Equações de Fresnel e Ângulo de Brewster

Nesta prática, vamos estudar a reflexão e a refração da luz na interface entre dois meios dielétricos, buscando determinar os coeficientes de reflexão e transmissão como função do ângulo de incidência. Veremos que esses coeficientes dependem da direção de polarização da luz incidente, e que existe um ângulo (ângulo de Brewster) para o qual a luz com determinada polarização não é refletida, o que resulta no máximo de transmissão para uma determinada polarização. Esse é um método de produzir luz linearmente polarizada.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento, o aluno deverá consultar o professor, o monitor ou o técnico do laboratório para esclarecimentos.

Importante: Neste experimento será utilizado um laser. Cuidado para não direcioná-lo para seu próprio olho ou para o olho dos demais em sala!!!

I. Polarização por Reflexão e Ângulo de Brewster

No começo do século XIX, a área da óptica física viveu um grande desenvolvimento, com contribuições de cientistas como Thomas Young, E. L. Malus, Augustin Fresnel e Sir David Brewster. Em 1808, Malus percebeu que o coeficiente de reflexão (fração da intensidade incidente que é refletida) dependia da polarização, mas não avançou muito no sentido de obter relações quantitativas. Em 1815, Sir David Brewster, físico escocês, mostrou que havia um ângulo para o qual a luz com determinada polarização não era refletida, resultando no máximo de transmissão para uma determinada polarização. Brewster relacionou esse ângulo com o índice de refração dos materiais; hoje, esse ângulo é conhecido como o ângulo de Brewster.

Em 1821, Fresnel mostrou que os fenômenos envolvendo polarização só podiam ser explicados se a luz fosse tratada como uma onda puramente transversal (acreditava-se na época que a luz tinha também uma componente longitudinal). Ele também calculou os coeficientes de reflexão para cada uma das componentes, chegando ao que hoje é conhecido como as equações de Fresnel.

Quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de Brewster, a componente cuja polarização é paralela ao plano de incidência é completamente transmitida, de modo que a luz refletida tem apenas a componente perpendicular. O ângulo de Brewster ocorre quando os raios refletido e refratado fazem um ângulo de $\pi / 2$:

$$\theta_B + \theta_t = \pi / 2 \tag{1}$$

Usando a lei de Snell, temos:

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \cos\theta_B \tag{2}$$

Ou seja:

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{3}$$

Essa relação foi descoberta experimentalmente por Brewster e relaciona o ângulo de polarização e o índice de refração. Para o caso comum em que o meio 1 é o ar ($n_1 = 1$) e o meio 2 tem índice de refração $n_2 = n$ têm-se:

$$\tan\theta_B = n \tag{4}$$

II. Relações de Fresnel (incidência oblíqua)

As equações de Fresnel foram obtidas muito antes dos trabalhos de Maxwell, quando ainda não se sabia que a luz era uma onda eletromagnética. A dedução moderna é feita usando as condições de continuidade dos campos elétrico e magnético em uma interface plana entre dois meios dielétricos. Com esse método, é possível deduzir as leis de reflexão e refração e o coeficiente de reflexão da onda para cada componente da polarização.

Vamos considerar uma interface entre dois meios transparentes ao longo do plano *xy*. Cada meio é representado por um par de constantes, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética. A velocidade da luz no material é dada por:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5}$$

Nas freqüências ópticas, a permeabilidade magnética é praticamente igual à permeabilidade magnética do vácuo. Assim o índice de refração depende apenas da permissividade elétrica. Logo, o índice de refração é dado por:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_o}} = \sqrt{\frac{c^2\varepsilon_0}{\varepsilon}} = \frac{c}{n} \text{ com: } c = \sqrt{\frac{1}{\mu_o\varepsilon_0}} \text{ e } n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_o} \tag{6}$$

Vamos assumir uma onda eletromagnética que se propaga no meio 1 (que tem $z < 0$), e incide sobre o plano *xy*, gerando uma onda refletida de volta ao meio 1 e uma onda refratada no meio 2, como mostrado na figura 1.

A direção de propagação $\hat{n} = \vec{k} / |\vec{k}|$ de cada onda é:

$$\hat{n}_1 = \sin\theta_1\hat{x} + \cos\theta_1\hat{z} \tag{7a}$$

$$\hat{n}_2 = \sin\theta_2\hat{x} - \cos\theta_2\hat{z} \tag{7b}$$

$$\hat{n}_3 = \sin\theta_3\hat{x} + \cos\theta_3\hat{z} \tag{7c}$$

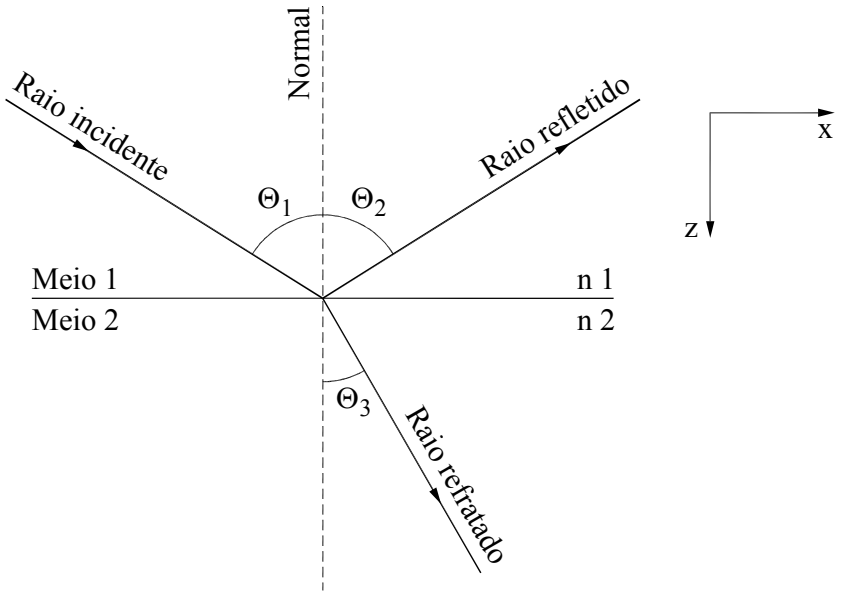


Figura 1 – Incidência de uma onda em uma interface plana, com ângulo de incidência θ_1, gerando uma onda refletida (com ângulo de reflexão θ_2) e uma onda refratada (com ângulo de refração θ_3).

Como dissemos, o coeficiente de reflexão depende da polarização, então vamos analisar cada polarização separadamente. Primeiro, vamos considerar a polarização paralela ao plano de incidência. Por simplicidade, vamos considerar que a amplitude da onda incidente será igual a 1, e as ondas refletida e transmitida têm amplitude $r_{//}$ e $t_{//}$.

$$\vec{E}_i = \left(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}\right)e^{i(k_1\hat{n}_1\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{8a}$$

$$\vec{E}_r = r_{//}\left(\cos\theta_2\hat{x} + \sin\theta_2\hat{z}\right)e^{i(k_1\hat{n}_2\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{8b}$$

$$\vec{E}_t = t_{//}\left(\cos\theta_3\hat{x} - \sin\theta_3\hat{z}\right)e^{i(k_2\hat{n}_3\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{8c}$$

Em uma interface plana entre meios dielétricos, as condições de contorno que devem ser verificadas para as componentes tangenciais e normais campos elétrico e magnético da onda são:

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{9a}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \tag{9b}$$

$$\frac{1}{\mu_1} B_{1t} = \frac{1}{\mu_2} B_{2t} \tag{9c}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{9d}$$

Onde E_{1t} e E_{2t} representam a componente tangencial do campo elétrico nos meios 1 e 2, e E_{1n} e E_{2n} representam as componentes normais (analogamente para o campo magnético). Para o caso considerado, as condições de contorno do campo elétrico se escrevem como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y})\cdot(\vec{E}_i+\vec{E}_r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y})\cdot\vec{E}_t \tag{10a}$$

$$\varepsilon_1\hat{z}\cdot(\vec{E}_i+\vec{E}_r) = \varepsilon_2\hat{z}\cdot\vec{E}_t \tag{10b}$$

Aplicando a condição 10a no plano $z = 0$, obtemos:

$$\cos\theta_1 e^{ik_1 x\sin\theta_1} + r_{//}\cos\theta_2 e^{ik_1 x\sin\theta_2} = t_{//}\cos\theta_3 e^{ik_2 x\sin\theta_3} \tag{11}$$

A equação acima tem que ser válida para todo x, o que só é possível se os argumentos das exponenciais forem iguais. Logo:

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \tag{12}$$

$$k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_3 \tag{13}$$

Essas equações são conhecidas como equações cinemáticas de Fresnell. A primeira delas é a lei de reflexão. A segunda é a lei de Snell, se lembrarmos que $k = n\frac{2\pi}{\lambda}$, ou seja, que k é proporcional a n.

Como os fatores exponenciais na equação 11 são iguais, podemos cancelá-los para chegar a:

$$\cos\theta_1(1+r_{//}) = t_{//}\cos\theta_3 \tag{14}$$

Usando a condição 10b podemos obter de forma análoga:

$$\varepsilon_1 \sin\theta_1 (1 - r_{//}) = \varepsilon_2 t_{//} \sin\theta_3 \tag{15}$$

As equações 14 e 15 agora podem ser resolvidas para $r_{//}$ e $t_{//}$. Vamos nos concentrar apenas em $r_{//}$:

$$\frac{1 - r_{//}}{1 + r_{//}} = \frac{\varepsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{\varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3} \tag{16}$$

Resolvendo para $r_{//}$:

$$r_{//} = \frac{\varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3 - \varepsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1}{\varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_3 + \varepsilon_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1} \tag{17}$$

A equação 17 pode ser reescrita usando a lei de Snell ($\sqrt{\varepsilon_1} \sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin\theta_3$):

$$r_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(\sin\theta_3 \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \cos\theta_1\right)}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(\sin\theta_3 \cos\theta_3 + \sin\theta_1 \cos\theta_1\right)} \tag{18}$$

Para simplificar ainda mais o resultado, usamos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\sin a \cos a + \sin b \cos b = \sin(a + b)\cos(a - b) \tag{19}$$

Usando a equação 19, a equação 18 se torna:

$$r_{//} = -\frac{\tan(\theta_1 - \theta_3)}{\tan(\theta_1 + \theta_3)} \tag{20}$$

Essa expressão aparentemente não envolve os índices de refração dos meios, mas essa dependência está embutida no ângulo de refração.

Se $\theta_1 + \theta_3 = \pi/2$, o denominador na expressão 20 vai a infinito, e a amplitude da onda refletida se torna nula. Logo existe um ângulo de incidência para o qual a onda refletida não tem componente de polarização na direção paralela ao plano de incidência. Portanto, se desejarmos anular a reflexão com polarização paralela ao plano de incidência podemos variar o ângulo de incidência até que a condição $\theta_1 + \theta_3 = \pi/2$ seja satisfeita e, como existe um vínculo entre θ_1 e θ_3 pela lei de Snell, nesta condição o ângulo de incidência será o ângulo de Brewster.

Vamos provar agora que existe onda refletida se a direção de polarização da onda incidente for perpendicular ao plano de polarização da onda incidente. Os campos elétricos de cada onda agora se escrevem como:

$$\vec{E}_i' = \hat{y} e^{i(k_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{21a}$$

$$\vec{E}_r' = r_\perp \hat{y} e^{i(k_1 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{21b}$$

$$\vec{E}_t' = t_\perp \hat{y} e^{i(k_2 \hat{n}_3 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{21c}$$

Não há componente normal ao plano *xy*, portanto a condição de contorno 10b é satisfeita automaticamente. Aplicando a condição 10a:

$$1 + r_\perp = t_\perp \tag{22}$$

Para obter outra relação envolvendo $r_\perp$ e $t_\perp$, é preciso usar as condições de contorno para o campo magnético (equações 9c e 9d). Os campos magnéticos de cada onda são:

$$\vec{B}_i' = \frac{n_1}{c}\left(-\cos\theta_1 \hat{x} + \sin\theta_1 \hat{z}\right) e^{i(k_1 \hat{n}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{23a}$$

$$\vec{B}_r' = \frac{n_1}{c} r_\perp \left(\cos\theta_2 \hat{x} + \sin\theta_2 \hat{z}\right) e^{i(k_1 \hat{n}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{23b}$$

$$\vec{B}_t' = \frac{n_{21}}{c} t_\perp \left(-\cos\theta_3 \hat{x} + \sin\theta_3 \hat{z}\right) e^{i(k_2 \hat{n}_3 \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{23c}$$

As condições 9c e 9d se escrevem nesse caso como:

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y})\cdot(\vec{B}_1+\vec{B}_2)=\frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+\hat{y})\cdot\vec{B}_3 \tag{24a}$$

$$\hat{z}\cdot(\vec{B}_1+\vec{B}_2)=\hat{z}\cdot\vec{B}_3 \tag{24b}$$

Aplicando a condição 24a, e lembrando que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$:

$$n_1(1-r_\perp)\cos\theta_1 = n_2 t_\perp \cos\theta_3 \tag{25}$$

Aplicando a condição 24b:

$$n_1(1+r_\perp)\sin\theta_1 = n_2 t_\perp \sin\theta_3 \tag{26}$$

Usando a lei de Snell, vemos que essa é a mesma relação expressa pela equação 22. Finalmente, podemos resolver as equações 25 e 26 para $r_\perp$, seguindo passos análogos ao usados para $r_{//}$. O resultado é:

$$r_\perp = -\frac{\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_1+\theta_3)} \tag{27}$$

Quando $\theta_1 + \theta_3 = \pi/2$, o denominador vale 1. Os ângulos θ1 e θ3 são diferentes (exceto no caso trivial $n_1 = n_2$, onde na verdade não há interface alguma), logo o numerador é diferente de zero, e portanto há uma componente de polarização perpendicular na onda refletida.

As relações 20 e 27 se referem às amplitudes dos campos das ondas refletidas considerando o campo incidente com amplitude unitária. No entanto, usualmente no laboratório utilizamos fotodetectores, que fornecem uma tensão elétrica proporcional à intensidade das ondas eletromagnética. Assim, podemos definir grandezas relacionadas à intensidade das ondas. Assim, define-se como o coeficiente de reflexão *R* como sendo razão entre as intensidades das ondas refletidas e incidentes. Como consideramos a incidência com amplitude unitária e lembrando que intensidade da onda é proporcional ao quadrado das amplitudes temos que: $R_{//} = r_{//}^2$ e $R_\perp = r_\perp^2$. Como a nossa análise está

considerando meios transparentes (onde não existe absorção da luz) os coeficientes de transmissão T podem ser obtidos diretamente da relação $T + R = 1$.

A figura 2 mostra os coeficientes de reflexão do ar para o vidro para as ondas incidentes como polarizações paralela e perpendicular ao plano de incidência. Note que o coeficiente de reflexão da componente paralela diminui quando o ângulo de incidência aumenta, até atingir o valor zero no ângulo de Brewster (que nesse caso vale entre 50º e 60º). Então, o coeficiente de reflexão cresce rapidamente, enquanto o coeficiente de reflexão da componente perpendicular é sempre crescente. A componente perpendicular tem um coeficiente de reflexão maior para qualquer ângulo (diferente de 0º e 90º), então quando luz não polarizada é refletida ela sempre sai parcialmente polarizada na direção perpendicular.

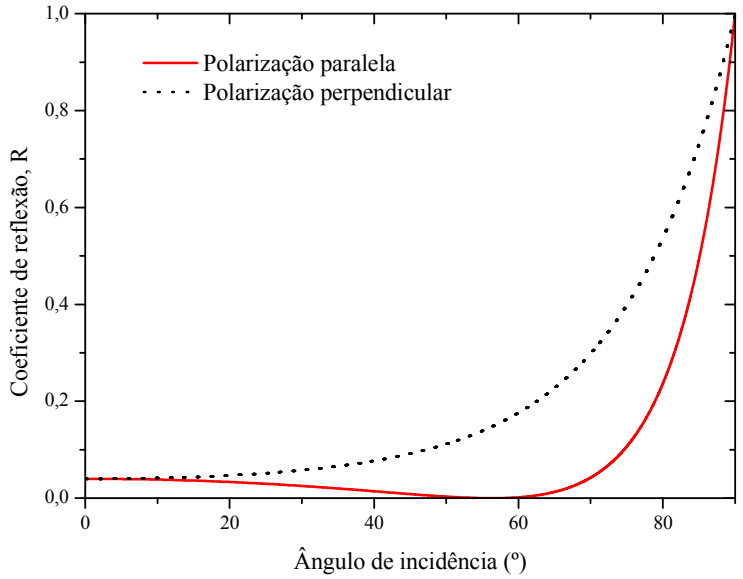


Figura 2 – Coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência para cada componente da polarização, para uma onda vinda do ar e incidindo em um vidro (n = 1,5)

A figura 3 mostra a situação da onda vindo do vidro e passando para o ar. Note que o coeficiente de reflexão vai a um para um ângulo de cerca de 40º. Se o ângulo de incidência for maior do que esse valor, ocorre reflexão interna total. Como $n_2 < n_1$, o ângulo de Brewster agora é menor do que 45º (o ângulo de Brewster é sempre menor do que o ângulo crítico).

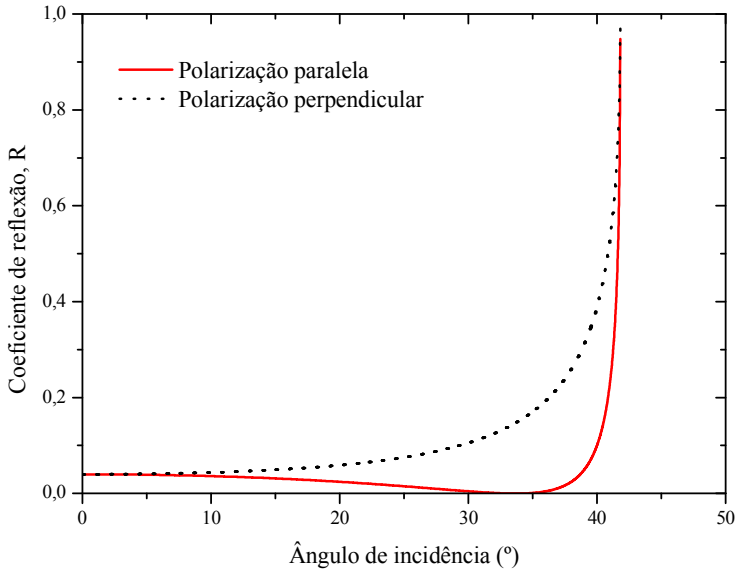


Figura 3 – Coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência para cada componente da polarização, para uma onda vinda de um vidro (n = 1,5) e indo para o ar (n = 1).

III. Relações de Fresnel (incidência normal)

Na incidência normal ($\theta_1 = \theta_3 = 0$), vemos das figuras 2 e 3 que as duas componentes tem o mesmo coeficiente de reflexão. De fato, o plano de incidência não está definido, então não há sentido em falar em polarização paralela ou perpendicular. No limite $\theta_1 \to 0$, fazemos uma aproximação de pequenos ângulos:

$$r_{\perp} = r_{//} = r \approx -\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1 + \theta_3} = -\frac{1 - \theta_3/\theta_1}{1 + \theta_3/\theta_1} \tag{28}$$

A lei de Snell permite estimar θ_3 / θ_1:

$$\frac{\theta_3}{\theta_1} \approx \frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{29}$$

Logo:

$$r = -\frac{1 - n_1/n_2}{1 + n_1/n_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{30}$$

Para o caso da interface ar-vidro, o coeficiente de reflexão (em termos das intensidades) é de cerca de 4 %. A equação 30 permite ainda obter uma outra conclusão

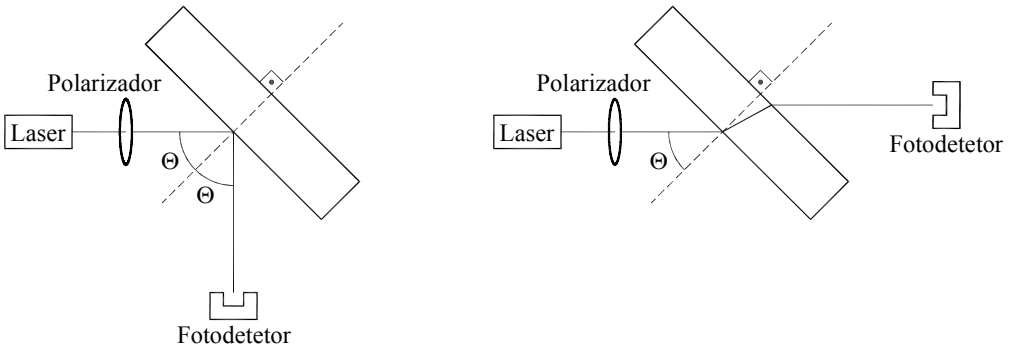
importante. Note que se $n_1 > n_2$, $r > 0$, o que significa que o campo elétrico da onda refletida tem mesma sentido que o da onda incidente. Por outro lado se $n_1 < n_2$, $r < 0$, o que diz que há uma inversão no sentido do campo elétrico. Em outras palavras, toda vez que houver incidência de um meio com menor índice de refração para outro de maior índice a onda refletida terá sua fase acrescida de π em relação à onda incidente.

Experimentos

1. Polarização da luz por reflexão – Ângulo de Brewster

A figura 4a-b ilustra a montagem experimental que utilizaremos para determinar os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, para a luz incidindo com polarização paralela e perpendicular ao plano de incidência. Importante: Ao longo dos experimentos não altere a intensidade da lâmpada que ilumina sua bancada, pois isso alterará a medida do fotodetector.

(a) (b)



(c)

Figura 4 – a) Experimento para determinação dos coeficientes de reflexão, b) Experimento para determinação dos coeficientes de transmissão. c) Montagem experimental para determinação dos coeficientes de reflexão.

a) Alinhe o feixe de laser horizontalmente e verticalmente com relação ao trilho óptico. Assegure-se que o feixe esteja numa direção horizontal e paralela ao trilho óptico. Dica: antes de fazer o alinhamento, verifique a altura do laser em relação à altura que a base rotativa irá ser posicionada.

b) Coloque o polarizador com o eixo de transmissão na horizontal e incida o feixe de laser, garantindo a retro-reflexção do feixe refletido pelo polarizador. Gire o laser de modo a obter a mínima intensidade do feixe após passar pelo polarizador (observação visual). Fixe o laser nesta posição.

c) Gire o polarizador de 90º.

d) Coloque o bloco de vidro na plataforma rotativa. Posicione-o de modo que sua primeira superfície esteja sobre um diâmetro da base rotativa. Garanta que o feixe de laser incida perpendicularmente ao bloco, observando se ocorre a retro-reflexão do feixe. Dica: caso não esteja obtendo a retro-reflexão do feixe, mude a face do bloco atingida pelo laser. Além disso, repare que a plataforma rotativa apresenta desníveis, que podem prejudicar a retro-reflexão.

e) Ajuste a posição da base giratória para que a medida zero corresponda à situação em que o laser incide perpendicularmente no bloco.

f) Posicione o fotodiodo como mostrado na figura 4a, de modo a medir a intensidade do raio refletido. Para determinar as intensidades dos raios refletidos, você

deverá utilizar um fotodiodo juntamente com um voltímetro. Dica: é conveniente utilizar o fotodiodo com o suporte com parafuso micrométrico para efetuar mais rapidamente e com maior precisão as medidas a seguir.

g) Posicione a plataforma de modo a obter um ângulo inicial em torno de 25º. Em seguida, gire a plataforma para iniciar as medidas e reposicione o fotodiodo para detectar a luz refletida. Observação: repare que existem dois raios refletidos, um proveniente da primeira face e outro da segunda face. Determine qual desses raios é originário da reflexão na primeira face e use esse para todas as medidas pertinentes.

h) Meça a tensão no voltímetro como função do ângulo de incidência. Use passo de 5º exceto entre 50º e 60º onde o passo deve ser de 2º. Em cada medida gire lentamente a parte do trilho óptico onde está o fotodiodo de modo a maximizar o sinal no fotodiodo. Para um ajuste mais rápido e preciso, após girar a plataforma, utilize o parafuso micrométrico para mover o fotodiodo.

i) Repita o procedimento do item b ao item h, colocando o polarizador inicialmente na posição vertical. Ou seja, faça o ajuste inicial de modo que a intensidade do laser após passar pelo polarizado na posição vertical seja mínima.

Intensidade do raio refletido em função do ângulo de incidência

θ (º)	V_h (V)	V_v (V)	θ (º)	V_h (V)	V_v (V)

j) Repita o procedimento do item b ao item i, medido a intensidade do feixe transmitido. Repare que há dois feixes transmitidos, sendo um deles ocorrido após duas reflexões internas no bloco de vidro (cujo caminho do raio de luz é: refração na primeira face – reflexão na segunda face – reflexão na primeira face – transmissão na segunda face). As medidas devem ser baseadas na transmissão sem reflexões nas faces.

Intensidade do raio transmitido em função do ângulo de incidência

θ (º)	V_h (V)	V_v (V)	θ (º)	V_h (V)	V_v (V)

h) Após desmontar todo o sistema e retirar o cabo atrás do fotodiodo, certifique-se que esse está desligado, assim como o multímetro.