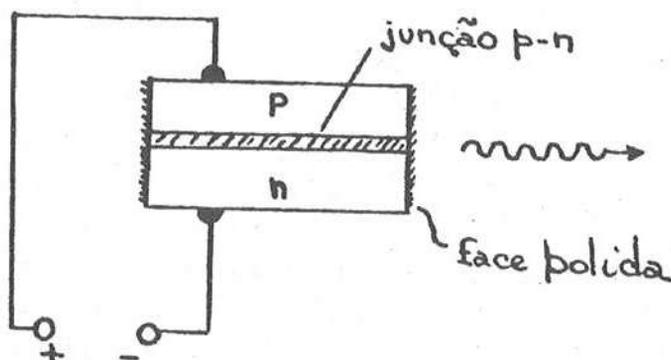


Figura 15.18: Laser de injeção.

dezenas de *mWatts* à temperatura ambiente. Em baixas temperaturas, a potência pode ser muito maior. Atualmente, existem lasers de injeção de tamanho de uma lanterna de pilhas pequenas. Estes lasers podem substituir os lasers de He-Ne em aplicações simples.

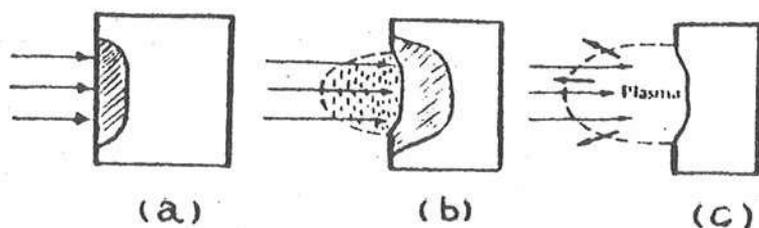
15.7 Aplicações de lasers

15.7.1 Tratamento de materiais

Um feixe de laser pode ser focalizado até cerca de $10\ \mu\text{m}$ de diâmetro, devido à grande monocromaticidade e direcionalidade. Isto significa que enormes potências podem ser concentradas numa região muito pequena do espaço. A Figura 15.19 resume os efeitos da radiação em materiais, em função da densidade de energia. Assim, um feixe de laser de grande potência, devidamente focalizado permite realizar cortes, furos e soldas em materiais⁵. O laser de CO_2 é utilizado em tais operações, devido à grande potência.

No caso de furo, o material deve ser vaporizado e gases inertes são usados para ventilar o furo reduzindo a formação de plasma opaco à radiação do laser. Entretanto, o processo de furação com laser tem custo muito alto devido à grande quantidade de energia necessária para

⁵ Uma boa descrição de aplicações industriais do laser é dada na Referência 4.



- a - Potência até 10^5 W/cm^2 : fusão do material.
 b - Potência de 10^6 a 10^7 W/cm^2 : fusão e evaporação.
 c - Potência de 10^6 a 10^9 W/cm^2 : formação de plasma opaco ao feixe.

Figura 15.19: Efeitos do feixe de laser em um material.

evaporar o material. Assim, o processo só é viável economicamente para materiais muito duros tais como cerâmicas, rubis, diamantes, ou para furos muito finos ou muito compridos, nos quais são impossíveis os processos convencionais.

No caso de corte de materiais, o processo é mais viável economicamente, pois basta que o material seja fundido e removido (não é necessário evaporar o material como no caso de furação).

Uma outra vantagem do feixe de laser é a sua mobilidade. Usando espelhos móveis, o feixe de laser pode varrer facilmente um percurso pre-determinado. Assim, uma aplicação deste tipo para laser é o uso para corte de tecido em fábrica de roupas. O pano é cortado rapidamente segundo um padrão pre-estabelecido.

Aplicações cirúrgicas do laser⁶ são de certo modo similares às técnicas de tratamento de materiais. Assim, com um feixe de laser de CO_2 podem ser construídos bisturis, cauterizadores, brocas dentárias e outros dispositivos. Uma aplicação interessante é no tratamento de um ponto interno do olho sem realizar corte. O artifício consiste em focalizar um feixe de laser no ponto de interesse e fora das vizinhanças deste ponto a radiação não provoca nenhum efeito.

⁶Uma descrição mais detalhada é apresentada na Referência 1.

15.7.2 Holografia

A holografia⁷ não é uma simples fotografia tridimensional, mas uma *reconstrução tridimensional* dos objetos holografados. Por exemplo, um objeto que se encontra atrás de outro, pode se tornar visível quando se modifica o ângulo de visão. Isto não é possível para fotografias ou figuras estereoscópicas usuais, para observação de imagens tridimensionais.

A Figura 15.20 representa uma onda plana incidente em um anteparo A e um objeto puntiforme P emitindo luz na direção do anteparo. Se existir *coerência suficiente* entre o feixe da onda plana e a luz do objeto puntiforme, no anteparo serão observados anéis claros e escuros de interferência. Anéis claros sucessivos são tais que a diferença entre os percursos luminosos correspondentes diferem de *um* comprimento de onda λ .

Se uma placa fotográfica é colocada no anteparo A, obtém-se um *holograma* do ponto P, constituído de anéis claros e escuros.

Quando o holograma é iluminado com um feixe de luz coerente, obtém-se 2 imagens, como mostrado na Figura 15.21. A imagem P_R é real, enquanto que P_V é uma imagem virtual. A formação das imagens é devida ao fato que a condição de interferência construtiva para a luz difratada nos anéis claros é satisfeita para os pontos P_R e P_V , pois é exatamente a mesma condição de interferência construtiva para a formação do holograma.

O holograma de um objeto extenso é evidentemente bem mais complicado que os anéis claros e escuros de um objeto puntiforme. O tamanho das imagens extensas real e virtual é exatamente o mesmo do objeto original, se os comprimentos de onda para obter o holograma e para iluminá-lo são iguais.

A simetria das imagens holográficas real e virtual é análoga à simetria de objeto e imagem no caso de um espelho plano simples.

Outros tipos de holografias, bem como outros detalhes são apresentados nas Referências 5 e 12.

⁷Ver Referência 5, por exemplo.

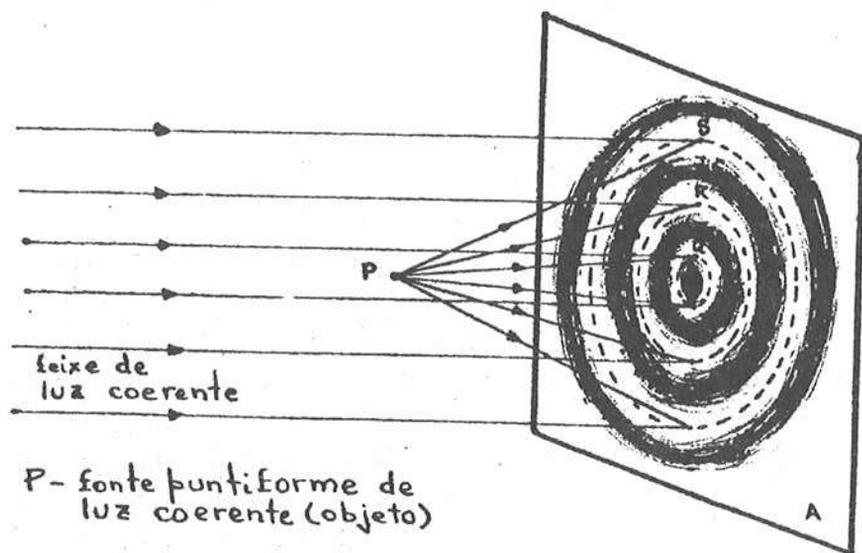


Figura 15.20: Formação da holografia de um simples ponto.

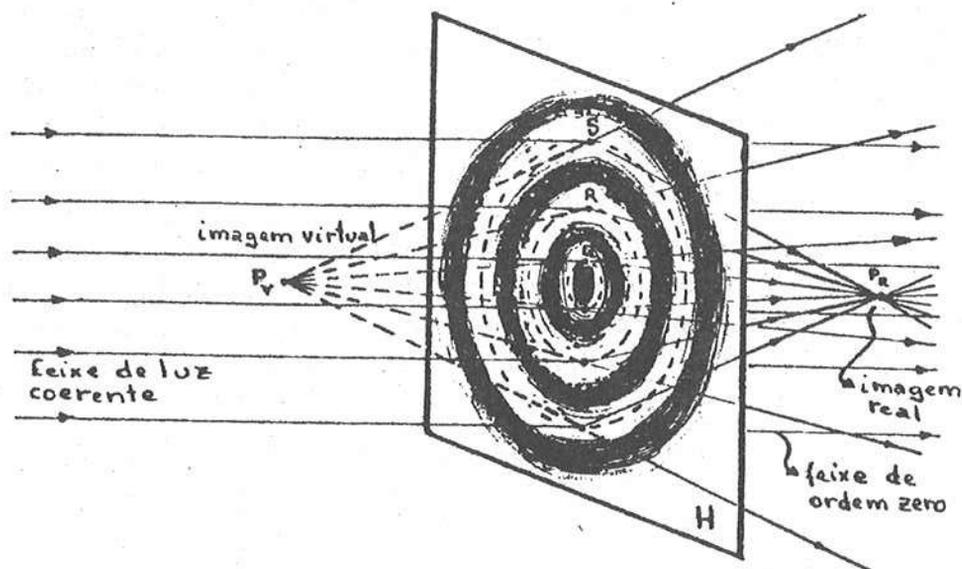


Figura 15.21: Imagens formadas iluminando-se a holografia.

15.7.3 Separação isotópica

A separação de isótopos de um mesmo elemento é importante para pesquisa científica, aplicações médicas, obtenção de combustível para reatores nucleares, além de outros usos mais questionáveis tais como armas atômicas.

A separação de isótopos⁸ de um mesmo elemento é muito difícil de ser feita por reações químicas. Isto se deve ao fato que os isótopos têm praticamente as mesmas configurações eletrônicas, as quais definem as propriedades químicas da substância.

Entre os métodos de separação isotópica podem ser mencionados a *centrifugação gasosa*, a *destilação múltipla* e a *separação eletromagnética*. Os 3 métodos são baseados na diferença de massa dos núcleos de isótopos diferentes. A *separação isotópica por laser* é baseada justamente nas pequenas diferenças de energias de excitação devidas a pequenas diferenças na estrutura eletrônica. Devido ao fato que a radiação do laser é altamente monocromática, é possível excitar seletivamente um dos isótopos, mesma que a diferença de energia de excitação correspondente no outro isótopo seja muito pequena. A partir daí podem ser usadas técnicas tais como a separação por deflexão magnética de átomos excitados, com base em diferenças nos momentos de dipolo ou quadrupolo, ou a separação com base no momento transferido na absorção do fóton do laser, ou ainda com base no recuo de moléculas resultantes de dissociação.

15.7.4 Outras aplicações

A seguir, são apresentadas de maneira mais resumida ainda, as diversas outras aplicações da radiação do laser. Tais aplicações são descritas de maneira geral na Referência 1 ou nas Referências específicas citadas em cada caso. A maioria destas Referências são em nível de divulgação.

⁸O assunto é discutido em detalhes na Referência 6.

• **Fusão termonuclear controlada.** Uma quantidade fantástica de energia pode ser concentrada em um ponto focalizando feixes de lasers de alta potência. O objetivo é atingir *temperatura e pressões* suficientemente altas para realizar a fusão termonuclear em uma pequena cápsula (pellet) de combustível, que é uma mistura de deutério e trítio. O problema tem sido objeto de muitas pesquisas nos últimos 30 anos, tendo em vista o controle da fusão termonuclear. Mas os resultados não são muito promissores.

• **Interferometria.** As medidas interferométricas são baseadas no alto grau de coerência da radiação do laser. A partir de efeitos de interferência podem ser medidas variações de distâncias da ordem de fração do comprimento de onda da radiação utilizada. Assim, variações de distâncias da ordem de 10^{-4} mm podem ser medidas. As medidas interferométricas também pode ser utilizadas para determinação de índices de refração de substâncias, densidade de gases, densidade de plasmas, velocidade de fluidos e outras medidas físicas.

• **Medidas de distâncias, alinhamento e orientação.** Medidas de distância similares à de um radar, podem ser realizadas com laser aproveitando a direcionalidade do feixe. Operações de alinhamento de dispositivos podem ser realizadas muito precisamente com laser. Nesta categoria de aplicação podem ser mencionadas as *miras de armas a laser e sistema de orientação para aterrisagem de aviões*.

• **Espetáculos visuais.** A combinação de algumas cores monocromáticas e dispositivos tais como espelhos, redes de difração e prismas, em movimento, permitem obter efeitos visuais notáveis⁹.

• **Transmissão de informações.** Um feixe de laser pode ser modulado eletronicamente ou mecanicamente de forma a transmitir informação. Por exemplo, um disco a laser tem pequenos sulcos, de forma que a radiação do feixe de laser que é refletida pelo disco é modulada.

⁹Ver Referência 7, por exemplo.

- **Armas a laser.** O laser encontra muitas aplicações bélicas, que são auxiliares tais como sistema de mira, medidas de distâncias e outras aplicações. Por *arma a laser* entende-se que a arma é o próprio laser. Trata-se de um projeto, de construir lasers de altíssima potência que seriam montados em satélites para destruir mísseis. No caso, a grande vantagem do feixe de laser consiste em se propagar com a velocidade da luz e ter grande mobilidade. Aparentemente o projeto é inviável¹⁰ devido à grande quantidade de combustível em cada satélite, necessária para alimentar os lasers, e também devido à grande quantidade de satélites.

- **Experiências didáticas.** O laser de He-Ne e o laser LED de injeção permitem realizar facilmente uma infinidade de experiências didáticas e demonstrações sobre refração, reflexão, difração, interferência e polarização da luz. Geralmente, estas experiências são bem mais difíceis de serem realizadas com fontes luminosas comuns.

- **Bombeamento ótico.** Um laser pode ser utilizado para bombeamento ótico de outro laser. Por exemplo, o laser de CO_2 é usado para bombear óticamente uma cavidade com vapor de álcool, para gerar feixe de laser de radiação infravermelha submilimétrica (FIR).

- **Pesquisa científica.** Os lasers têm uma infinidade de aplicações em medidas físicas, baseadas em *espalhamento*, *absorção*, *interferometria*, *polarimetria*, *espectroscopia* e outras.

¹⁰Ver discussão a respeito na Referência 8.

Referências

1. L. Tarasov, *Laser Physics and Applications*, MIR Publishers, Moscow (1986).
2. L.V. Tarasov, *Laser Physics*, MIR Publishers, Moscow (1980)
3. E. Hecht, *Optics*, 2nd Ed., Addison-Wesley Inc. (1987).
4. A. V. La Rocca, *Laser Applications in Manufacturing*, Scientific American, Vol.246/3, p.80 (1982).
5. E. N. Leith, *White-Light Holograms*, Scientific American, 235/4, p.80 (1976).
6. R. N. Zare, Scientific American, Vol.236/2, p.86 (1977).
7. J. Walker, Scientific American, Vol.244/1, p.142 (1981).
8. K. Tsipis, *Laser Weapons*, Scientific American, Vol.245/6, p.35 (1981).
9. Hans Koebner (Editor), *Industrial Applications of Lasers*, John Wiley & Sons, New York (1984).
10. O.D.D. Soares and M. Perez Amor (Editors), *Applied Laser Tooling*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1987).
11. P.K. Cheo (Editor), *Handbook of Molecular Lasers*, Marcel Dekker Inc., New York (1987).
12. J.E. Kasper and S.A. Feller, *The Complete Book of Holograms: How they work and how to make them*, John Wiley & Sons, New York (1986).
13. G. Bouwhuis and J.J.M. Braat, *Recording and Reading of Information on Optical Disks*, in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. IX, Edited by R.R. Shanon and J.C. Wyant, Academic Press Inc. (1983).